UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

**ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DES MATHÉMATIQUES**

Année : 2010 N° B.U. :

# ETUDE DYNAMIQUE DE QUELQUES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES HAMILTONIENNES NON LINEAIRES A POTENTIEL CONFINANT

**Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes**

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Equations aux dérivées partielles

*Présentée et soutenue publiquement par*

**RAFIK IMEKRAZ**

*le 8 octobre 2010, devant le jury ci-dessous*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Président du jury* | : | Didier Robert | Professeur émérite (Université de Nantes) |
| *Rapporteurs* | : | Walter Craig | Professeur (Université of Hamilton, Canada) |
| | | Nikolay Tzvetkov | Professeur (Univeristé de Cergy-Pontoise) |
| *Examinateurs* | : | Jean-Marc Delort | Professeur (Université de Paris XIII) |
| | | Eric Paturel | Maître de conférences (Université de Nantes) |
| | | Wei-Min Wang | Directrice de recherche (CNRS) |
| *Directeur de thèse* | : | Benoît Grébert | Professeur (Université de Nantes) |
| *Laboratoire* | : | Laboratoire Jean Leray(UMR 6629 UN-CNRS-ECN) | |

N° E.D. : 503-100

# Table des matières

## Remerciements

Je remercie mon directeur Benoît Grébert de m'avoir encadré durant les trois dernières années. Mon directeur a su à la fois me donner toute la liberté dont j'avais besoin pour travailler et me réorienter lorsqu'il le fallait.

Je remercie Eric Paturel. Il n'est pas officiellement mon codirecteur, mais force est de constater qu'il s'est comporté comme tel.

Je suis extrêmement reconnaissant envers Benoît et Eric pour tout le travail accompli.

Je remercie Didier Robert pour son soutien. Ses discussions mathématiques ont toujours été enrichissantes. La porte de son bureau est toujours ouverte à quiconque veut parler.

Je remercie chaleureusement Walter Craig et Nikolay Tzvetkov d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je remercie aussi Jean-Marc Delort et Wei-Min Wang d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie Laurent Thomann de m'avoir donné beaucoup de conseils. Ce fut agréable de parler à une personne à la fois proche des doctorants et des enseignants-chercheurs.

Je remercie Xavier Saint-Raymond pour sa constante bonne humeur (et aussi pour les inégalités de Gagliardo-Nirenberg !).

En fait, je remercie tous les membres de l'équipe Analyse du laboratoire Jean Leray, en particulier Gueorgui Popov et Abderemane Morame.

Je remercie les membres du laboratoire Jean Leray et du département de mathématiques.

Je remercie François Jauberteau et François Sauvageot pour toutes les discussions que l'on a eues.

Je remercie Saïd d'avoir débloqué tellement de fois mon ordinateur de bureau.

Je remercie Friedrich Wageman que je croisais régulièrement quand j'allais questionner Eric. Friedrich m'a toujours encouragé durant les trois dernières années.

Je remercie François Laudenbach de m'avoir donné des conseils pendant les exposés du séminaire des apprentis.

Je remercie Christophe Berthon pour les discussions après 19h au laboratoire.

Je remercie Colette Boulard, Annick Egurbide, Claude Jouault et Brigitte Joubert pour leur disponibilité et leur efficacité.

Je remercie Julien Royer avec qui j'ai passé trois années à combattre des inégalités farouches sur deux fronts (d'onde ?) différents. Qui de nous deux a utilisé le plus de fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

Je remercie Anne de m'avoir appris l'existence de la « Full Contact Homology ».

Je remercie Carl de m'avoir convaincu qu'il est possible de ne pas trouver de contradiction dans les mathématiques.

Je remercie le bureau 21, entité politique indivisible qui a vocation à fournir des blagues, des chansons et des gâteaux à tout visiteur.

Je remercie tous les Nicolas.

Je remercie Carlos et n'oublie pas ma promesse concernant l'Espagne.

Je remercie Baptiste pour l'histoire prémonitoire de la Belgique.

Je remercie Alexandre de ne pas oublier de qui il tient son prénom.

Je remercie Céline de m'avoir fait découvrir le Havana.

Je remercie Alexandre de Céline d'avoir un siège avec chauffage et wifi intégrés.

Je remercie Simon et Hermann d'avoir supporté mes blagues sur leurs prénoms.

Je remercie Ronan avec qui j'ai partagé le stress de la date limite pour rendre la thèse.

Je remercie aussi Ethan qui m'a appris l'existence de laboratoires où la thèse est défendue par le directeur de thèse !

Je remercie Andrew pour sa sympathie australienne et son attitude brésilienne.

Je remercie Aurélie de m'avoir fait découvrir la pâte alsacienne Spätzle.

Je remercie Marie et François pour toutes les soirées organisées. En particulier François m'a prouvé qu'il est plus rapide d'utiliser son téléphone pour savoir dans quel bar nous nous situons plutôt que de demander au barman. La légende assure même que François peut utiliser Matlab sur son téléphone.

Je remercie mon professeur de Mathématiques Spéciales Marc Bayart. Grâce à son énergie inépuisable, il a transmis à ses élèves un ensemble incroyable de connaissances baptisé programme $\overline{P}$, i.e. l'adhérence du programme officiel $P$.

Je remercie la Revue de la Filière Mathématiques RMS notamment pour la rubrique *questions/réponses*.

Je remercie l'École Normale Supérieure de Cachan d'avoir contribué à ma formation mathématique.

Je remercie Frédérique et Laetitia de m'avoir hébergé tant de fois.

Je remercie Gabriel de m'avoir appris que je pouvais aussi l'appeler Virgile.

Je remercie Fabrice de débattre avec moi.

Je remercie Antoine d'être comme il est. Est bien triste celui qui n'a pas un Antoine dans son voisinage.

Je remercie Guillaume d'avoir partagé avec moi tant d'exercices et de fous rires.

Je remercie Ayman de m'avoir fait découvrir l'autocuiseur. En outre, je le remercie pour le magnifique slogan « *holomorphe un jour, holomorphe toujours* ».

Je remercie Dominique d'écouter attentivement mes exercices. Je ne remercie pas Dominique quand il résout mes exercices par application du théorème de Baire à je ne sais quel espace complet. Je remercie Dominique de m'avoir fait découvrir ses biscuits au chocolat dont le nom a un anagramme évident.

Je remercie Martin d'avoir le pouvoir de se déplacer sans se faire remarquer. Je le soupçonne d'être un agent secret.

Je remercie Sylvain de m'avoir rendu tant de services que même l'axiome du choix ne me permettrait pas d'en écrire un.

Je remercie Marc pour l'organisation des campings espagnols.

Je remercie Christophe Boumbous pour sa vision fiscale.

Je remercie Julie de ne jamais oublier un anniversaire.

Je remercie aussi mes amis d'enfance, à savoir Farid (qui m'a fait découvrir Marvin Gaye), Karim, Samir (H et Oui-Oui), Riad et Ahmed.

Je remercie Chafik pour son soutien et Narimène d'avoir un nom unique.

Je remercie l'École.

Je remercie la France.

Je remercie mes parents.

Je remercie Kristell sans qui tout cela n'aurait pas de sens.

# Chapitre 1

# Introduction

## 1.1 Présentation des problèmes

L'objet de la thèse est d'étudier le comportement dynamique de solutions régulières de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires de type Schrödinger :

$$\left\{\begin{array}{rcl} i\partial_t\psi(t,x) & = & (-\Delta+V)\psi(t,x)+G(\psi(x,t)) \\ (t,x) & \in & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \end{array}\right. \tag{1.1}$$

où

i) $\psi$ est à valeurs complexes

ii) $\Delta = \sum \partial_{x_i}^2$ est l'opérateur Laplacien spatial

iii) $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ est polynomiale positive confinante, c'est-à-dire $\lim\limits_{\infty} V(x) = +\infty$

iv) $G$ est la partie non linéaire

Les équations de Schrödinger interviennent naturellement dans plusieurs domaines. Par exemple, en mécanique quantique $\psi$ représente une fonction d'onde qui décrit l'évolution d'une particule au cours du temps $t$, ou encore dans la théorie des propagations des faisceaux lasers ($t$ est alors un paramètre spatial), voir [SS99].

La non linéarité $G$ n'est pas quelconque, on la choisit de sorte que l'EDP (1.1) admette une « énergie conservée », typiquement si $G$ peut se mettre sous la forme

$$\forall z\in\mathbb{C} \qquad G(z)=\partial_2 g(z,\overline{z})$$

On constate alors, au moins formellement, que la quantité suivante est conservée au cours du temps

$$\int_{\mathbb{R}} ||\nabla\psi||^2 + |\psi\sqrt{V}|^2 + g(\psi,\overline{\psi})dx \tag{1.2}$$

La quantité précédente est appelée hamiltonien de (1.1). Signalons que dans la littérature (par exemple [BS]) l'opérateur différentiel $-\Delta+V$ est parfois aussi appelé hamiltonien.

Nous serons intéressés par des questions de stabilité de l'EDP lorsque la condition initiale $\psi(0,\cdot)$ est petite et régulière. Pour définir cette petitesse et cette régularité, on définit une famille décroissante $(\widehat{H}^s)_{s\geq 0}$ d'espaces fonctionnels hilbertiens sur $\mathbb{R}^d$ appelés espaces de Sobolev basés sur $-\Delta+V$ :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{H}^s(\mathbb{R}^d) & := & \mathrm{Dom}((-\Delta+V)^{s/2}) \\ & = & \{f\in L^2(\mathbb{R}^d), \quad ||f||_{\widehat{H}^s} := ||V^{s/2}f||_{L^2}+||f||_{H^s}<\infty\} \end{array}$$

Plus le réel $s$ est grand et plus une fonction de l'espace $\widehat{H}^s$ est régulière. On considère l'EDP (1.1) avec une condition initiale $\psi_0$ vivant dans l'espace $\widehat{H}^s$ et l'on se pose alors les questions suivantes

1) a-t-on existence locale ?
2) le temps d'existence est-il suffisamment long pourvu que $||\psi(0,\cdot)||_{\widehat{H}^s}$ est petite ?
3) peut-on contrôler les normes $||\psi(t,x)||_{\widehat{H}^s}$ sur le temps d'existence ?

La structure hamiltonienne est fondamentale, nous allons voir plus loin que cela permet d'utiliser des méthodes itératives (par le biais des formes normales de Birkhoff) pour augmenter le temps d'existence et répondre à la troisième question.

En fait, l'existence locale est très simple, elle découle d'une reformulation intégrale de Duhamel et d'un théorème de point fixe.

En ce qui concerne les points 2) et 3), la réponse est connue lorsque la régularité est $s = 1$, pour certains potentiels et certaines non linéarités. L'équation de Gross-Pitaevski

$$i\psi_t = (-\Delta + ||x||^2)\psi + \lambda|\psi|^{p-1}\psi$$

a déjà été étudiée. Lorsque la condition initiale $\psi(0,\cdot)$ vit dans $\widehat{H}^1$ et si $\lambda > 0$ (cas défocalisant), on sait qu'il y a existence globale (voir [Car02] et [Zha05] pour des résultats plus précis).

Dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$, la notion suivante de stabilité a été étudiée : l'EDP (1.1) est stable si pour tous $\psi(0,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ et $\epsilon \in ]0,1[$ il existe $R > 0$ tel que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} ||\psi(t,\cdot)||_{L^2([-R,R])} \geq (1-\epsilon)||\psi(0,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}$$

Cette notion est liée à la nature discrète du spectre de l'hamiltonien de Floquet associé. Ainsi, les EDPs de Schrödinger non-linéaires associées à l'oscillateur harmonique $(-\Delta+x^2)$ et au modèle de Duffing $(-\Delta + x^4)$ ont été traitées respectivement par Wang ([WM08]) et Liu-Yuan ([LY10]).

