Réduction des opérateurs bornés normaux sur les espaces de Hilbert séparables

Rafik Imekraz

Résumé

On s'intéresse dans ce cours à la réduction des opérateurs bornés normaux d'un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert. Il est connu que lorsque H est de dimension finie, un opérateur T normal ($TT^\star = T^\star T$) admet une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de H constituée de vecteurs propres. En dimension infinie, un opérateur normal peut très bien ne pas avoir de valeurs propres. Examinons par exemple l'opérateur T de l'espace de Lebesgue $L^2(0,1)$ qui à la fonction $f(x)$ associce $xf(x)$. Il est facile de constater que T est borné ($||T|| \leq 1$) et que T est hermitien ($T = T^\star$) donc normal. Par contre, si $f \in L^2(0,1)$ est un vecteur propre, alors on a $Tf = \lambda f$, et donc $(x - \lambda)f(x) = 0$ pour presque tout $x \in]0,1[$, la mesure de Lebesgue n'admettant pas d'atomes, on obtient $f = 0$.

Nous allons voir, que d'une certaine manière les opérateurs normaux de multiplication $f(z) \mapsto zf(z)$ définis sur des espaces de Lebesgue $L^2(\mu)$, où μ est une mesure positive, finie et à support, sont représentatifs de tous les opérateurs normaux.

Nous nous sommes essentiellement inspirés des " Éléments d'analyse" de Jean Dieudonné ([Die]).

1 Calcul fonctionnel continu et sous-algèbre stellaire

Dans cette partie, on fait quelques rappels sur les $\mathbb{C}$-algèbres complètes ainsi que sur les propriétés importantes des caractères des algèbrse commutatives. En application, on étudie le calcul fonctionnel continu d'un opérateur normal T d'un espace de Hilbert, c'est-à-dire comment définir $f(T)$ lorsque f est une fonction continue sur le spectre de T. L'idée maîtresse consiste à remarquer que l'on sait définir $f(T)$ lorsque f est une fonction polynomiale, que l'on préfère mettre sous forme $z \mapsto P(z, \overline{z})$, puis de démontrer la formule $||f(T)|| = \sup_{z \in \mathrm{sp}(T)} |f(z)|$, la définition de $f(T)$ lorsque f est continue se déduira par un raisonnement de densité.

1.1 Quelques rappels sur les algèbres normées

Dans toute la suite, on appelle une $\mathbb{C}$-algèbre normée une $\mathbb{C}$ algèbre, dont on note e l'élément neutre, munie d'une norme $|| \cdot ||$ vérifiant $||e|| = 1, ||xy|| \leq ||x|| \cdot ||y||$ pour tous $x, y \in A$.

Proposition 1.1.1. Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach , pour tout $x \in A$ tel que $||x|| < 1$, on a $e + x \in A^\star$. Par suite, le groupe $A^\star$ des éléments inversibles de A est un ouvert de A.

Preuve. L'argument est classique : la série $\sum(-x)^n$ est convergente et sa limite est l'inverse de $e + x$. Autrement dit, la boule ouverte $B(e, 1)$ de centre e et de rayon 1 est incluse dans $A^\star$. Comme $A^\star$ est un groupe et qu'il contient un voisinage de son élément neutre e, on déduit qu'il est ouvert. $\square$

Définition 1.1.2. Soient A une $\mathbb{C}$-algèbre et $a \in A$, le spectre de a est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par

$$\mathrm{sp}_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash a - \lambda e \notin A^\star\}$$

Les éléments de $\mathrm{sp}(a)$ sont les valeurs spectrales de a. S'il n'y a aucune confusion, on note $\mathrm{sp}_A(a) = \mathrm{sp}(a)$.

On fera attention que la définition du spectre d'un élément d'une algèbre dépend de l'algèbre considérée. En l'occurrence, si B est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach vérifiant $a \in B \subset A$, le spectre de a relativement à B n'est pas le même que le spectre de a relativement à A, l'inclusion $B^\star \subset A^\star$ amène de manière triviale à l'inclusion $\mathrm{sp}_A(a) \subset \mathrm{sp}_B(a)$.

Proposition 1.1.3. Les valeurs spectrales d'un élément a d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach ont un module $\leq ||a||$.

PREUVE. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > ||a||$. Les éléments $e - a/\lambda$ et $a - \lambda e$ sont donc inversibles. □

Théorème 1.1.4. Le spectre d'un élément a d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach A est non vide et compact dans $\mathbb{C}$.

PREUVE.

a) D'après la proposition 1.1.3, $\mathrm{sp}(a)$ est borné.

b) Montrons maintenant que $\mathrm{sp}(a)$ est fermé. Soit $(\lambda_n)_n$ une suite convergente de valeurs spectrales et $\lambda = \lim \lambda_n$. Comme $a - \lambda e$ est limite de la suite $(a - \lambda_n e)_n$ d'éléments non inversibles, la proposition 1.1.1 conclut que $a - \lambda e$ n'est pas inversible.

c) Il reste à prouver le point clé : $\mathrm{sp}(a)$ n'est pas vide. Supposons par l'absurde que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $a - ze \in A^\star$. Fixons $f \in \mathcal{L}(A, \mathbb{C})$, la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto f((a - ze)^{-1})$ est holomorphe et tend vers 0 quand $z \to +\infty$, le théorème de Liouville assure qu'elle est nulle. Ainsi pour tout $f \in \mathcal{L}(A, \mathbb{C})$ on a $f(a^{-1}) = 0$. En conséquence du théorème d'Hahn-Banach, on comprend que l'on a $a^{-1} = 0$, ce qui constitue manifestement une contradiction.