Concernant les grandes régularités $s \geq 1$, Jean Bourgain [Bou96b] a obtenu un résultat intéressant sur l'EDP suivante

$$i\partial_t\psi = -\Delta\psi + \lambda|\psi|^{p-1}\psi$$

Dans le cas sous-critique, si $||\psi(t,\cdot)||_{H^1}$ est bornée pour $t \in \mathbb{R}$ et enfin si $\psi(0,\cdot) \in H^s(\mathbb{R})$, alors il y a solution globale dans $H^s(\mathbb{R})$ et l'on a même

$$\exists A > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad ||\psi(t,\cdot)||_{H^s(\mathbb{R})} \leq (1+|t|)^{A(s-1)}$$

Dans notre démarche, ce sont aussi les grandes régularités qui nous importent. Bien que les formes normales de Birkhoff existent depuis longtemps dans la théorie des systèmes hamiltoniens de dimension finie, leur utilisation en dimension infinie et précisément dans des équations aux dérivées partielles est récente ([Bou96a],[KP96] et [Bam03]). Les problèmes de stabilité qui nous intéressent peuvent se résumer ainsi : lorsque la condition initiale est petite et vit dans des espaces de Sobolev à grande régularité alors on dispose d'une solution qui non seulement est définie sur un temps relativement long mais en outre reste près d'un tore de dimension infinie (voir la propriété (S) plus loin pour un énoncé précis). L'article ≪ fondateur ≫de l'usage des formes normales de Birkhoff à tout ordre est [BG06], ce dernier propose un modèle applicable aux équations de Schrödinger (NLS) et des ondes (NLW) sur le cercle. L'article [BG04] traite de NLS sur $\mathbb{T}^d$ pour tout $d \geq 1$ :

$$-i\partial_t u = -\Delta u + V \star u + g(u,\overline{u})$$

Ce dernier semble être le premier à traiter toute dimension $d \geq 1$ et pour des potentiels typiques par des méthodes de formes normales de Birkhoff. Ici le symbole $\star$ désigne la convolution, rappelons que la transformée de Fourier transporte l'opération de convolution sur l'opération de multiplication. Dans la même veine, l'article [BDGS07] traite de l'équation de Klein-Gordon sur les variétés de Zoll (typiquement des sphères, nous y reviendrons plus loin). Dans [Bam08] et [Gré07], on trouve une formalisation qui permet d'utiliser les formes normales de Birkhoff : à savoir l'usage de classes adéquates de polynômes et l'importance de la localisation des modes propres.

Signalons enfin que très récemment, Faou et Grébert ont entamé une approche numérique des formes normales de Birkhoff ([FPG10a],[FPG10b]).

Écrivons un mot sur les résonances. La présence de résonances dans l'EDP (1.1) signifie pour être bref que les combinaisons linéaires entières des valeurs propres de la partie linéaire peuvent s'approcher dangereusement de 0. Il s'agit d'un analogue en dimension infinie de la notion de vecteurs non diophantiens. Pour nous ramener à une situation de non-résonance, nous allons ajouter une perturbation « typique »à l'EDP initiale.

## 1.2 Résultats de la thèse

Considérons l'EDP suivante avec l'inconnue $\psi(t,x)$ où $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\partial_t \psi & = & (-\Delta + V + M)\psi + \partial_2 g(\psi, \overline{\psi}) \\ \psi(0,\cdot) & \in & \widehat{H}^s(\mathbb{R}^d) \end{array} \right. \tag{1.3}$$

avec les notations suivantes

i) $V$ est un potentiel polynomial positif confinant, i.e. $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$

ii) $M : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur « typique »(en un sens à préciser), autoadjoint, compact et simultanément diagonalisable avec $-\Delta + V$

iii) $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ est holomorphe au voisinage de 0, admet $(0,0)$ comme zéro d'ordre $\geq 3$ et vérifie $g(a,\overline{a}) \in \mathbb{R}$

L'opérateur $-\Delta + V$ est autoadjoint à résolvante compacte (car $V$ est confinant), on peut donc le diagonaliser sur une base hilbertienne $(\phi_j)_{j\geq 1}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ :

$$(-\Delta + V)\phi_j = \lambda_j \phi_j, \qquad \lambda_j \leq \lambda_{j+1}$$

En outre, la positivité de $V$ assure en fait que $\lambda_1 > 0$. Ainsi, on a l'équivalence

$$f = \sum_{j\geq 1} z_j \phi_j \in \widehat{H}^s \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{j\geq 1} \lambda_j^s |z_j|^2 < \infty$$

Avec ces notations, l'opérateur $M$ est entièrement défini par une suite réelle $(m_j)_{j\geq 1}$ qui converge vers 0 et telle que

$$M\phi_j = m_j \phi_j$$

Nous préciserons plus loin la classe d'opérateurs $M$. En fait $M$ parcourt un ensemble assez grand d'opérateurs mais nous ne savons pas en général si le cas $M = 0$ est accessible.

Les deux principaux résultats de la thèse sont résumés par les théorèmes 1.2.1 et 1.2.2. Le premier est un travail en collaboration avec Benoît Grébert et Eric Paturel et a fait l'objet d'un article publié [GIP09]. Nous nous intéressons à la propriété (S) de stabilité suivante

**Propriété (S)** *Pour $M$ typique et pour tous $r \geq 3$, il existe $s_0(r), \epsilon_0(r), C(r) > 0$ tel que pour $s \geq s_0$ si la condition initiale de (1.3) vérifie $\epsilon := ||\psi(0,\cdot)||_s < \epsilon_0$ alors (1.3) admet une unique solution*

$$\psi(t,x) = \sum_{j\geq 1} z_j(t)\phi_j(x)$$

*dans l'espace $\mathcal{C}^0([-C(r)\epsilon^{-r}, C(r)\epsilon^{-r}], \widehat{H}^s)$. En outre, on a les estimations*

$$\begin{aligned} \sup_{|t|\leq\epsilon^{-r}} ||\psi(t,\cdot)||_{\widehat{H}^s} &\leq 2\epsilon \\ \sup_{|t|\leq\epsilon^{-r}} \sum_{k\geq 1} \lambda_k^{\star s}|J_k(t) - J_k(0)| &\leq C\epsilon^3 \end{aligned}$$

en convenant que $(\lambda_k^\star)$ est la suite strictement croissante des valeurs propres sans répétition de $-\Delta + V$ et $J_k(t) = \sum_j |z_j(t)|^2$ où $j$ parcourt l'ensemble fini des entiers vérifiant $(-\Delta + V)\phi_j = \lambda_k^\star \phi_j$.

Énonçons à présent les deux résultats de la thèse

**Théorème 1.2.1.** *L'EDP (1.3) vérifie la propriété (S) pour $V(x) = \sum_{i=1}^d x_i^2$.*

**Théorème 1.2.2.** *L'EDP (1.3) vérifie la propriété (S) pour $d = 1$ et pour tout polynôme $V \geq 0$ de degré pair $\geq 2$.*

Dans cette introduction, on conviendra par pure commodité que $d = 1$. On sait que les valeurs propres sont simples ([BS]), si bien que $\lambda_j^\star = \lambda_j$. La dernière inégalité de la propriété (S) devient alors

$$\sup_{|t|\leq\epsilon^{-r}} \sum_{j\geq 1} \lambda_j^s ||z_j(t)|^2 - |z_j(0)|^2| \leq C\epsilon^3$$

La propriété (S) signifie que lorsque la condition initiale est régulière et petite alors sur un temps relativement long l'EDP (1.3) admet une solution de norme contrôlée et qu'elle présente peu d'échange d'énergie entre les différents modes $(\phi_j)$. Autrement dit, $\psi(t,x)$ reste près du tore suivant de dimension infinie

$$\left\{ \sum_{j\geq 1} \xi_j\phi_j, \qquad (\xi_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^\star}, \quad |\xi_j|^2 = |z_j(0)|^2 \right\}$$

En ce qui concerne le temps d'existence, la propriété (S) est à rapprocher de la notion d'existence « presque globale »au sens de Klainerman ([Kla83]).

Remarquons que l'on ne fait aucune hypothèse de signe sur la perturbation, aussi on englobe le cas focalisant et défocalisant pour la perturbation $\pm|\psi|^p\psi$.

L'étude de la propriété (S) a déjà été abordée pour d'autres équations avec des méthodes de formes normales. Par exemple, [BDGS07] traite l'équation de Klein-Gordon sur une variété de Zoll $M$ (c'est-à-dire une variété riemannienne compacte dont toutes les géodésiques ont la même longueur, par exemple une sphère)

$$(\partial_t^2 - \Delta + V + m)v = -\partial_2 f(x,v)$$

Un analogue de la propriété (S) est valide dans les espaces de Soblev $H^s(M)$ et pour presque tout paramètre $m > 0$. L'intérêt des variétés de Zoll est que le spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami est bien localisé. La propriété (S) est aussi connue pour l'équation des ondes non linéaire sur $\mathbb{T}^d$ ([BG04]). Un cadre commun dans [BG06] permet de considérer l'équation des ondes uni-dimensionnelle et l'équation de Schrödinger non linéaire sur le cercle.

Les théorèmes 1.2.1 et 1.2.2 apportent une réponse dans le cas d'une variété non compacte, à savoir $\mathbb{R}^d$. L'intérêt du potentiel confinant $V$ est de rendre discret le spectre de la partie linéaire.

Comme nous allons le voir plus loin, la compréhension du spectre et des modes propres de la partie linéaire jouent un rôle fondamental.

## 1.3 Forme hamiltonienne discrète

On va mettre l'EDP 1.3 sous forme hamiltonienne. Pour cela on se place dans l'espace de phase $\widehat{H}^s \times \widehat{H}^s$. On commence par désolidariser la fonction $\psi$ de sa conjuguée $\overline{\psi}$ en posant

$$\psi_1 = \psi, \qquad \psi_2 = \overline{\psi}$$

Ainsi, on transforme l'EDP initiale en la paire suivante d'équations :

$$\begin{cases} i\partial_t \psi_1 &= (-\Delta + V + M)\psi_1 + \partial_2 g(\psi_1, \psi_2) \\ -i\partial_t \psi_2 &= (-\Delta + V + M)\psi_2 + \overline{\partial_2 g(\psi_1, \psi_2)} \end{cases} \tag{1.4}$$

Nous allons résoudre cette EDP avec la condition initiale $\psi_1(0, \cdot) = \overline{\psi_2(0, \cdot)}$. Comme les deux équations précédentes sont conjuguées l'une de l'autre, on aura l'égalité suivante sur tout le temps d'existence

$$\forall t \qquad \psi_1(t, \cdot) = \overline{\psi_2(t, \cdot)} \tag{1.5}$$

L'holomorphie de $g$ et la propriété « $\forall a \in \mathbb{C} \quad g(a, \overline{a}) \in \mathbb{R}$ »prouve que le système précédent se ramène en fait à

$$\begin{cases} i\partial_t \psi_1 &= (-\Delta + V + M)\psi_1 + \partial_2 g(\psi_1, \psi_2) \\ -i\partial_t \psi_2 &= (-\Delta + V + M)\psi_2 + \partial_1 g(\psi_1, \psi_2)) \end{cases} \tag{1.6}$$

L'idée de base est de transférer ces deux équations sur les modes propres. Autrement dit, on pose

$$\psi_1(t, x) = \sum_{j \geq 1} z_j(t)\phi_j(x), \qquad \psi_2(t, x) = \sum_{j \geq 1} z_{-j}(t)\phi_j(x)$$

Rappelons que les modes propres $\phi_j$ peuvent être choisis à valeurs réelles, si bien que l'on remarque qu'au temps $t = 0$ la propriété de conjugaison (1.5) s'exprime

$$\forall j, t \qquad z_{-j}(t) = \overline{z_j}(t) \tag{1.7}$$

On est ramené au système suivant

$$\forall j \geq 1 \quad \begin{cases} iz_j'(t) &= (\lambda_j + m_j)z_j(t) + \partial_2 g(\psi_1, \psi_2) \\ -iz_{-j}'(t) &= (\lambda_j + m_j)z_{-j}(t) + \partial_1 g(\psi_1, \psi_2) \end{cases} \tag{1.8}$$

Introduisons maintenant l'espace « discret de Sobolev » :

$$\ell_s(\mathbb{Z}^\star) = \left\{ (z_j)_{j\in\mathbb{Z}^\star}, \quad ||z||_s^2 := \sum_j \lambda_j^s |z_j|^2 < \infty \right\}$$

Cet espace est symplectique pour la forme suivante, dont la définition ne pose pas de problème de convergence car $s > 0$ :

$$\omega(z,\xi) = \sum_{j\geq 1} z_j \xi_{-j} - z_{-j}\xi_j$$

On a l'équivalence

$$z \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \quad \Leftrightarrow \quad (\psi_1,\psi_2) \in \widehat{H}^s \times \widehat{H}^s$$

On définit maintenant l'hamiltonien libre $H_0$ et la perturbation $P$ pour tout $z \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ :

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \sum_{j\geq 1} (\lambda_j + m_j) z_j z_{-j} \\ P(z) &= \int_{\mathbb{R}} g\left( \sum_{j\geq 1} z_j \phi_j(x), \sum_{j\geq 1} z_{-j}\phi_j(x) \right) dx \end{aligned}$$

On peut prouver que $H_0$ et $P$ sont bien des fonctions régulières de $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ dans $\mathbb{C}$ pour $s$ grand. En ce qui concerne $H_0$ : $\lambda_j$ est à croissance polynomiale d'après la formule de Weyl ([RS], théorème XIII.81), et bien sûr $m_j$ tend vers 0. En ce qui concerne $P$, cela découle de l'holomorphie de $g$ et de l'inclusion $L^1(\mathbb{R}^d) \subset \widehat{H}^s$ pour $s$ grand (voir la partie 3.4). Le système devient alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} iz_j'(t) &=& \partial_{z_{-j}}(H_0 + P) \\ -iz_{-j}'(t) &=& \partial_{z_j}(H_0 + P) \end{array} \right.$$

Définissons alors le gradient symplectique $X_f(z)$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ comme étant l'unique vecteur qui vérifie

$$\forall z, h \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \qquad \omega(X_f(z), h) = Df(z)(h)$$

où $Df(z)$ est la différentielle de $f$ en $z$. Autrement dit

$$X_f = \left( \left( -\frac{\partial f}{\partial z_{-j}} \right)_{j\leq -1}, \left( \frac{\partial f}{\partial z_{-j}} \right)_{j\geq 1} \right) \in \ell_{-s}(\mathbb{Z}^\star)$$

La forme hamiltonienne de notre équation aux dérivées partielles apparaît enfin

$$z'(t) = iX_{H_0+P}(z(t)) \tag{1.9}$$

On notera la conservation de l'énergie

$$\frac{d}{dt}(H_0 + P)(z(t)) = 0$$

L'existence locale de notre équation initiale sera conséquence de deux faits cruciaux :

i) le flot de $H_0$ est un groupe unitaire de l'espace $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$

ii) le gradient symplectique de $P$ vit dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$

Le point i) est clair. On résout (1.8) avec $P = g = 0$ pour se rendre compte que $\exp(itH_0)$ agit de la sorte :

$$z(t) = \exp(itH_0)z(0) = \left(\left(e^{it(\lambda_{-j}+m_{-j})}z_j(0)\right)_{j<0}, \left(e^{-it(\lambda_j+m_j)}z_j(0)\right)_{j>0}\right)$$

On remarquera que le gradient symplectique $X_{H_0}$ est a priori à valeurs dans $\ell_{-s}(\mathbb{Z}^\star)$ et non $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$. Le point ii) se vérifie par calcul et utilise essentiellement que $\widehat{H}^s$ est une algèbre pour $s$ suffisamment grand (voir de nouveau la partie 3.4), ce qui permet un calcul fonctionnel élémentaire holomorphe sur $\widehat{H}^s$, autrement dit de définir $g(\psi_1, \psi_2)$. On voit déjà apparaître une raison pour laquelle on ne peut pas considérer des faibles régularités $s$, mais celle-ci est mineure.

En remarquant que $X_{H_0}$ est une application linéaire (puisque $H_0$ est quadratique), on peut invoquer la formule de Duhamel :

$$z(t) = \exp(itX_{H_0})z(0) + \int_0^t \exp(i(t-t')X_{H_0})iX_P(z(t'))dt'$$

L'existence locale découle d'une application du théorème de point fixe dans l'espace complet suivant pour de bons paramètres $\tau, \epsilon > 0$

$$\mathcal{C}^0([-\tau, \tau], \overline{B}(z(0), \epsilon))$$

On remarquera que même lorsque $P = 0$, la partie $t \mapsto \exp(itX_{H_0})z(0)$ qui provient de la linéarité n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$.

## 1.4 Formes normales de Birkhoff

On a défini le gradient symplectique d'une fonction, on peut aussi définir le crochet de Poisson de deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}^1(\ell_s(\mathbb{Z}^\star), \mathbb{C})$ :

$$\{f, g\}(z) = i\sum_{j\geq 1} \frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial g}{\partial z_{-j}} - \frac{\partial f}{\partial z_{-j}}\frac{\partial g}{\partial z_j}$$

Le crochet de Poisson n'est pas toujours défini car $X_f$ et $X_g$ vivent dans $\ell_{-s}(\mathbb{Z}^\star)$ ! ! Mais il est bien défini lorsque par exemple $X_f$ ou $X_g$ vit dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$. L'intérêt du crochet de Poisson apparaît dans la formule suivante :

$$\frac{d}{dt}f(z(t)) = -i\{H_0 + P, f\}(z(t))$$

lorsque $z$ est la solution de (1.9).

Lorsque $P = 0$, on voit que les fonctions $f$ dont les crochet de poisson avec $H_0$ est nul sont constantes le long des trajectoires $(z(t))$. On définit alors les actions :

$$\forall j \geq 1 \quad \forall z \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \qquad I_j(z) = z_j z_{-j}$$

On vérifie que $\{I_j, I_{j'}\}$ est toujours nul. Cela n'est pas surprenant puisque $I_j(z(t)) = |z_j(t)|^2$ est constant lorsque $P = 0$. Plus généralement, toute fonction ne dépendant que des actions $I_j$ a un crochet nul avec toutes les $I_j$, et par linéarité avec $H_0$. Introduisons la proposition-définition suivante

**Proposition-Définition 1.4.1.** *Un polynôme régulier $f : \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \to \mathbb{C}$ homogène de degré $2m$ est en forme normale s'il admet une décomposition*

$$f(z) = \sum_{j \in (\mathbb{Z}^\star)^m} a_j I_{j_1} \cdots I_{j_m}$$

*Plus généralement, un polynôme $f$ en forme normale est une somme de polynômes homogènes en forme normale. On a la propriété suivante :*

$$\forall j \geq 1 \qquad \{f, I_j\} = 0$$

*Par conséquent $\{f, H_0\} = 0$.*

L'une des questions dynamiques qui va nous intéresser est donc : lorsque la perturbation $P$ n'est pas nulle, peut-on contrôler les variations des actions $I_j(z(t))$ ?

Le coeur de la preuve des théorèmes 1.2.1 et 1.2.2 est de montrer, sous réserve que $M$ est typique, que l'hamiltonien $H_0 + P$ admet une forme normale de Birkhoff à tout ordre $r \geq 3$. Cela signifie qu'il existe un seuil de régularité $s_0(r) > 0$ et une application $\phi : \ell_{s_0}(\mathbb{Z}^\star) \to \ell_{s_0}(\mathbb{Z}^\star)$ symplectique sur un voisinage de 0 telle que pour $s \geq s_0(r)$

i) $\phi$ est régulière de $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ (remarquons que $\ell_s(\mathbb{Z}^\star) \subset \ell_{s_0}(\mathbb{Z}^\star)$)

ii) $\max(||\phi(z) - z||_s, ||\phi^{-1}(z) - z||_s) \leq C_s ||z||_s^2$

iii) $(H_0 + P) \circ \phi = H_0 + Z + R$

où $Z : \ell_s^{\mathbb{Z}^\star}(\mathbb{Z}^\star) \to \mathbb{C}$ est un polynôme régulier en forme normale, et le reste $R$ vérifie l'estimation

$$||X_R(z)|| \leq C||z||^{r+2}$$

Rappelons qu'une transformation symplectique conserve les crochets de Poisson et les gradients symplectiques. En fait, par construction $\phi$ et $\phi^{-1}$ seront *réelles* en ce sens qu'elles conserveront la conjugaison :

$$\left.\begin{array}{rcl} z & = & \phi(\xi) \\ \forall j \geq 1 \quad z_{-j} & = & \overline{z_j} \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \forall j \geq 1 \quad \xi_{-j} = \overline{\xi_j}$$

Examinons comment la propriété (S) découle de la décomposition $H_0 + Z + R$. Dans un premier temps, on effectue le changement de variables

$$\xi(t) = \phi^{-1}(z(t))$$

Comme $\phi$ est symplectique et que $z$ vérifie l'équation à gradient symplectique

$$z'(t) = iX_{H_0+P}(z(t))$$

la fonction $\xi$ va vérifier l'équation

$$\xi'(t) = iX_{H_0+Z+R}(\xi(t))$$

On se rappellera que la quantité $(H_0 + Z + R)(\xi(t)) = (H_0 + P)(z(t))$ est conservée. L'idée consiste à montrer la propriété (S) pour $\xi(t)$ puis de la vérifier pour $z(t)$ sachant que $\phi$ est « proche de l'identité »en vertu du point ii) précédent. Comme $\phi$ est défini seulement sur un voisinage de $0 \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ nous sommes obligés de considérer une condition initiale $z(0) = \phi(\xi(0))$ très petite. Considérons par exemple $\epsilon_0 = \epsilon_0(s, r)$ tel que $\epsilon := ||\xi(0)||_s \leq \epsilon_0$. Soit $\tau > 0$ le plus grand temps tel que

$$\sup_{t \in [0,\tau]} ||\xi(t)||_s \leq 2\epsilon$$

Ainsi, $||\xi(\tau)||_s = 2\epsilon$. Introduisons maintenant la fonction

$$N(\xi) = ||\xi||_s^2 = \sum_{j\geq 1} \lambda_j^s I_j(\xi(t))$$

Il vient

$$\left|\frac{d}{dt}N(z(t))\right| = |\{N, H_0 + Z + R\}(\xi(t))|$$

Mais puisque $N, Z$ et $H_0$ sont en forme normale, on a $\{N, H_0\} = \{N, Z\} = 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à la définition du crochet de Poisson donne alors

$$\left|\frac{d}{dt}N(\xi(t))\right| = |\{N, R\}(\xi(t))| \leq C||\xi||_s^{r+3} \leq C\epsilon^{r+3}$$

Et donc pour tout temps $t \in [0, \tau]$ on a

$$|N(\xi(t)) - N(\xi(0))| \leq Ct\epsilon^{r+3}$$

En particulier $\tau \geq C\epsilon^{-1-r}$. Mais si l'on se restreint au temps $\epsilon^{-r}$ on a

$$|N(\xi(t)) - N(\xi(0))| \leq C\epsilon^3$$

On montre de même qu'il y a peu d'échanges d'énergie entre les différents modes

$$\sum_{j\geq 1} \lambda_j^s||\xi_j(t)|^2 - |\xi_j(0)|^2| \leq C\epsilon^3$$

Comme $\tau$ est proche de l'identité (propriété ii)), on montre alors que $z(t)$ vérifie les mêmes estimations. Bien entendu, la même démarche est valable pour les temps négatifs.