□

Définition 1.1.5. Soit $a \in A$ un élément d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach A, le rayon spectral de a est

$$r(a) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{sp}(a)\}$$

D'après la proposition 1.1.3, on a l'inégalité $r(a) \leq ||a||$. La formule de la proposition suivante, que l'on peut trouver dans [Rud], est connue sous le nom de formule du rayon spectral.

Proposition 1.1.6. Soit a un élément d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach A, on a $r(a) = \lim\limits_{n \to +\infty} ||a^n||^{1/n}$.

PREUVE. Voir annexe. □

Théorème 1.1.7. (Gelfand) Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach dont tout élément non nul est inversible, alors A est isométrique à $\mathbb{C}$.

PREUVE. On considère le morphisme d'algèbres $\psi : \lambda \in \mathbb{C} \mapsto \lambda e \in A$, qui s'avère être isométrique. En outre, si l'on fixe $x \in A$ et $\lambda \in \mathrm{sp}(x)$, l'élément $x - \lambda e$ n'est pas inversible donc nul. Ainsi, ψ est surjectif. □

On finit par une proposition qui étudie un exemple important de calcul de spectre :

Proposition 1.1.8. Soient K un espace topologique et A la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$. Pour tout $f \in A$, le spectre de f est exactement $f(K)$.

PREUVE. Montrons d'abord l'équivalence

$$0 \notin \mathrm{sp}(f) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \notin f(K)$$

Si 0 n'est pas une valeur spectrale de f, c'est-à-dire que f est inversible dans l'algèbre A, on a pour tout $x \in K$ l'égalité $f(x)f^{-1}(x) = 1$, donc f ne s'annule pas sur K. Réciproquement, si f ne s'annule pas sur K, alors la fonction $1/f$ est continue sur K. On conclut en remarquant que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a les deux équivalences :

$$\begin{array}{lcl} \lambda \in \mathrm{sp}(f) & \Leftrightarrow & 0 \in \mathrm{sp}(f - \lambda) \\ \lambda \in f(K) & \Leftrightarrow & 0 \in (f - \lambda)(K) \end{array}$$

□

1.2 Théorie des caractères

On étudie quelques éléments de la théorie des caractères.

Définition 1.2.1. On appelle caractère d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative A un morphisme d'algèbres de A dans $\mathbb{C}$. On note $X(A)$ l'ensemble des caractères de A.

Proposition 1.2.2. Pour toute $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative A, les caractères de A sont des applications linéaires continues de norme 1 en tant qu'éléments de $\mathcal{L}(A, \mathbb{C})$.

Preuve. Considérons $\phi \in X(A)$ et $a \in A$, supposons par l'absurde que l'on ait $|\phi(a)| > ||a||$. Ainsi, l'élément $a/\phi(a)$ a une norme < 1 et il s'ensuit que $x = e - a/\phi(a)$ est inversible. Par conséquent, $\phi(x)$ est un nombre complexe non nul, or on a $\phi(x) = 1 - \phi(a)/\phi(a) = 0$. On a donc $|\phi(a)| \leq ||a||$, puis $||\phi|| \leq 1$. Enfin, on a $||\phi|| = 1$ car $|\phi(e)| = 1 = ||e||$. □

Proposition 1.2.3. Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative , l'application Ω qui à $\phi \in X(A)$ associe l'idéal $\ker \phi$ de A est une bijection entre $X(A)$ et l'ensemble des idéaux maximaux de A.

Preuve. Si $\phi \in X(A)$, alors $\ker \phi$ est un idéal de A et ϕ induit par passage au quotient un isomorphisme d'algèbres de $A/\ker \phi$ sur $\mathbb{C}$. Il s'ensuit que $A/\ker \phi$ est un corps et donc que I est un idéal maximal de A. On a montré que Ω est bien définie.

Montrons que Ω est surjective. Soit I un idéal maximal de A, l'adhérence $\overline{I}$ de I est stable par addition et multiplication extérieure, donc demeure un idéal de A. Par maximalité de I, on est dans l'une des deux situations suivantes : I est fermé ($\overline{I} = I$) ou I est dense ($\overline{I} = A$). Comme $A^\star$ est un ouvert de A, si I était dense, il contiendrait un élément inversible donc serait égal à A, cela est contradictoire. On comprend que I est fermé. L'algèbre quotient A/I est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative sans idéal non trivial : A/I est donc un corps. Le théorème de Gelfand 1.1.7 assure que A/I est isométrique à $\mathbb{C}$. Ainsi, il apparaît que I est le noyau de la surjection canonique $A \to A/I \simeq \mathbb{C}$.

L'injectivité de Ω est facile. Si deux morphismes d'algèbres $\phi, \phi' \in X(A)$ ont même noyau alors ils sont colinéaires, l'égalité $\phi(e) = 1 = \phi'(e)$ assure que $\phi = \phi'$. □

L'intérêt des caractères est expliqué par le théorème suivant

Théorème 1.2.4. Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative , le spectre d'un élément $a \in A$ est exactement l'ensemble

$$\mathrm{sp}(a) = \{\phi(a) \backslash \phi \in X(A)\}$$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(a)$, l'élément $x = a - \lambda e$ n'est pas inversible et l'idéal Ax est un idéal propre puisqu'il ne contient pas e. Le lemme de Zorn permet de montrer que Ax est inclus dans un idéal maximal de A, la proposition 1.2.3 assure qu'il existe un caractère $\phi \in X(A)$ tel que $Ax \subset \ker \phi$. Conséquemment on a

$$0 = \phi(x) = \phi(a) - \lambda$$

Réciproquement, on fixe $\phi \in X(A)$, l'élément $y = a - \phi(a)e$ vérifie $\phi(y) = 0$ et donc n'est pas inversible. □