## 1.5 Les classes de perturbations

Pour montrer l'existence d'une forme normale pour l'hamiltonien $H_0 + P$. On crée un modèle abstrait de classes de perturbations auxquelles appartient $P$ ainsi que suffisamment de polynômes en forme normale. Au vu du développement en série entière de $g$, l'on a

$$P(z) = \sum_{k\geq 3} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \partial_1^\ell \partial_2^{k-\ell} g(0,0) \sum_{j\in(\mathbb{N}^\star)^k} z_{j_1}\cdots z_{j_\ell} z_{-j_{\ell+1}}\cdots z_{-j_k} \int_{\mathbb{R}} \phi_{j_1}(x)\cdots\phi_{j_k}(x)dx \tag{1.10}$$

Il est alors naturel de s'intéresser à des estimations des intégrales-produits des modes propres $\phi_j$ pour créer nos modèles de perturbations. On comprend donc dès maintenant que les données spectrales de la partie linéaire sont très importantes. Dans la partie 1.7, on explique les estimations obtenues et pourquoi l'on n'arrive pas à traiter les deux théorèmes 1.2.1 et 1.2.2 dans un cadre unifié. A l'aide des estimations des intégrales-produits, la démarche scientifique consiste à créer des classes de polynômes $\mathcal{T}_k$ et $\mathcal{T}_k^+$ de degré $k \geq 3$, tels que

i) le $k$-ième polynôme de Taylor de $P$ donné par (1.10) appartient à $\mathcal{T}_k$

ii) $P \in \mathcal{T}_k \quad \Rightarrow \quad ||P(z)||_s \leq C||z||_s^k$ pour $1 \ll s$

iii) $P \in \mathcal{T}_k^+ \quad \Rightarrow \quad ||X_P(z)||_s \leq C||z||_s^{k-1}$ pour $1 \ll s$

iv) $P \in \mathcal{T}_k$ en forme normale $\Rightarrow$ $||X_P(z)||_s \le C||z||_s^{k-1}$ pour $1 \ll s$

v) $(P, Q) \in \mathcal{T}_k \times \mathcal{T}_\ell^+$ $\Rightarrow$ $\{P, Q\} \in \mathcal{T}_{k+\ell-2}$

vi) $P \in \mathcal{T}_k$ $\Rightarrow$ $\exists \chi \in \mathcal{T}_k^+$ $\{H_0, \chi\} + P$ est en forme normale

En fait, il aurait été extrêmement agréable d'avoir $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_k^+$. Une telle situation se produit dans les modèles choisis dans [Gré07],[Bam07] ou encore [BDGS07] (les variétés étudiées y sont compactes). Mais dans notre cas, la classe $\mathcal{T}_k^+$ est strictement incluse dans $\mathcal{T}_k$. Il s'agit d'une des difficultés de notre approche. Les constructions des classes $\mathcal{T}_k^+$ et $\mathcal{T}_k$ sont très techniques et dépendent de propriétés spectrales de la partie linéaire.

On voit aussi apparaître la raison pour laquelle on est contraint d'augmenter la régularité $s$ dans nos démonstrations. Pour chaque polynôme $P$, il existe un $s_0 > 0$ dépendant de $P$ assurant sa régularité dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ avec $s > s_0$. On va voir que l'on manipule toujours un nombre fini de polynômes, si bien que l'on pourra choisir une régularité minimale $s_0$ indépendante des polynômes. Par contre, cette régularité augmente à chaque étape.

Permettons-nous d'expliquer la première étape d'obtention d'une forme normale de Birkhoff dans le cas particulier où la perturbation de l'équation de Schrödinger est cubique.

$$i\partial_t \psi = (-\Delta + V + M)\psi \pm |\psi|^2\psi$$

autrement dit $g(a, \overline{a}) = \pm|a|^4$ et le polynôme $P$ initial appartient à $T_4$ (propriété i)). La forme $H_0 + P$ peut-être vue comme une forme normale de Birkhoff puisque $X_P$ est à valeurs dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ (voir partie 1.3) et qu'il s'agit d'un polynôme de degré 3 :

$$||X_P(z)||_s \le C||z||_s^3$$

On cherche une transformation symplectique $\phi$ tel que

$$(H_0 + P) \circ \phi = H_0 + Z + R$$

où $Z$ est un polynôme de degré 4 en forme normale et où le reste vérifie

$$||X_R(z)||_s \le C||z||_s^4$$

La propriété iv) est cruciale : dans la reformulation intégrale de Duhamel, les perturbations doivent avoir leur gradient à valeurs dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$. Pour cela, on considère $\chi \in T_4^+$ tel que se produise le point vi) et on note $Z = \{H_0, \chi\} + P$. On considère alors le flot symplectique associé à $\chi$ :

$$\forall z \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \qquad \frac{d}{dt}\Phi^t(z) = X_\chi(\Phi^t)(z), \qquad \Phi^0(z) = z$$

Puisque $X_\chi$ est de degré $> 1$, pourvu que $||z||_s \ll 1$ on a

- $\Phi^t(z)$ est défini pour $t \in [0, 1]$
- $\max(||\phi(z) - z||_s, ||z - \phi^{-1}(z)||_s) \le C||z||_s^2$

En outre, et c'est l'intérêt premier du flot symplectique, pour tout $t$ la transformation « canonique »$\Phi^t$ est une transformation symplectique. On pose alors $\phi = \Phi^1$. Il vient alors

$$(H_0 + P) \circ \phi = [H_0 + Z] + [H_0 \circ \phi - \{H_0, \chi\} - H_0] + [P \circ \phi - P]$$

Il s'agit de constater que les deux derniers termes ne font intervenir que des termes de Taylor à partir de l'ordre 5. Traitons le second crochet. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\begin{aligned}
H_0 \circ \Phi^t(z) &= H_0 \circ \Phi^0(z) + t\, \tfrac{d}{dt} H_0 \circ \Phi^t(z)\big|_{t=0} + \int_0^t (1-t') \frac{d^2}{dt'^2} H_0 \circ \Phi^{t'}(z) dt' \\
H_0 \circ \phi(z) &= H_0(z) + \{H_0, \chi\}(z) + \int_0^1 (1-t') \{\{H_0, \chi\}, \chi\} \circ \Phi^{t'}(z) dt' \\
H_0 \circ \phi(z) &= H_0(z) + \{H_0, \chi\}(z) + \int_0^1 (1-t') \{Z - P, \chi\} \circ \Phi^{t'}(z) dt'
\end{aligned}$$

A l'aide du point v), l'on peut prouver que le terme intégral n'apporte des polynômes de Taylor qu'à partir du degré $(2+4-2)+4-2 = 6 \geq 5$.

En effectuant des compositions par d'autres transformations canoniques du même acabit (théorème 2.2.22), on peut montrer que l'on arrive de manière itérative à une forme normale de Birkhoff pour tout ordre $r \geq 3$.

## 1.6 Les opérateurs typiques $M$ et les résonances

Expliquons maintenant pourquoi l'on doit faire intervenir des opérateurs typiques $M$. Dans le point vi) de la partie précédente, l'on doit résoudre l'équation suivante (dite équation homologique) :

$$\{H_0, \chi\} + P = Z$$

où $P \in \mathcal{T}_k$ et $H_0 = \sum_{j\geq 1} (\lambda_j + m_j) I_j$ sont fixés, et $\chi \in \mathcal{T}_k$ est l'inconnue de sorte que $Z \in \mathcal{T}_k$ soit en forme normale. Un calcul montre que le crochet de poisson $\{H_0, \chi\}$ fait intervenir les combinaisons linéaires finies des fréquences $\lambda_j + m_j$. Et l'on sait résoudre l'équation homologique dans l'espace $\mathcal{T}_k$ lorsque l'on arrive à contrôler la distance de ces combinaisons linéaires à 0. Cela nous mène à la définition suivante.

**Définition 1.6.1.** *Une suite $(\omega_j)_{j\geq 1}$ est dite non résonante si pour entier $r \geq 3$ il existe $\gamma(r), \delta(r) > 0$ tels que pour tous entiers $\ell \in ]1, r[$ et $j_1, \cdots, j_r$ on a*

$$|\omega_{j_1} + \cdots + \omega_{j_\ell} - \omega_{j_{\ell+1}} - \cdots - \omega_{j_r}| \geq \frac{1 + \lambda_{j_{1\star}} - \lambda_{j_{2\star}}}{\gamma |j_3^\star|^\delta}$$

*sauf si $\{j_1, \cdots, j_\ell\} = \{j_{\ell+1}, \cdots, j_r\}$ et où l'on a réordonné $(j_1, \cdots, j_r)$ en $(j_1^\star, \cdots, j_r^\star)$ de sorte que*

$$|j_1^\star| \geq \cdots \geq |j_r^\star|$$

Cette définition s'apparente à la notion de vecteurs diophantiens en dimension finie. Comme en dimension finie, sauf cas particulier il semble très difficile de déterminer si une suite est non résonante. Par contre, on a une propriété analogue de mesure totale :

**Proposition 1.6.2.** *On munit $\prod_{j\geq 1} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ de la mesure Lebesgue-produit. Pour tout $k \geq 1$ l'ensemble produit admet un sous-ensemble $F_k$ de mesure totale tel que pour tout $(\alpha_j)_{j\geq 1} \in F_k$ la suite de fréquences $\lambda_j + \frac{\alpha_j}{j^k}$ est non résonante.*

Et l'on posera donc naturellement la définition suivante

**Définition 1.6.3.** *Un opérateur $M : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ est typique s'il se diagonalise selon la base hilbertienne $(\phi_j)_{j\geq 1}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ de sorte que*

$$\exists k \geq 1 \qquad \exists \alpha \in F_k \quad \forall j \geq 1 \qquad M\phi_j = \frac{\alpha_j}{j^k} \phi_j$$

*En particulier $M$ est auto-adjoint, compact et simultanément diagonalisable avec $-\Delta + V$.*

En résumé, si $M$ est typique alors on sait résoudre l'équation homologique et a fortiori construire les formes normales de Birkhoff.

La démonstration de la proposition 1.6.2 est technique et peu transparente (voir annexe 4.1), néanmoins il nous paraît important de signifier qu'elle repose seulement sur des conditions de croissance polynomiale de la suite $(\lambda_j)_{j\geq 1}$, si l'on renumérote $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ de sorte que $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ alors les conditions sont les suivantes :

(P1) il existe $\theta, \Omega > 1$ tels que pour tout $j \geq 1$ on a $\frac{1}{\Omega} j^\theta \leq \lambda_j \leq \Omega j^\theta$

(P2) l'ensemble des différences de fréquences $\Lambda = \{\lambda_j - \lambda_k, (j,k) \in \mathbb{N}^\star\}$ vérifie

$$\exists \sigma > 0 \qquad \forall t \geq 1 \qquad \mathrm{Card}\,(\Lambda \cap [0,t]) \leq C t^\sigma$$

## 1.7 Les différences spectrales entre les deux résultats

Nous allons expliquer pourquoi il est possible de traiter de la même manière tous les potentiels $V(x) = x^{2p}$ avec $p \geq 2$ alors que l'on doit examiner séparément le cas $V(x) = x^2$.

La principale différence technique des démonstrations des théorèmes 1.2.1 et 1.2.2 est la définition des classes $\mathcal{T}_k$ et $\mathcal{T}_k^+$. Comme on l'a dit plus haut, ces classes sont définies à l'aide d'estimations adéquates des intégrales-produits des modes propres.