1.3 Calcul fonctionnel continu pour un opérateur normal

On considère désormais un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert H et son algèbre de Banach $\mathcal{L}(H)$. On note par ailleurs $\mathrm{GL}(H)$ l'ensemble des isomorphismes d'espaces de Hilbert de H. On pose les définitions habituelles :

Définition 1.3.1. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$,

a) T est hermitien si $T^\star = T$

b) T est unitaire si $T^\star = T^{-1}$

c) T est normal si $T \circ T^\star = T^\star \circ T$

Notons que le cas normal englobe les cas hermitien et unitaire. Par commodité on introduit la définition suivante :

Définition 1.3.2. Une sous-algèbre A de $\mathcal{L}(H)$ est dite stellaire si elle est fermée et stable par l'adjonction $T \mapsto T^\star$.

On convient par ailleurs que toute sous-algèbre contient Id. L'intérêt des sous-algèbres stellaires sera développé un peu plus loin.

Proposition 1.3.3. Pour toute sous-algèbre stellaire B de $\mathcal{L}(H)$ et pour tout opérateur hermitien $T \in \mathcal{L}(H)$, le spectre $\mathrm{sp}_B(T)$ est réel.

Preuve. Soit $\alpha + i\beta$ une valeur spectrale de T dans B avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\alpha + i(\beta + t)$ est une valeur spectrale de $T + it\mathrm{Id}$ dans B. La proposition 1.1.3 amène à

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 \leq ||T + t\mathrm{Id}||^2 = ||(T + it\mathrm{Id})(T + it\mathrm{Id})^\star|| = ||(T + it\mathrm{Id})(T - it\mathrm{Id})|| = ||T^2 + t^2\mathrm{Id}|| \leq ||T^2|| + t^2$$

La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \beta t$ s'avère être majorée donc $\beta = 0$. $\square$

Dans le commentaire faisant suite à la définition 1.1.2, on a justifié l'inclusion $\mathrm{sp}_{\mathcal{L}(H)}(T) \subset \mathrm{sp}_B(T)$. Lorsque B est une sous-algèbre stellaire, l'inclusion réciproque est aussi vraie de sorte que le spectre d'un opérateur borné ne dépend pas de la sous-algèbre stellaire qui le contient.

Lemme 1.3.4. Soit B une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{L}(H)$, on a l'égalité $B^\star = \mathrm{GL}(H) \cap B$. Par suite, pour tout $S \in B$ on a l'égalité $\mathrm{sp}_B(S) = \mathrm{sp}_{\mathcal{L}(H)}(S)$.

Preuve. L'inclusion $B^\star \subset \mathrm{GL}(H) \cap B$ est claire. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $T \in \mathrm{GL}(H) \cap B$, on veut montrer que $T^{-1} \in B$. L'opérateur $T \circ T^\star$ est inversible dans $\mathrm{GL}(H)$, nous allons justifier que son inverse appartient à B. L'opérateur hermitien $T \circ T^\star$ appartient à B et l'on a l'inclusion $\mathrm{sp}_B(T \circ T^\star) \subset \mathbb{R}$ en vertu de 1.3.3.

On déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ l'on a $T \circ T^\star + in^{-1}\mathrm{Id} \in B^\star$. La suite de terme général $(T \circ T^\star + in^{-1}\mathrm{Id})^{-1}$ converge vers $(T \circ T^\star)^{-1}$. Comme B est fermée, l'inverse de $T \circ T^\star$ appartient à B. Par conséquent T est inversible à droite dans B : il existe $S \in B$ tel que $T \circ T^\star \circ S = \mathrm{Id}$. On conclut que $T^{-1} = T^\star S$ appartient à B.

Enfin, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ comme $S - \lambda\mathrm{Id} \in B$, on obtient l'équivalence

$$S - \lambda\mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(H) \quad \Leftrightarrow \quad S - \lambda\mathrm{Id} \in B^\star$$

$\square$

Désormais, on parlera du spectre d'un opérateur borné $T \in \mathcal{L}(H)$ sans préciser d'algèbre stellaire.

Lemme 1.3.5. Soit A une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{L}(H)$, pour tout $T \in A$ et $\phi \in X(A)$ on a $\phi(T^\star) = \overline{\phi(T)}$.

Preuve. Il suffit d'écrire $T = U + iV$ avec $U = (T + T^\star)/2$ et $V = (T - T^\star)/(2i)$. On remarque que U et V sont hermitiens donc à spectre réel. Le théorème 1.2.4 assure que pour tout $\phi \in X(A)$ l'on a

$$\phi(T^\star) = \phi(U - iV) = \phi(U) - i\phi(V) = \overline{\phi(U) + i\phi(V)} = \overline{\phi(T)}$$

$\square$

Lemme 1.3.6. Le rayon spectral d'un opérateur normal $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifie $r(T) = ||T||$.

Preuve. On suppose d'abord que T est hermitien. On a $||T||^2 = ||T^2||$ et par récurrence sur n l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $||T^{2^n}|| = ||T||^{2^n}$. D'après la proposition 1.1.6, il vient $r(T) = \lim_{n \to +\infty} ||T^{2^n}||^{2^{-n}} = ||T||$. On revient au cas normal $TT^\star = T^\star T$. L'élément $TT^\star$ est hermitien et il s'ensuit que l'on a

$$r(T) = \lim_{n \to +\infty} ||T^n||^{1/n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{||T^n(T^n)^\star||^{1/n}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{||(TT^\star)^n||^{1/n}} = \sqrt{r(TT^\star)} = \sqrt{||TT^\star||} = ||T||$$

$\square$

On arrive au théorème crucial qui permet de définir le calcul fonctionnel continu d'un opérateur normal.