Commençons par le cas $V(x) = x^2$. Le spectre de l'oscillateur harmonique $-\frac{d}{dx^2} + x^2$ est bien connu. Il s'agit des entiers naturels impairs et ses modes propres sont les fonctions d'Hermite (voir annexe 4.2 ou le classique [Sze75]) :

$$\phi_j(x) = c_j H_j(x) e^{-x^2/2}, \qquad \lambda_j = 2j - 1$$

où $H_j$ est le $j$-ième polynôme d'Hermite. La suite $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ vérifie bien entendu les conditions (P1) et (P2) (voir partie précédente). Grâce à un « lemme de commutateur »(voir le lemme précis 3.2.8), on peut montrer la proposition suivante (voir la proposition 2.3.6) :

**Proposition 1.7.1.** *Si $d = 1$ et $V(x) = x^2$, alors il existe $\nu, \beta > 0$ tel que pour tous $k \in \mathbb{N}^\star$,$(j_1, \ldots, j_k) \in \mathbb{N}^{\star k}$ et $N > 1$*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \phi_{j_1}(x) \cdots \phi_{j_k}(x) dx \right| \leq C_N \frac{j_3^{\star\nu}}{j_1^{\star\beta}} \left( \frac{\sqrt{j_2^\star j_3^\star}}{\sqrt{j_2^\star j_3^\star} + j_1^\star - j_2^\star} \right)^N$$

*où $j_1^\star \geq \cdots \geq j_k^\star$ est obtenu en réordonnant le $k$-uplet $(j_1, \cdots, j_k)$.*

En fait, dans la démonstration de la proposition précédente le nombre $\beta$ est tel que

$$||\phi_j||_{L^\infty} \leq \frac{C}{j^{2\beta}} \tag{1.11}$$

Et il est remarquable qu'un tel $\beta > 0$ existe, en l'occurrence on peut choisir $\beta = \frac{1}{24}$ ([Sze75]) mais cela n'a pas beaucoup d'importance. Nous verrons un peu plus loin, que dans le cas général $V(x) = x^{2p}$ avec $p \geq 3$, les modes propres ne sont même pas bornés. Les estimations des intégrales-produits ont vocation à « comprendre »l'interaction des différents modes entre eux. Ainsi, la proposition 1.7.1 nous explique que lorsque $j_1^\star - j_2^\star$ est très grand par rapport à $j_3^\star$, alors les modes $\phi_{j_1}, \ldots, \phi_{j_k}$ interagissent très peu entre eux. On définit alors les classes $\mathcal{T}_k$ et $\mathcal{T}_k^+$.

**Définition 1.7.2.** *Dans le modèle $V(x) = x^2$, un polynôme homogène de degré $k \geq 3$*

$$P(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^{\star k}} a_j z_{j_1} \cdots z_{j_k}$$

*appartient à la classe $\mathcal{T}_k$ s'il existe $\nu, \beta > 0$ tel que pour tout $N \geq 1$ on a*

$$|a_j| \leq C_N \frac{|j_3^\star|^\nu}{|j_1^\star|^\beta} \left( \frac{\sqrt{|j_2^\star||j_3^\star|}}{\sqrt{|j_2^\star||j_3^\star|} + |j_1^\star| - |j_2^\star|} \right)^N$$

*De même $P \in \mathcal{T}_k^+$ s'il on a l'estimation*

$$|a_j| \leq C_N \frac{|j_3^\star|^\nu}{|j_1^\star|^\beta (1 + |j_1^\star| - |j_2^\star|)} \left( \frac{\sqrt{|j_2^\star||j_3^\star|}}{\sqrt{|j_2^\star||j_3^\star|} + |j_1^\star| - |j_2^\star|} \right)^N$$

Signalons que des estimations des intégrales-produits des fonctions d'Hermite ont déjà été obtenues par Wei-Min Wang ([WM08],[Wan09]) en vue d'étudier la stabilité de l'oscillateur harmonique avec une perturbation quasi-périodique localisée.

En fait, dans la démonstration de la stabilité par crochet de Poisson (propriété v) de la partie 1.5), l'existence de $\beta > 0$ permet de faire converger des sommes du type $\sum \frac{1}{j^\beta \lambda_j}$. Autrement dit, l'existence de $\beta > 0$ a pour but de contrecarrer la faible croissance de $\lambda_j = 2j - 1$.

Lorsque $p \geq 2$, l'étude spectrale de l'opérateur $-\frac{d}{dx^2} + x^{2p}$ est sensiblement plus difficile. En ce qui concerne la $j$-ième valeur propre, on ne sait pas la calculer exactement. Néanmoins, la formule de Weyl ([RS], théorème XIII.81) permet de connaître un équivalent de la fonction de comptage lorsque $E \to +\infty$

$$\operatorname{card}\{j \geq 1, \lambda_j \leq E\} \simeq c \int_{\{x^{2p} \leq E\}} \sqrt{E - x^{2p}} dx \simeq c E^{\frac{p+1}{2p}}$$

Or en dimension 1, chaque valeur spectrale est simple ([BS]) et l'équivalent de $\lambda_j$ s'obtient par fonction réciproque :

$$\lambda_j \simeq c j^{\frac{2p}{p+1}}$$

Comme dans le modèle $V(x) = x^2$, la convergence de la série $\sum \frac{1}{\lambda_j}$ servira à montrer la stabilité par crochet de Poisson. A ce stade là, la propriété (P2) semble difficile à prouver. On fait alors appel au théorème suivant ([HR82])

**Théorème 1.7.3.** *(Helffer-Robert) Si $V(x)$ est un polynôme $\geq 0$ de degré pair $2p \geq 2$ alors on a un développement asymptotique*

$$\lambda_j \simeq (j + \sigma)^{\frac{2p}{p+1}} \sum_{i \geq 0} b_i (j + \sigma)^{\frac{-i}{p+1}}$$

**Corollaire 1.7.4.** *Si $V(x)$ est un polynôme de degré pair $2p \geq 2$ alors*

$$\forall j_1, j_2 \geq 1 \qquad c|j_1^{\frac{2p}{p+1}} - j_2^{\frac{2p}{p+1}}| \leq |\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}| \leq C|j_1^{\frac{2p}{p+1}} - j_2^{\frac{2p}{p+1}}|$$

La condition (P2) est alors facile. De même pour (P1).

En ce qui concerne l'analogue de l'estimation (1.11), Yajima et Zhang ont obtenu toutes les estimations asymptotiques optimales ([YZ01] page 576) :

**Théorème 1.7.5.** *On suppose $V(x) = x^{2p}$ avec $p \geq 2$. Pour tous $r \in [2, \infty]$, il existe un nombre explicite $\sigma(r,p) \geq \frac{-1}{8p}$ tel que*

$$||\phi_j||_{L^r} \simeq j^{\sigma(r,p)}$$

*avec*

$$\begin{array}{rcl} 2 \leq r \leq 4 & \Rightarrow & \sigma(r,p) = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\right) \leq 0 \\ 4 \leq r \leq \frac{4p-2}{p-2} & \Rightarrow & \sigma(r,p) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{2p}\right) - \frac{1}{4} \leq 0 \\ \frac{4p-2}{p-2} \leq r \leq +\infty & \Rightarrow & \sigma(r,p) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{2p}\right) - \frac{1}{4} \geq 0 \end{array}$$

*En particulier, on a $\sigma(r,p) \leq \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2p}\right) - \frac{1}{4}$.*

Pour $p \geq 3$, on a $\sigma(\infty, p) > 0$, par conséquent $||\phi_j||_{L^\infty}$ n'est même pas borné en $j$ lorsque $p \geq 3$. De nouveau, un lemme de commutateur permet d'obtenir des estimations des intégrales-produits :

**Proposition 1.7.6.** *Si $V(x) = x^{2p}$ avec $p \geq 2$, alors pour tous $k \in \mathbb{N}^\star$,$(j_1, \ldots, j_k) \in \mathbb{N}^{\star k}$ et $N > 1$ il existe $\nu := \nu(k)$ tel que*

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \phi_{j_1}(x) \cdots \phi_{j_k}(x) dx\right| \leq C_N j_3^{\star\nu} \left(\frac{\sqrt{\lambda_{j_2^\star}\lambda_{j_3^\star}}}{\sqrt{\lambda_{j_2^\star}\lambda_{j_3^\star}} + \lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star}}\right)^N$$

*où $j_1^\star \geq \cdots \geq j_k^\star$ est obtenu en réordonnant le k-uplet $(j_1, \cdots, j_k)$.*

De même, on définit les classes $\mathcal{T}_k$ et $\mathcal{T}_k^+$.

**Définition 1.7.7.** *Dans le modèle $V(x) = x^{2p}$ avec $p \geq 2$, un polynôme homogène de degré $k \geq 3$*

$$P(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^{\star k}} a_j z_{j_1} \cdots z_{j_k}$$

*appartient à la classe $\mathcal{T}_k$ s'il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $N \geq 1$ on a*

$$|a_j| \leq C_N |j_3^\star|^\nu \left(\frac{\sqrt{\lambda_{j_2^\star}\lambda_{j_3^\star}}}{\sqrt{\lambda_{j_2^\star}\lambda_{j_3^\star}} + \lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star}}\right)^N$$

*De même $P \in \mathcal{T}_k^+$ s'il on a l'estimation*

$$|a_j| \leq C_N \frac{|j_3^\star|^\nu}{(1 + \lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star})} \left(\frac{\sqrt{\lambda_{j_2^\star}\lambda_{j_3^\star}}}{\sqrt{\lambda_{j_2^\star}\lambda_{j_3^\star}} + \lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star}}\right)^N$$

A présent que l'on a vu les définitions des classes $\mathcal{T}_k^+$, il nous apparaît important de justifier la présence du dénominateur $\frac{1}{1+\lambda_{j_1^\star}-\lambda_{j_2^\star}}$. Lorsque les fréquences de $H_0$ sont non résonantes, la résolution de l'équation homologique

$$\{H_0, \chi\} + P = Z$$

fournit en réalité un polynôme $\chi$ dans la classe $\mathcal{T}_k^+ \subset \mathcal{T}_k$. On remarquera que le terme $1+\lambda_{j_1^\star}-\lambda_{j_2^\star}$ apparaît explicitement dans la définition de non résonance 1.6.1. Les coefficients d'un polynôme de classe $\mathcal{T}_k^+$ tendent plus rapidement vers 0 que leurs analogues dans la classe $\mathcal{T}_k$. Cela explique que le gradient symplectique de $\chi$ est à valeurs dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ (propriété iii) de la partie 1.10).

Il peut paraître étrange qu'un même cadre ne permette pas d'obtenir d'unifier les théorèmes 1.2.1 et 1.2.2. Cela provient peut-être de la complexité des classes $\mathcal{T}_k$ et $\mathcal{T}_k^+$ ainsi que des conditions spectrales dont on a besoin pour valider les propriétés i) à vi). Mentionnons à nouveau qu'il aurait été très satisfaisant d'obtenir une seule classe $\mathcal{T}_k$ vérifiant les propriétés i) à vi), mais typiquement nous n'avons pas réussi à montrer l'implication

$$P \in \mathcal{T}_k, \quad 1 \ll s \qquad \Rightarrow \quad ||X_P(z)||_s \leq C||z||_s^{k-1}$$

L'introduction de la classe $\mathcal{T}_k^+$ a vocation à pallier ce défaut.

## 1.8 Prolongements naturels

A) La démonstration du théorème 1.2.1 en dimension $d \geq 2$ ne présente pas de difficultés car on connaît parfaitement les valeurs propres et les modes propres de l'oscillateur harmonique $T_d := -\Delta + \sum_{i=1}^d x_i^2$ de $\mathbb{R}^d$. Les modes propres s'obtiennent par produit tensoriel des modes propres unidimensionnels, aussi toutes les estimations des intégrales-produits s'obtiennent de la même façon. Les valeurs propres jouissent d'une propriété très intéressante : elles sont entières. En effet, chaque valeur propre de $T_d$ est somme de $d$ nombres impairs. Cette propriété permet de perturber $T_d$ par un opérateur typique pour éviter les résonances (voir la partie 1.5). Ainsi, la symétrie par rotation de l'opérateur $T_d$ n'intervient pas du tout. Néanmoins notre démarche nous permet de traiter les EDP du type

$$i\partial_t \psi = (-\Delta + \sum_{i=1}^d \tau_i x_i^2)\psi + \partial_2 g(\psi, \overline{\psi}) \tag{1.12}$$

où $\left(\frac{1}{\tau_1}, \cdots, \frac{1}{\tau_d}\right)$ appartient à $\frac{1}{\tau}\mathbb{N}^{\star d}$ pour un certain $\tau > 0$, si bien que l'on pourra éviter les résonances par perturbation.

B) Pour la même raison expliquée au point A), le théorème 1.2.2 nous paraît actuellement très difficile à étendre en toute dimension. Voici un exemple très simple d'EDP

$$i\partial_t \psi = (-\Delta + x_1^4 + x_2^4)\psi + \partial_2 g(\psi, \overline{\psi}) \tag{1.13}$$

En notant $(\mu_n)_{n\geq 1}$ les valeurs propres de $-\frac{d^2}{dx^2} + x^4$, alors l'ensemble des valeurs propres de la partie linéaire de (1.13) est

$$\{\mu_i + \mu_j, \qquad (i,j) \in \mathbb{N}^\star\} = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\}$$

A-t-on une propriété de séparation

$$c|i^\alpha - j^\alpha| \leq |\lambda_i - \lambda_j| \leq C|i^\alpha - j^\alpha|$$

Cela semble très difficile, car l'approche usuelle consiste à comprendre la fonction de comptage et cette dernière tient compte des multiplicités.

## 1.9 Directions de recherche

A) Est-il possible de remplacer le paramètre extérieur typique $M$ par des opérateurs de multiplication ? Par exemple, pour une classe typique de fonctions mesurables bornées $m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ peut-on montrer la propriété de stabilité (S) pour l'EDP

$$i\partial_t \psi = (-\Delta + x^{2p} + m)\psi + \partial_2 g(\psi, \overline{\psi}) \tag{1.14}$$

Il s'agirait de comprendre le spectre de la partie linéaire. Une réponse affirmative nous paraît vraisemblable mais techniquement difficile à mettre en oeuvre. Il s'agirait de comprendre comment l'ajout d'une perturbation $m$, disons de norme infinie $||m||_\infty$ assez petite, impacte sur le spectre de $-\Delta + x^{2p} + m$.

Dans le même état d'esprit, on peut se demander si l'on peut obtenir la propriété de stabilité pour une large classe de conditions initiales mais sans ajouter un paramètre extérieur typique. Une approche possible serait de s'inspirer de [KP96] qui utilise une forme normale de Birkhoff et des méthodes KAM pour construire suffisamment de solutions presque périodiques d'une équation de Schrödinger sur le cercle.

B) On se demande si l'on peut récupérer des informations dynamiques sur de longs temps dans les cas résonants. Typiquement, l'hamiltonien perturbé se met après changement symplectique sous la forme $H_0 + Z_r + Z_i + R$ où $Z_r$ contient des termes résonants et $Z_i$ est en forme normale. Ainsi, dans la thèse $Z_r = 0$. Voici un exemple : on regarde l'équation de Schrödinger cubique défocalisante sur l'oscillateur harmonique

$$i\partial_t \psi = \left(-\frac{d}{dx^2} + x^2\right)\psi + |\psi|^2\psi, \qquad (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

avec condition initiale $\psi(0, x) = \varepsilon e^{-x^2/2}$. Autrement dit, seul le premier mode est excité. Y'a-t-il transfert d'énergie sur les autres modes sur un temps suffisamment long ? On peut étudier le même type de phénomène sur l'équation NLS sur le cercle ([GVB]). Les transferts d'énergie entre les modes (phénomène low-to-high frequency [CKS+]) sont intimement liés à la croissance des normes de Sobolev. Le Graal serait de prouver (ou d'infirmer) que pour certaines conditions initiales $\psi(0, \cdot)$ l'on a $\lim_{t\to+\infty} ||\psi(t, \cdot)||_{\widehat{H}^s} = +\infty$.

# Chapitre 2

## Formes normales pour l'oscillateur harmonique quantique multi-dimensionnel

**Description d'un travail en collaboration avec Benoît Grébert et Eric Paturel**

**Résumé.** Nous considérons l'équation de Schrödinger associée à l'oscillateur harmonique semilinéaire

$$i\psi_t = (-\Delta + |x|^2 + M)\psi + \partial_2 g(\psi, \bar{\psi}), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R}$$

où $M$ est un multiplicateur de Hermite et $g$ une fonction analytique d'ordre $\geq 3$ en 0.
Nous prouvons qu'une telle équation hamiltonienne admet, au voisinage de l'origine, une forme normale de Birkhoff à tout ordre, sous des conditions génériques sur $M$ liées à la non-résonance de la partie linéaire, cette forme normale est intégrable quand $d = 1$ et fournit une dynamique bornée quand $d \geq 2$.
Conséquemment, nous prouvons l'existence presque globale lorsque la condition initiale est suffisamment petite. En outre, nous contrôlons les normes de Sobolev de solutions régulières pour des temps relativement longs.

**mots clés :** Forme normale de Birkhoff, Oscillateur semi-linéaire harmonique quantique, EDP hamiltonienne, Stabilité, équation de Gross-Pitaevskii, AMS classification : 37K55,37K45, 35B34, 35B35

## 2.1 Introduction, énoncé des résultats

Le but de cet article est de prouver un théorème de forme normale de Birkhoff pour l'équation semilinéaire suivante

$$\begin{cases} i\psi_t = (-\Delta + |x|^2 + M)\psi + \partial_2 g(\psi, \bar{\psi}) \\ \psi|_{t=0} = \psi_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

sur tout l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et d'examiner ses conséquences dynamiques. Ici, $g$ est une fonction analytique d'ordre $p \geq 3$ en 0, et $\partial_2 g$ désigne la dérivée partielle de $g$ par rapport à la seconde variable. L'opérateur linéaire $M$ est un multiplicateur d'Hermite. En vue de définir $M$ précisément, au moins dans le cas unidimensionnel, (voir partie 2.3.2 dans le cas multi-dimensionnel), introduisons l'oscillateur harmonique quantique sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire $T = -\Delta + |x|^2$. Quand $d = 1$, $T$ est diagonalisé dans la base d'Hermite $(\phi_j)_{j\in\bar{\mathbb{N}}}$ :

$$T\phi_j = (2j-1)\phi_j, \quad j \in \bar{\mathbb{N}}$$
$$\phi_{n+1} = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où $\bar{\mathbb{N}}$ désigne $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $H_n(x)$ est le n-ième polynôme d'Hermite :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}.$$

Dans la base d'Hermite (et pour $d = 1$), un multiplicateur d'Hermite est un opérateur linéaire donné par

$$M\phi_j = m_j \phi_j\,,$$

où $(m_j)_{j\in\bar{\mathbb{N}}}$ est une suite réelle bornée qui sera choisie comme suit : pour tout $k \geq 1$, nous définissons les classes

$$\mathcal{W}_k = \{(m_j)_{j\in\bar{\mathbb{N}}} \mid \text{ pour tout } j,\ m_j = \frac{\tilde{m}_j}{j^k} \text{ avec } \tilde{m}_j \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]\}$$

que nous munissons de la mesure probabilité produit lorsque chaque facteur $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ est muni de la mesure de Lebesgue. Dans ce contexte, les fréquences linéaires, i.e. les valeurs propres de $T + M = -d^2/dx^2 + x^2 + M$ sont données par

$$\omega_j = 2j - 1 + m_j = 2j - 1 + \frac{\tilde{m}_j}{j^k}, \quad j \in \bar{\mathbb{N}}. \tag{2.2}$$

Soit

$$\begin{aligned}\tilde{H}^s = \{f \in H^s(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) | x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^d) \\ \text{pour tout } \alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^d \text{ vérifiant } 0 \leq |\alpha| + |\beta| \leq s\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

où $H^s(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est l'usuel espace de Sobolev. Nous remarquons, pour tout $s \geq 0$, que le domaine de $T^{s/2}$ est $\tilde{H}^s$ (voir par exemple [Hel84] Proposition 1.6.6) et que $\tilde{H}^s$ est une algèbre si $s > d/2$.
Si $\psi_0 \in \tilde{H}^s$ est petit, disons de norme $\epsilon$, l'existence locale assure en réalité que (2.1) admet une unique solution dans $\tilde{H}^s$ définie sur un intervalle de longueur $c\epsilon^{-p+2}$. Notre but est de prouver que si $M$ évite un ensemble exceptionnel d'opérateurs, étant donné un entier $r \geq 1$ et pourvu que $s$ est suffisamment grand et $\epsilon$ suffisamment petit, la solution existe sur un intervalle de longueur $c\epsilon^{-r}$. De surcroît, nous contrôlons les normes de Sobolev $\tilde{H}^s$ ($d \geq 1$) et localisons la solution dans un voisinage d'un tore (seulement dans le cas $d = 1$, cf. Théorème 2.3.4 et Théorème 2.3.10).
Précisément nous avons

**Théorème 2.1.1.** *Soient $r, k \in \mathbb{N}$ des entiers quelconques. Il existe un ensemble $F_k \subset \mathcal{W}_k$ de probabilité 1 vérifiant ceci : si $m = (m_j)_{j\in\bar{\mathbb{N}}} \in F_k$ et si $g$ est une fonction analytique au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$, vérifiant $g(z, \bar{z}) \in \mathbb{R}$ et s'annulant en 0 avec un ordre $\geq 3$, il existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $s \geq s_0$, il existe $\epsilon_0 > 0$, $c > 0$, tel que pour tous $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ et $\psi_0 \in \tilde{H}^s$ avec $||\psi_0||_s \leq \epsilon$ , le problème de Cauchy (2.1) de condition initiale $\psi_0$ a une unique solution*

$$\psi \in C^0((-T_\epsilon, T_\epsilon), \tilde{H}^s)$$

*avec $T_\epsilon \geq c\epsilon^{-r}$. En outre, pour tout $t \in (-T_\epsilon, T_\epsilon)$, nous avons*

$$\|\psi(t, \cdot)\|_{\tilde{H}^s} \leq 2\epsilon\ . \tag{2.4}$$

Si la non-linéarité est $g(\psi,\bar{\psi}) = \lambda\frac{2}{p+1}|\psi|^{p+1}$ avec $p \geq 1$ et si le multiplicateur d'Hermite $M$ est nul, alors nous retrouvons l'équation de Gross-Pitaevskii

$$i\psi_t = (-\Delta + |x|^2)\psi + \lambda|\psi|^{p-1}\psi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.5}$$

Dans ce cas, l'existence globale dans l'espace d'énergie $\tilde{H}^1$ a été prouvée pour[1] $1 \leq p < \frac{d+2}{(d-2)^+}$ sans condition de petitesse sur la condition initiale dans le cas défocalisant ($\lambda < 0$) et pour des conditions initiales petites dans le cas focalisant (voir [Car02] et aussi [Zha05]). Mais rien n'est connu pour des non-linéarités d'ordre élevé ou pour le contrôle des normes $\tilde{H}^s$ pour $s > 1$. Notre résultat énonce que, quitte a éviter les résonances à l'aide d'un ajout d'un terme linéaire générique $M\psi$ (le cas $M = 0$ n'est pas étudié), nous retrouvons l'existence presque globale pour l'équation de Gross-Pitaevskii avec une nonlinearité arbitraire d'ordre élevé et une condition initiale petite dans $\tilde{H}^s$ pour $s$ suffisamment grand. En un certain sens, cela prouve que l'instabilité de l'équation Gross-Pitaevskii qui peut apparaître est nécessairement produite par des résonances. Précisément, nous pouvons comparer cela avec l'équation semi-classique cubique de Gross-Pitaevskii dans $\mathbb{R}^3$ qui intervient dans l'étude de Bose-Einstein (pour une présentation physique, voir [PS03])

$$ihu_t = -h^2\Delta u + |x|^2 u + h^2|u|^2 u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{2.6}$$

quand $h$ est un petit paramètre.
Le changement d'échelle entre $\psi$ solution de (2.5) et $u$ solution de (2.6) est donné par