Théorème 1.3.7. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, pour tout $P \in \mathbb{C}[X,Y]$, on a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{sp}(P(T,T^\star)) & = & \{P(\lambda,\overline{\lambda}), \lambda \in \mathrm{sp}(T)\} \\ ||P(T,T^\star)|| & = & \sup\limits_{\lambda\in\mathrm{sp}(T)} |P(\lambda,\overline{\lambda})| \end{array}$$

Preuve. Notons d'abord que la relation $TT^\star = T^\star T$ permet de définir $P(a,a^\star)$ sans ambiguïté. Introduisons la plus petite sous-algèbre stellaire contenant T et $T^\star$, c'est-à-dire la sous-algèbre commutative $B = \overline{\mathbb{C}[T,T^\star]}$. En vertu de 1.3.4, 1.3.5 et 1.2.4 on obtient

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{sp}_{\mathcal{L}(H)}(P(T,T^\star)) & = & \mathrm{sp}_B(P(T,T^\star)) \\ & = & \{\phi(P(T,T^\star)) \quad \backslash \quad \phi \in X(B)\} \\ & = & \{P(\phi(T),\phi(T^\star)) \quad \backslash \quad \phi \in X(B)\} \\ & = & \{P(\phi(T),\overline{\phi(T)}) \quad \backslash \quad \phi \in X(B)\} \end{array}$$

De nouveau, 1.3.4 et 1.2.4 amènent à

$$\mathrm{sp}(P(T,T^\star)) = \{P(\lambda,\overline{\lambda}), \lambda \in \mathrm{sp}_B(T)\} = \{P(\lambda,\overline{\lambda}), \lambda \in \mathrm{sp}(T)\}$$

L'opérateur $P(T,T^\star)$ est normal et le lemme 1.3.6 permet de conclure

$$||P(T,T^\star)|| = r(P(T,T^\star)) = \sup_{\lambda\in\mathrm{sp}(T)} |P(\lambda,\overline{\lambda})|$$

□

Notons $\mathcal{P}(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions continues de la forme $z \mapsto P(z,\overline{z})$ lorsque $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ sur le compact $\mathrm{sp}(T)$. Le théorème de Stone-Weierstrass permet de voir que l'algèbre $\mathcal{P}(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$. On pourra consulter [HL] pour une démonstration du théorème de Stone-Weierstrass. On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant

Théorème 1.3.8. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, il existe un unique morphisme J_T d'algèbres normées de l'algèbre $\mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}(H)$ vérifiant

$$J_T(z \mapsto z) = T \quad \text{et} \quad J_T(z \mapsto \overline{z}) = T^\star$$

En outre, J_T vérifie les propriétés suivantes :

a) $\forall P \in \mathbb{C}[X,Y] \qquad J_T(z \mapsto P(z,\overline{z})) = P(T,T^\star)$

b) $\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C}) \qquad ||J_T(f)|| = \sup\limits_{z\in\mathrm{sp}(T)} |f(z)|$

c) $\mathrm{Im}(J_T) = \overline{\mathbb{C}[T,T^\star]}$

Preuve.

- L'unicité d'un tel morphisme est clair : si J et J' sont deux tels morphismes alors l'ensemble des fonctions f vérifiant $J(f) = J'(f)$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(a),\mathbb{C})$ contenant l'algèbre dense $\mathcal{P}(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$. Donc $J = J'$.
- Montrons maintenant l'existence. Soit $f \in \mathcal{P}(\mathrm{sp}(a),\mathbb{C})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ tel que pour tout $z \in \mathrm{sp}(a)$ on ait $f(z) = P(z,\overline{z})$. On aimerait définir $J_T(f)$ comme étant égal à $P(a,a^\star)$, mais il faut justifier que l'élément $P(T,T^\star)$ ne dépend pas du représentant P choisi. Considérons donc Q est un autre polynôme à deux variables tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $P(z,\overline{z}) = Q(z,\overline{z})$. Le théorème 1.3.7 affirme que
$$||P(T,T^\star) - Q(T,T^\star)|| = \sup_{z\in\mathrm{sp}(T)} |P(z,\overline{z}) - Q(z,\overline{z})| = 0$$

Si bien que $P(T,T^\star) = Q(T,T^\star)$. On peut donc définir J_T sans ambiguïté sur $\mathcal{P}(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ et s'avère être un morphisme d'algèbres de $\mathcal{P}(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}(H)$. Bien entendu, nous avons les deux égalités

$$J(z \mapsto z) = T \quad \text{et} \quad J(z \mapsto \overline{z}) = T^\star$$

De nouveau le théorème 1.3.7 explique que J_T est une isométrie de $\mathcal{P}(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ dans l'algèbre $\overline{\mathbb{C}[T,T^\star]}$, cette dernière est complète car fermée dans $\mathcal{L}(H)$. L'application J_T peut donc se prolonger en un morphisme d'algèbres isométrique de $\overline{\mathcal{P}(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})} = \mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ dans $\overline{\mathbb{C}[T,T^\star]}$.