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{h}}\psi(t, \frac{x}{\sqrt{h}}). \tag{2.7}$$

Nous notons que pour des multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^3$, avec $y = \frac{x}{\sqrt{h}}$, nous avons

$$\left\| y^\alpha \partial^\beta \psi \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = h^{|\beta|-|\alpha|-1/2} \left\| x^\alpha \partial^\beta u \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Dès lors, la petitesse de $\psi_0$ dans $\tilde{H}^s$ imposée dans le théorème 2.1.1, i.e. $\|\psi_0\|_{\tilde{H}^s} \leq C\epsilon$, se lit

$$\sum_{|\beta|+|\alpha|\leq s} h^{|\beta|-|\alpha|-1/2} \left\| x^\alpha \partial^\beta u_0 \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\epsilon^2.$$

En prenant $\epsilon = h^{1/6}$ avec $h$ suffisamment petit, nous voyons que cela autorise les dérivées d'ordre $\geq 1$ en vue d'obtenir de grandes normes $L^2$ quand $h$ est petit :

$$\left\| \partial^\beta u_0 \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = O(h^{-|\beta|+5/6})$$

i.e. la condition initiale doit avoir une norme petite dans $L^2$ mais peut bien entendu osciller. Ainsi, le Théorème 2.1.1 établit que, modulo les résonances, les mêmes estimées demeurent valides pour la solution $u(t,.)$ avec $|t| = O(h^{-r/6})$, $r$ étant choisir arbitrairement. Répétons à nouveau que le rôle de la partie linéaire $M$ est d'enlever les éventuelles résonances entre les modes libres (voir (2.2)). Le cas complétement résonant $M = 0$ dépasse le cadre d'étude de cet article.

Le Théorème 2.1.1 est prouvé avec la théorie des formes normales de Birkhoff. Cette technique a été développée par Bourgain [Bou96a], Bambusi [Bam03], Bambusi-Grébert

1. nous utilisons la convention $\frac{d+2}{(d-2)^+} = +\infty$ pour $d = 1, 2$, et $(d-2)^+ = d-2$ pour $d \geq 3$

[BG04] pour des EDP semi-linéaires (typiquement l'équation semi-linéare de Schrödinger ou l'équation des ondes) sur le tore uni-dimensionnel et par Bambusi-Delort-Grébert-Szeftel [BDGS07] pour l'équation semi-linéaire de Klein-Gordon sur la sphère $S^d$ (ou une variété de Zoll). Les précédentes études traitent des variétés compactes. Dans notre travail, la variété sous-jacente est $\mathbb{R}^d$, et le potentiel confinant $x^2$ garantit que le spectre demeure discret, mais les modes libres de l'oscillateur harmonique ne sont pas bien localisés.
Pour des références générales sur les équations Hamiltoniennes et leurs perturbations, voir les récentes monographies [Cra00, Kuk00, Bou05, KP03]. Nous remarquons aussi que dans [Kuk93], un théorème de type KAM est prouvé pour (2.1) en une dimension avec des non-linéarités spécifiques.

Décrivons sommairement la méthode. Nous considérons un système hamiltonien dont l'hamiltonien se décompose en une partie quadratique $H_0$ (associée à la partie linéaire de l'équation), et une perturbation non linéaire $P$ (au moins cubique) : $H = H_0 + P$. Nous supposons que $H_0$ est diagonalisé dans la base hilbertienne $(\phi_j)_{j\geq 1}$ de l'espace des phases $\mathcal{P}$ : $H_0 = \sum_j \omega_j \xi_j \eta_j$ pour $(\xi, \eta) \in \mathcal{P}$ et $\omega = (\omega_j)_{j\geq 1}$ est le vecteur des fréquences libres (spectre de la partie linéaire). Dans le cas de l'oscillateur harmonique, la base hilbertienne Hilbert est constituée des fonctions d'Hermite et $\mathcal{P} = \ell^2 \times \ell^2$. L'idée heuristique se résume ainsi : si les modes libres n'interagissent pas trop dans leur ensemble (i.e. si $\omega$ est non résonant), et s'ils n'interagissent pas trop via le terme non linéaire, alors le système n'est pas loin d'être intégrable, modulo un terme non-linéaire d'ordre élevé, et par conséquent la solution existe et est contrôlée sur un temps long. Précisément, par une approche de forme normale de Birkhoff nous prouvons (cf. le principal Théorème 2.2.22) que $H \sim H_0' + P'$ où $H_0'$ n'est plus quadratique mais reste intégrable (dans le cas $d = 1$) et $P'$ est au moins d'ordre $r$, où $r \geq 3$ est arbitrairement grand tant que nous travaillons dans un voisinage suffisamment restreint de l'origine.

Pour garantir la seconde condition, i.e. que les modes libres n'interagissent pas trop via le terme non linéaire, nous devons contrôler les intégrales-produits de plusieurs modes arbitraires :

$$a_j = \int_D \phi_{j_1}(x) \cdots \phi_{j_k}(x) dx \tag{2.8}$$

où $D$ est la variété d'étude ($\mathbb{R}^d$ en l'occurrence) et $j \in \mathbb{N}^k$ est un multi-index, $k$ appartenant à $[3, r]$. Considérons un multi-indice $j$ ordonné, i.e. tel que $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_k$. Dans [BDGS07, Gré07, Bam07] l'estimée suivante est invoquée : il existe $\nu > 0$ et pour tout $N \geq 1$ il existe $C_N > 0$ tel que pour tout $j$ ordonné nous avons

$$|a_j| \leq C_N j_3^\nu \left( \frac{j_3}{j_3 + j_1 - j_2} \right)^N . \tag{2.9}$$

Pour l'oscillateur harmonique, cette estimée s'avère fausse (cf [WM08] où un équivalent est calculé pour quatre modes). Nous sommes capables de prouver ceci : il existe $\nu > 0$ et pour tout $N \geq 1$ il existe $C_N > 0$ tel que pour tout $j$ ordonné

$$|a_j| \leq C_N \frac{j_3^\nu}{j_1^{1/24}} \left( \frac{\sqrt{j_2 j_3}}{\sqrt{j_2 j_3} + j_1 - j_2} \right)^N . \tag{2.10}$$

La différence peut paraître dérisoire mais est techniquement importante : nous avons $\sum_{j_1} \left( \frac{j_3}{j_3 + j_1 - j_2} \right)^\mu \sim C j_3$ pour une certaine constante universelle $C$ pourvu que $\mu > 1$ et de même $\sum_{j_1} \left( \frac{\sqrt{j_2 j_3}}{\sqrt{j_2 j_3} + j_1 - j_2} \right)^\mu \sim C \sqrt{j_2 j_3}$. Dans le premier cas, le terme supplémentaire

$j_3$ peut être absorbé sans changer la valeur de $\nu$ dans (2.9) ($\nu' = \nu + 1$). Mais cela est impossible dans le second cas. En un certain sens, la perturbation non linéaire n'est plus négligeable (cf. [WM08]).
En réalité, les cas étudiés dans [Bou96a], [Bam03], [BG04], les modes linéaires (i.e. le spectre de la partie de linéaire) sont localisés autour des exponentielles $e^{ikx}$, i.e. les fonctions propres du laplacien du cercle. En particulier, les intégrales-produits des modes propres se calculent trivialement, et l'estimée (2.8) est plus facile. Pour l'oscillateur harmonique, les modes propres ne sont pas localisés et leurs intégrales-produits sont plus difficiles à comprendre. Remarquons que, dans le cas de l'équation de Klein-Gordon sphérique, le contrôle de (2.8) est aussi complexe, mais des estimées analogues à (2.9) sont prouvées plus généralement dans [DS04] pour les équations de Klein-Gordon sur des variétés de Zoll.
Du point de vue des formes normales, la substitution de (2.9) par (2.10) a la conséquence suivante : considérons un polynôme formel

$$Q(\xi, \eta) \equiv Q(z) = \sum_{l=0}^{k} \sum_{j \in \mathbb{N}^l} a_j z_{j_1} \dots z_{j_l}$$

où les coefficients $a_j$ vérifient (2.9). Dans [Gré07] ou [Bam07], il est prouvé que le champ de vecteur hamiltonien $X_Q$ est régulier de [2] $\mathcal{P}_s = \ell_s^2 \times \ell_s^2$ vers $\mathcal{P}_s$ pour $s$ suffisamment grand (dépendant de $\nu$). Dans la situation présente, i.e. si $a_j$ satisfait seulement (2.10), qui définit la classe $\mathcal{T}^\nu$, nous prouvons que $X_Q$ est régulier de $\mathcal{P}_s$ vers $\mathcal{P}_{s'}$ pour tout $s' < s - 1/2 + 1/24$ et $s$ grand. Cette perte de régularité complique évidemment la procédure itérative, mais cela est compensé de la manière suivante : la non-linéarité $P$ est régulière en ce sens que $X_P$ envoie $\mathcal{P}_s$ vers $\mathcal{P}_s$ pour $s$ grand (essentiellement car l'espace $\tilde{H}^s$ est une algèbre si $s > d/2$). D'un autre coté, nous construisons à chaque étape une transformation canonique (symplectique) qui préserve la régularité. En fait, à chaque étape, nous définissons la transformation canonique comme le flot au temps 1 d'un certain hamiltonien $\chi$, et la solution de l'équation homologique fournit un gain dans (2.10) pour les coefficients du polynôme $\chi$ :

$$|a_j| \leq C_N \frac{j_3^\nu}{j_1^{1/24}(1 + j_1 - j_2)} \left( \frac{\sqrt{j_2 j_3}}{\sqrt{j_2 j_3} + j_1 - j_2} \right)^N. \tag{2.11}$$

Avec une telle estimée, les coefficients (dans la classe [3] désignée $\mathcal{T}^{\nu,+}$ dans la partie 2.2.2), nous prouvons dans la Proposition 2.2.12 que $X_\chi$ est régulier de $\mathcal{P}_s$ vers $\mathcal{P}_s$ pour $s$ suffisamment grand. En outre, nous prouvons dans la proposition 2.2.17 que le crochet de Poisson d'un polynôme de $\mathcal{T}^\nu$ avec un polynôme de $\mathcal{T}^{\nu,+}$ appartient à $\mathcal{T}^{\nu'}$ pour un certain $\nu' > \nu$. Nous voyons ainsi qu'une procédure itérative est possible dans $\mathcal{P}_s$.
Cet effet régularisant de l'équation homologique a déjà été utilisé par S. Kuksin dans [Kuk87] (voir aussi [Kuk93, Pös96]). En un certain sens, cela est similaire à l'effet régularisant présent dans les équations de Schrödinger avec potentiels superquadratiques (voir [YZ04]).

Notre article est organisé comme suit : dans la partie 2.2 on établit un théorème de forme normale de Birkhoff inspiré de la perte de régularité expliquée plus haut. Dans la partie 2.3, nous appliquons ce théorème pour l'équation $1-d$ semilinéaire de l'oscillateur harmonique (Sous-partie 2.3.1) et nous généralisons cela pour couvrir le cas multi-dimensionnel (Sous-partie 2.3.2).

2. ici $l_s^2 = \{(z_l) \mid \sum l^{2s}|z_l|^2 < \infty\}$ et correspond aux fonctions $\psi = \sum z_l \phi_l$ de $\tilde{H^{2s}}$.