Le point a) découle de la construction précédente. Quant au point b), J_T est défini comme le prolongement d'une isométrie sur une partie dense, donc J_T est isométrique. Enfin pour le point c), l'image d'une isométrie linéaire à valeurs dans un espace complet est toujours une partie fermée, la conclusion découle des inclusions $\mathbb{C}[T,T^\star] \subset \mathrm{Im}(J_T) \subset \overline{\mathbb{C}[T,T^\star]}$. □

Puisque $J_T(f)$ vaut $P(T,T^\star)$ lorsque f est la fonction $z \mapsto P(z,\overline{z})$, avec $P \in \mathbb{C}[X,Y]$, on convient de noter $J_T(f) = f(T)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$. Voici quelques propriétés élémentaires vérifiées par ces opérateurs.

Proposition 1.3.9. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$, on a

a) $\overline{f}(T) = f(T)^\star$

b) $f(T)$ est normal

c) $||f(T)|| = r(f(T)) = \sup_{z\in \mathrm{sp}(T)} |f(z)|$

d) $\mathrm{sp}(f(T)) = f(\mathrm{sp}(T))$

e) pour tout $U \in \mathrm{GL}(H)$ unitaire, on a $f(UTU^{-1}) = Uf(T)U^{-1}$

Preuve. Montrons les différents points

a) L'égalité $\overline{f}(T) = f(T)^\star$ est valable pour tout $f \in \mathcal{P}(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$. On conclut par densité et par continuité de l'application $f \mapsto J_T(f) = f(T)$ et de l'adjonction.

b) De même que le point a), l'égalité $f(T)^\star f(T) = f(T)f(T)^\star$ est valable pour $f \in \mathcal{P}(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ et s'étend par densité pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$.

c) Il s'agit du point b) du théorème 1.3.8.

d) J_T est un isomorphisme d'algèbres normées de $\mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ sur $\overline{\mathbb{C}[T,T^\star]} \subset \mathcal{L}(H)$. Les propositions 1.1.8 et 1.3.4, appliquée à la sous-algèbre stellaire $B = \overline{\mathbb{C}[T,T^\star]}$, permettent de conclure.

e) Le morphisme d'algèbres $J' : f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C}) \mapsto Uf(T)U^{-1}$ est manifestement continu et vérfie

$$J'(z \mapsto z) = UTU^{-1} \quad \text{et} \quad J'(z \mapsto \overline{z}) = UT^\star U^{-1} = (UTU^{-1})^\star$$

L'unicité du morphisme $J_{UTU^{-1}}$ (1.3.8) montre alors que $J' = J_{UTU^{-1}}$.

□

2 Réduction des opérateurs normaux

2.1 Exemples issus de la théorie de l'intégration

Rappelons que le support $\text{supp}(\mu)$ d'une mesure μ sur $\mathbb{C}$ est le fermé de $\mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés équivalentes :

1) $\Omega = \text{supp}(\mu)^c$ est le plus grand ouvert vérifiant $\mu(\Omega) = 0$
2) $\text{supp}(\mu) = \{z \in \mathbb{C}, \forall \epsilon > 0 \quad \mu(B_O(z,\epsilon)) > 0\}$
3) $\text{supp}(\mu)$ est le plus petit fermé tel que pour μ presque tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $z \in \text{supp}(\mu)$

Fixons quelques notations d'intégration.

Définition 2.1.1. On note $M(\mathbb{C})$ l'ensemble des mesures **positives**, **à support compact** et **finies** définies sur la tribu des boréliens de $\mathbb{C}$.

Par exemple, si K est un compact de $\mathbb{C}$, alors toute mesure de Radon positive de K s'identifie naturellement comme un élément de $M(\mathbb{C})$ à support inclus dans K.

Définition 2.1.2. Pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$, on note $B(K)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions boréliennes bornées sur K à valeurs complexes, elle devient complète munie de la norme infinie.

Définition 2.1.3. Soient $\mu \in M(\mathbb{C})$ et $f \in B(\text{supp}(\mu))$ on note $S(\mu, f)$ l'application linéaire de l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$ dans lui-même définie par

$$\forall g \in L^2(\mu) \quad S(\mu, f)g(z) = f(z)g(z) \qquad \mu \text{ presque pour tout } z \in \mathbb{C}$$

Lorsque f est la fonction identité $z \mapsto z$, on note simplement $S(\mu, f) = S(\mu)$.

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes

Proposition 2.1.4. Pour toutes fonctions $f, f_1, f_2 \in B(\text{supp}(\mu))$ et $a, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ on a

a) $S(\mu, f_1) \circ S(\mu, f_2) = S(\mu, f_1 f_2)$, en particulier $S(\mu, f_1)$ et $S(\mu, f_2)$ commutent
b) $S(\mu, a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 S(\mu, f_1) + a_2 S(\mu, f_2)$
c) $S(\mu, 1) = \text{Id}_{L^2(\mu)}$
d) l'opérateur $S(\mu, f)$ est un opérateur borné de norme $\leq ||f||_\infty$
e) l'opérateur $S(\mu, f)^\star$ est exactement $S(\mu, \overline{f})$
f) l'opérateur $S(\mu, f)$ est normal
g) pour tout $g \in \mathcal{P}(\text{sp}(T), \mathbb{C})$, on a $g(S(\mu, f)) = S(\mu, g(f))$.

À titre d'exemple, on pourra examiner la situation suivante : soit $\lambda(1), \cdots, \lambda(n)$ des nombres complexes distincts et μ la mesure $\sum_{k=1}^n \delta_{\lambda(k)}$. Il est facile de constater que les fonctions $\mathbf{1}_{\lambda(1)}, \cdots, \mathbf{1}_{\lambda(n)}$ forment une base orthonormée de l'espace $L^2(\mu)$. En outre, on a $S(\mu)\mathbf{1}_{\lambda(k)} = \lambda_k \mathbf{1}_{\lambda(k)}$, autrement dit $S(\mu)$ est diagonalisé dans une base orthonormée. Cet exemple est représentatif de tous les cas d'opérateurs normaux en dimension finie.

2.2 Conjugaison unitaire

Dans toute la suite, les symboles H et H_i désignent des $\mathbb{C}$-espaces de Hilbert séparables.

Définition 2.2.1. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est dit unitaire si l'on a $TT^\star = \mathrm{Id}_{H_2}$ et $T^\star T = \mathrm{Id}_{H_1}$. En particulier T est bijectif et isométrique ($||T(x)|| = ||x||$ pour tout $x \in H_1$).

Définition 2.2.2. Soient $T_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(H_2)$, on définit la relation d'équivalence $T_1 \simeq T_2$ par l'existence d'un opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tel que $UT_1U^{-1} = T_2$. On dit que T_1 et T_2 sont unitairement conjugués.

On remarque que si T_1 et T_2 sont unitairement conjugués alors $T_1^\star$ et $T_2^\star$ le sont aussi.

2.3 Sous-espaces cycliques

Définition 2.3.1. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, pour tout $x \in H$ on note $[x]_T$ le plus petit sous-espace fermé de H stable par T et $T^\star$, c'est-à-dire

$$[x]_T = \overline{\mathrm{Vect}\{T^k \circ T^{m\star}(x), (k, m) \in \mathbb{N}^2\}}$$

Un sous-espace F de H est dit T-cyclique s'il existe $x \in H$ tel que $F = [x]_T$.

L'opérateur T est monogène si H est T-cyclique. Dans ce cas, un vecteur $x \in H$ tel que $H = [x]_T$ est dit totalisateur pour T.

On remarque que pour tout $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ l'élément $P(T, T^\star)(x)$ appartient au sous-espace fermé $[x]_T$, et par conséquent il en est de même pour $f(T)x$ avec $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T), \mathbb{C})$. Le théorème suivant décrit complètement le comportement d'un opérateur normal sur un sous-espace cyclique.

Théorème 2.3.2. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et $x \in H$, l'application

$$\mu_x^T : f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T), \mathbb{C}) \mapsto (f(T)x|x)$$

est une mesure positive sur $\mathrm{sp}(T)$, que l'on identifie à une mesure sur $\mathbb{C}$ à support inclus dans $\mathrm{sp}(T)$, on l'appelle la mesure spectrale de x par rapport à T. Par suite, l'application

$$U_x : f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T), \mathbb{C}) \mapsto f(T)x$$

se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathrm{sp}(T), \mu_x^T)$ sur $[x]_T$ et par conjugaison on a

$$U_x{}^{-1} T U_x = S(\mu_x^T)$$

Preuve.

i) L'application μ_x^T est une forme linéaire positive : si $f \geq 0$ on pose $g = \sqrt{f}$ et donc

$$\psi(f) = (g^2(T)x|x) = (g(T) \circ g(T)x|x) = (g(T)x|g(T)^\star x) = (g(T)x|\overline{g}(T)x) = (g(T)x|g(T)x) \geq 0$$

C'est précisément pour cette raison que le calcul fonctionnel s'est avéré utile : l'ensemble des fonctions continues positives sur $\mathrm{sp}(T)$ est stable par racine carrée, ce qui n'est pas le cas de l'ensemble des fonctions positives de $\mathcal{P}(\mathrm{sp}(T), \mathbb{C})$. Autrement dit, μ_x^T est une mesure de Radon positive sur le compact $\mathrm{sp}(T)$.

Concernant l'application linéaire U_x, on a directement

$$||U_x(f)||^2 = ||f(T)x||^2 = (f(T)x|f(T)x) = (f(T)^\star \circ f(T)x|x) = (|f|^2(T)x|x) = \int |f|^2 d\mu_x^T$$

Par ailleurs, l'espace complété de l'espace $\mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T), \mathbb{C})$ muni de la norme $f \mapsto \left(\int |f|^2 d\mu_x^T\right)^{1/2}$ est l'espace de Lebesgue $L^2(\mathrm{sp}(T), \mu_x^T)$. Comme l'espace $[x]_T$ est complet, U_x se prolonge de manière unique en une isométrie, que l'on note encore U_x, de $L^2(\mathrm{sp}(T), \mu_x^T)$ dans $[x]_T$. Enfin, l'image de U_x est dense dans $[x]_T$, mais aussi fermé puisque U_x est isométrique, s'ensuit que U_x est une isométrie linéaire de $L^2(\mathrm{sp}(T), \mu_x^T)$ sur $[x]_T$.

ii) Il s'agit maintenant de comprendre l'action de l'opérateur $U_x^{-1}TU_x$ sur $L^2(\mathrm{sp}(T),\mu_x^T)$. Considérons $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ et notons g la fonction continue $S(\mu_x^T)(f) : z \mapsto zf(z)$, de l'égalité $Tf(T) = g(T)$ vient

$$U_x^{-1}TU_x(f) = U_x^{-1}Tf(T)(x) = U_x^{-1}g(T)(x) = g = S(\mu_x^T)f$$

Si bien que ${U_x}^{-1}TU_x$ et $S(\mu_x^T)$ coïncident sur la partie dense $\mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ de $L^2(\mathrm{sp}(T),\mu_x^T)$. On conclut que $U_x^{-1}TU_x = S(\mu_x^T)$.

□

Voici un exemple :

Proposition 2.3.3. Soient $\mu \in M(\mathbb{C})$ et un élément $\phi \in L^2(\mu)$. La mesure spectrale de ϕ par rapport à $S(\mu)$ est $|\phi|^2\mu$. La fonction $\phi = 1$ est totalisatrice pour $S(\mu)$.

Preuve. Pour tout $f \in \mathcal{P}(\mathrm{sp}(S(\mu)),\mathbb{C})$, on a

$$f(S(\mu))\phi = S(\mu,f)\phi = f\phi \quad \Rightarrow \quad (f(S(\mu))\phi|\phi) = \int f|\phi|^2 d\mu$$

On comprend que la mesure spectrale de ϕ par rapport à l'opérateur $S(\mu)$ est $|\phi|^2\mu$. La fonction 1 est bien entendu totalisatrice pour $S(\mu)$ puisque $\mathcal{P}(\mathrm{sp}(S(\mu)),\mathbb{C})$ est dense dans $L^2(\mu)$. □

Naturellement, les mesures spectrales sont inchangées par conjugaison unitaire.

Proposition 2.3.4. On considère H_1 et H_2 deux $\mathbb{C}$-espaces de Hilbert séparables. Si $T \in \mathcal{L}(H_1)$ et si U est une isométrie de H_1 sur H_2 alors pour tout $x \in H_1$, les mesures μ_x^T et $\mu_{U(x)}^{UTU^{-1}}$ sont égales.

Preuve. Remarquons d'abord que T et UTU^{-1} ont même spectre. Il s'agit donc de prouver que pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathrm{sp}(T),\mathbb{C})$ on a

$$(f(T)x|x) = (f(UTU^{-1})U(x)|U(x))$$

La proposition 1.3.9 assure que l'on a la formule $f(UTU^{-1}) = Uf(T)U^{-1}$ et achève la preuve. □

Voici une application non triviale : soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal avec $\dim H \geq 2$, il existe un sous-espace fermé $F \subset H$ différent de $\{0\}$ et H qui est stable par T et $T^\star$. En effet, considérons un vecteur non nul $x \in H$, si le sev $[x]_T$ est différent de H, alors il convient. Dans le cas contraire, on a $H = [x]_T$, le théorème 2.3.2 explique que T est unitairement conjugué à l'opérateur $S(\mu_x)$, c'est-à-dire l'opérateur qui associe à $f(z)$ la fonction $zf(z)$ sur $L^2(\mu_x)$. Si le support de la mesure μ_x était un singleton, i.e. μ_x est une masse de Dirac, alors $L^2(\mu_x)$ serait de dimension 1. Considérons alors λ_1 et λ_2 deux nombres distincts du support de μ_x, fixons aussi $\epsilon > 0$ de sorte que les boules ouvertes $B_o(\lambda_1,\epsilon)$ et $B_o(\lambda_2,\epsilon)$ soient disjointes. Le sous-espace constitué des fonctions $f \in L^2(\mu_x)$ à support dans la boule $B_o(\lambda_1,\epsilon)$ est un sous-espace fermé non trivial stable par $S(\mu_x)$ et $S(\mu_x)^\star$. Signalons que ce problème ouvert en toute généralité à l'heure actuelle, étant donné un opérateur borné $T \in \mathcal{L}(H)$ avec $\dim H = \infty$, on ne sait pas si T admet ou non un sous-espace fermé stable non trivial.

2.4 Décomposition orthogonale en sous-espaces cycliques

Faisons une remarque qui va nous servir dans la démonstration de la proposition suivante. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur normal et si x et y sont deux vecteurs vérifiant $[x]_T \perp y$, alors on a aussi $[x]_T \perp [y]_T$. En effet, pour tout $P, Q \in \mathbb{C}[X,Y]$, on a

$$(P(T,T^\star)x|Q(T,T^\star)y) = ((Q(T,T^\star))^\star \circ P(T,T^\star)x|y) = (\widehat{Q}P(T,T^\star)x|y) = 0$$

où $\widehat{Q}$ est le polynôme défini par

$$Q(X,Y) = \sum_{n,m} a_{n,m} X^n Y^m \Rightarrow \widehat{Q}(X,Y) = \sum_{n,m} \overline{a_{n,m}} Y^n X^m$$

On en arrive au

Théorème 2.4.1. Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et D_0 un sous-ensemble au plus dénombrable (éventuellement vide) de H tel que tous $x \neq y \in D_0$ vérifient $[x]_T \perp [y]_T$. Il existe un sous-ensemble $D \subset H$ vérifiant les propriétés

a) D est au plus dénombrable (fini ou dénombrable)

b) D contient D_0

c) pour tous $x \neq y \in D$ on a $[x]_T \perp [y]_T$

d) la somme directe orthogonale $\bigoplus_{x\in D}[x]_T$ est égale à tout H

Preuve. On remarque que T et $T^\star$ laissent stable les sous-espaces $[x]_T$ lorsque $x \in D_0$. Si bien que T et $T^\star$ laisse stable l'orthogonal H_0 de la somme directe $\bigoplus_{x\in D}[x]_T$. Si H_0 est trivial, $D = D_0$ convient. On suppose donc le contraire. Il s'agit de décomposer H_0 en une somme directe orthogonale de sous-espaces cycliques. Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une partie dense de H_0. On va construire par récurrence sur $n \geq 1$ une suite (x_n) à valeurs dans H_0 vérifiant les propriétés

1) les sous-espaces $[x_1]_T, \ldots, [x_n]_T$ sont en somme directe orthogonale

2) $\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad e_k \in [x_1]_T \oplus \cdots \oplus [x_n]_T$

Pour $n = 1$, le choix $x_1 = e_1$ répond aux attentes. On suppose donc construits $x_1, \ldots, x_n \in H_0$. Par projection orthogonale du vecteur e_{n+1}, il existe $x_{n+1} \in H_0$ tel que x_{n+1} soit orthogonal au sous-espaces $[x_1]_T, \ldots, [x_n]_T$ et que $x_{n+1} - e_{n+1}$ appartienne à $[x_1]_T \oplus \cdots \oplus [x_n]_T$. On en déduit que les sous-espaces $[x_1]_T, \cdots, [x_{n+1}]_T$ sont orthogonaux (voir la remarque précédent l'énoncé de la proposition) et que e_{n+1} appartient à leur somme directe. Notre récurrence est prouvée. Finalement, $\bigoplus_{n\geq 1}[x_n]_T$ est un sous-espace fermé de H_0 contenant les vecteurs $(e_n)_{n\geq 1}$, si bien que $\bigoplus_{n\geq 1}[x_n]_T = H_0$. On conclut que $D = D_0 \cup \{x_n, n \geq 1\}$ convient.

□

On aurait pu invoquer le lemme de Zorn pour traiter cette démonstration mais, comme souvent en analyse, le caractère séparable des espaces en jeu permet de s'en passer.

Ce théorème est important, il explique que la compréhension d'un opérateur normal se résume à celle des opérateurs $S(\mu_n)$.

Exercices

1) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, montrer qu'il existe

   - un espace mesuré $(X, \mathcal{F})$
   - une mesure positive ν sur $(X, \mathcal{F})$
   - une fonction $m \in L^\infty(X, \mu)$

   tels que T soit unitairement conjugué à l'opérateur $f \mapsto mf$ de $L^2(\nu)$.

3 Annexe

Quelques démonstrations oubliées :

Proposition 1.1.6. Soit a un élément d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach A, on a $r(a) = \lim_{n \to +\infty} ||a^n||^{1/n}$.

PREUVE. On peut supposer que $a \neq 0$. Comme $A^\star$ est ouvert, il en est de même de $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, e - za \in A^\star\}$. Soit ϕ une forme linéaire continue sur A et considérons la fonction $f : z \in \Omega \mapsto \phi\left(\frac{1}{e-za}\right)$, cette dernière est holomorphe sur Ω. Le disque ouvert centré en l'origine de rayon $1/||a||$ appartenant à Ω et A étant complète, on peut développer f en série entière pour $|z| < 1/||a||$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \phi(a^n)$$

La théorie des fonctions holomorphes explique que le rayon de convergence de la série entière est exactement $\sup\{r > 0, B_o(O,r) \subset \Omega\}$. Faisons alors les remarques suivantes :

$$\begin{aligned} B_o(O,r) \subset \Omega \quad & \Leftrightarrow \quad \Omega^c \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| > r\} \\ & \Leftrightarrow \quad \{z \in \mathbb{C}^\star, 1/z \in \mathrm{sp}(a)\} \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| > r\} \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{sp}(a)\backslash\{0\} \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1/r\} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le rayon de convergence recherchée est $1/r(a)$. Cela signifie que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1/r(a)$ la suite de terme général $z^n\phi(a^n) = \phi((za)^n)$ est bornée. D'après le théorème de Banach-Steinhauss, cela implique que la suite de terme général $(za)^n$ est bornée dans A. Ainsi, pour tout $z \neq 0$ vérifiant $|z| < 1/r(a)$, il existe une constante $C(z) > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\begin{aligned} |z|^n ||a^n|| & \leq C(z) \\ |z| ||a^n||^{1/n} & \leq C(z)^{1/n} \\ \overline{\lim} ||a^n||^{1/n} & \leq |z|^{-1} \\ \overline{\lim} ||a^n||^{1/n} & \leq r(a) \end{aligned}$$

Par ailleurs, le lemme 3.0.2 ci-après justifie que l'on a $r(a) = r(a^n)^{1/n} \leq ||a^n||^{1/n}$, ce qui permet de conclure par

$$\overline{\lim} ||a^n||^{1/n} \leq r(a) \leq \underline{\lim} ||a^n||^{1/n}$$

□

Lemme 3.0.2. Soit a un élément d'une $\mathbb{C}$-algèbre normée A, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a

$$\mathrm{sp}(a^n) = \{\lambda^n, \lambda \in \mathrm{sp}(a)\}$$

PREUVE. Notons E le second membre. Soient $\mu \in \mathrm{sp}(a^n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses racines n-ièmes de sorte que

$$a^n - \mu e = \prod_{k=1}^{n} (a - \lambda_k e)$$

Il existe k tel que $a - \lambda_k e$ ne soit pas inversible. Donc μ appartient à E.

Réciproquement, soit $\mu \in E$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = \lambda^n$ et $a - \lambda e$ ne soit pas inversible. Les n éléments $a - \lambda e^{2ik\pi/n} e$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ commutent deux à deux et leur produit est $a^n - \mu e$. Si ce dernier était inversible, alors on construirait aisément l'inverse de $a - \lambda e$, ce qui est contradictoire. Donc $\mu \in \mathrm{sp}(a^n)$. □

Bibliographie

[Die] Jean Dieudonné. *Eléments d'analyse Tome 2*. Direction Gaston Julia.

[HL] Francis Hirsh and Gilles Lacombe. *Éléments d'analyse fonctionnelle*.

[Rud] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*.