3. En fait dans la partie 2.2.2, au lieu de $\mathcal{T}^\nu$ et $\mathcal{T}^{\nu,+}$, nous considérons des classes plus générales $\mathcal{T}^{\nu,\beta}$ et $\mathcal{T}^{\nu,\beta,+}$ où le paramètre $\beta$ joue le rôle de l'exposant 1/24 de (2.10) et (2.11)

*Remerciements : c'est un grand plaisir pour nous de remercier Dario Bambusi et Didier Robert pour les discussions intéressantes que nous avons eues. Nous remercions aussi les relecteurs de cet article pour les suggestions éminemment utiles.*

## 2.2 Formes normales de Birkhoff

### 2.2.1 Modèle abstrait

Nous commençons par construire un modèle abstrait de système hamiltonien de dimension infinie. Dans la partie 2.3 nous vérifierons que l'oscillateur harmonique non-linéaire est englobé dans ce système abstrait. Dans la suite, on note $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Nous travaillons dans l'espace de phase $\mathcal{P}_s \equiv \mathcal{P}_s(\mathbb{C}) := \ell^2_s(\mathbb{C}) \times \ell^2_s(\mathbb{C})$ où, pour $s \in \mathbb{R}_+$, $\ell^2_s(\mathbb{C}) := \{(a_j)_{j\geq 1} \in \mathbb{C}^{\bar{\mathbb{N}}} \mid \sum_{j\geq 1} j^{2s}|a_j|^2 < +\infty\}$ est un espace de Hilbert pour la norme usuelle : $\|a\|_s^2 = \sum_{j\geq 1} |j|^{2s}|a_j|^2$. Nous définissons $\mathcal{P}_s(\mathbb{R}) := \{(\xi, \bar{\xi}) \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C})\}$ la partie réelle de $\mathcal{P}_s(\mathbb{C})$. Nous allons désigner un point générique de $\mathcal{P}_s$ par $z = (\xi, \eta)$ par $z = (z_j)_{j\in\bar{\mathbb{Z}}}$, $\xi = (\xi_j)_{j\in\bar{\mathbb{N}}}$, $\eta = (\eta_j)_{j\in\bar{\mathbb{N}}}$ et la correspondance : $z_j = \xi_j,\ z_{-j} = \eta_j$ pour tout $j \in \bar{\mathbb{N}}$. Enfin, pour un hamiltonien $H$, le champ de vecteur hamiltonien associé est noté $X_H$ et est défini par

$$X_H(z) = \left(\left(-\frac{\partial H}{\partial \xi_k}\right)_{k\in\bar{\mathbb{N}}}, \left(\frac{\partial H}{\partial \eta_k}\right)_{k\in\bar{\mathbb{N}}}\right).$$

**Définition 2.2.1.** *Soit $s \geq 0$, nous définissons l'espace $\mathcal{H}^s$ des hamiltoniens $H$ définis sur un voisinage $\mathbb{U}$ de l'origine de $\mathcal{P}_s \equiv \mathcal{P}_s(\mathbb{C})$, vérifiant $H(\xi, \bar{\xi}) \in \mathbb{R}$ (nous dirons que $H$ est réel) et*

$$H \in C^\infty(\mathbb{U}, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad X_H \in C^\infty(\mathbb{U}, \mathcal{P}_s),$$

*ainsi que tous les polynômes homogènes de Taylor $H_k$ apparaissant dans le développement de Taylor de $H$ en $0$ :*

$$H_k \in C^\infty(\mathbb{U}, \mathbb{C}) \quad \text{and} \quad X_{H_k} \in C^\infty(\mathbb{U}, \mathcal{P}_s).$$

En particulier, le champ de vecteur hamiltonien des fonctions $F,\ G \in \mathcal{H}^s$ appartient à $\ell^2_s(\mathbb{C}) \times \ell^2_s(\mathbb{C})$ et l'on peut définir leur crochet de Poisson par

$$\{F, G\} = i \sum_{j\geq 1} \frac{\partial F}{\partial \xi_j}\frac{\partial G}{\partial \eta_j} - \frac{\partial F}{\partial \eta_j}\frac{\partial G}{\partial \xi_j}\ .$$

Remarquons que si $P \in \mathcal{H}^s$ alors le champ de vecteur $X_P$ est de classe $C^\infty$ sur un voisinage de $\mathcal{P}_s$ vers $\mathcal{P}_s$, nous avons

**Lemme 2.2.2.** *Soit $P \in \mathcal{H}^s$ qui s'annule à l'ordre $r+1$ en l'origine :*

$$\forall k \leq r+1, \forall j \in \bar{\mathbb{Z}}^k,\ \frac{\partial^k P}{\partial z_{j_1} \ldots \partial z_{j_k}}(0) = 0$$

*Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $C > 0$ tels que, pour $z \in \mathcal{P}_s$ vérifiant $||z||_s \leq \varepsilon_0$, nous avons*

$$||X_P(z)||_s \leq C||z||_s^r.$$

Notre modèle de système intégrable est l'oscillateur harmonique

$$H_0 = \sum_{j\geq 1} \omega_j \xi_j \eta_j$$

où $\omega = (\omega_j)_{j\geq 1} \in \mathbb{R}^{\bar{\mathbb{N}}}$ est le vecteur-fréquence. Nous allons supposer que ces fréquences croissent de façon sous-polynomiale i.e. il existe $C > 0$ et $\bar{d} \geq 0$ tel que pour tout $j \in \bar{\mathbb{N}}$,

$$|\omega_j| \leq C|j|^{\bar{d}}, \tag{2.12}$$

si bien que $H_0$ est bien défini sur $\mathcal{P}_s$ pour $s$ suffisamment grand.
La perturbation $P \in \mathcal{H}^s$, est une fonction réelle ayant un zéro d'ordre $\geq 3$ en l'origine. Notre fonction hamiltonienne est alors donnée par

$$H = H_0 + P$$

et les équations canoniques d'Hamilton se lisent

$$\begin{cases} \dot{\xi}_j &= -i\omega_j \xi_j - i\frac{\partial P}{\partial \eta_j}, \; j \geq 1 \\ \dot{\eta}_j &= i\omega_j \eta_j + i\frac{\partial P}{\partial \xi_j}, \; j \geq 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

Notre théorème va requérir essentiellement deux hypothèses : une sur la perturbation $P$ (voir Définition 2.2.5) et une autre sur le vecteur-fréquence $\omega$ que nous décrivons ci-après.

Pour $j \in \bar{\mathbb{Z}}^k$ avec $k \geq 3$, nous définissons $\mu(j)$ comme le troisième plus grand terme parmi $|j_1|, \ldots, |j_k|$. Puis, nous posons $S(j) := |j_{i_1}| - |j_{i_2}|$ où $|j_{i_1}|$ et $|j_{i_2}|$ sont respectivement le plus grand entier et le second plus grand entier parmi $|j_1|, \ldots, |j_k|$. Ainsi, si le multi-index $j$ est ordonné, ie $|j_1| \geq \ldots \geq |j_k|$ alors

$$\mu(j) := |j_3| \text{ et } S(j) = |j_1| - |j_2|.$$

Dans [Bam03, BG04, Gré07, Bam07] la condition de non résonance sur $\omega$ s'exprime de la manière suivante

**Définition 2.2.3.** *Un vecteur-fréquence $\omega \in \mathbb{R}^{\bar{\mathbb{N}}}$ est* ***non résonant*** *si pour tout $r \in \bar{\mathbb{N}}$, il existe $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $j \in \bar{\mathbb{N}}^r$ et $1 \leq i \leq r$, on a*

$$\left|\omega_{j_1} + \cdots + \omega_{j_i} - \omega_{j_{i+1}} - \cdots - \omega_{j_r}\right| \geq \frac{\gamma}{\mu(j)^\delta} \tag{2.14}$$

*sauf si bien entendu $\{j_1, \ldots, j_i\} = \{j_{i+1}, \ldots, j_r\}$.*

Pour l'oscillateur harmonique [4], nous sommes capables de travailler avec une condition légèrement modifiée

**Définition 2.2.4.** *Un vecteur-fréquence $\omega \in \mathbb{R}^{\bar{\mathbb{N}}}$ est* ***fortement non résonant*** *si pour tout $r \in \bar{\mathbb{N}}$, il existe $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tous $j \in \bar{\mathbb{N}}^r$ et $1 \leq i \leq r$, on a*

$$\left|\omega_{j_1} + \cdots + \omega_{j_i} - \omega_{j_{i+1}} - \cdots - \omega_{j_r}\right| \geq \gamma \frac{1 + S(j)}{\mu(j)^\delta} \tag{2.15}$$

*sauf si bien entendu $\{j_1, \ldots, j_i\} = \{j_{i+1}, \ldots, j_r\}$.*

Cette amélioration de la condition de non résonance est analogue à la modification de la classique seconde condition de Melnikov introduite initialement par S. Kuksin dans [Kuk87] (voir aussi [Kuk93] et [Pös96]).

4. plus généralement si le vecteur-fréquence est non résonant comme dans la définition 2.2.3 et satisfait la condition asymptotique : $\omega_l \sim l^n$ avec $n \geq 1$.

### 2.2.2 Espaces de polynômes

Pour $j \in \bar{\mathbb{Z}}^k$ avec $k \geq 3$, nous avons déjà défini $\mu(j)$ et $S(j)$, nous introduisons maintenant

$$B(j) = |j_{i_2}\ j_{i_3}|^{1/2}, \quad C(j) = |j_{i_1}|$$

où $|j_{i_1}|$, $|j_{i_2}|$ et $|j_{i_3}|$ sont respectivement le premier, le deuxième et le troisième plus grand entier parmi $|j_1|, \dots, |j_k|$. Nous définissons aussi

$$A(j) = \frac{B(j)}{B(j) + S(j)}. \tag{2.16}$$

En particulier, si le multi-index $j$ est ordonné, i.e. si $|j_1| \geq \dots \geq |j_k|$ alors

$$A(j) = \frac{|j_2 j_3|^{1/2}}{|j_2 j_3|^{1/2} + |j_1| - |j_2|}$$

et

$$C(j) = |j_1|.$$

**Définition 2.2.5.** *Soient $k \geq 3$, $\beta \in (0, +\infty)$, $\nu \in [0, +\infty)$ et un polynôme homogène formel de degré $k$ sur $\mathcal{P}_s(\mathbb{C})$*

$$Q(\xi, \eta) \equiv Q(z) = \sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}^k} a_j z_{j_1} \dots z_{j_l} \tag{2.17}$$

*$Q$ est dans la classe $\mathcal{T}_k^{\nu,\beta}$ si pour tout $N \geq 1$ il existe une constante $c_N > 0$ telle que pour tout $j \in \bar{\mathbb{Z}}^k$*

$$|a_j| \leq c_N \frac{\mu(j)^\nu}{C(j)^\beta} A(j)^N. \tag{2.18}$$

Nous introduisons aussi la

**Définition 2.2.6.** *Soient $k \geq 3$, $\beta \in [0, +\infty)$, $\nu \in [0, +\infty)$ et un polynôme homogène formel de degré $k$ sur $\mathcal{P}_s(\mathbb{C})$*

$$Q(\xi, \eta) \equiv Q(z) = \sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}^k} a_j z_{j_1} \dots z_{j_l}$$

*$Q$ est dans la classe $\mathcal{T}_k^{\nu,\beta,+}$ si pour tout $N \geq 1$ il existe une constante $c_N > 0$ telle que pour tout $j \in \bar{\mathbb{Z}}^k$*

$$|a_j| \leq c_N \frac{\mu(j)^\nu}{C(j)^\beta (1 + S(j))} A(j)^N. \tag{2.19}$$

Les meilleures constantes $c_N$ dans (2.18) définissent une famille de semi-normes qui munit $\mathcal{T}_k^{\nu,\beta}$ d'une structure d'espace de Fréchet.

**Remarque 2.2.7.** *Remarquons que l'écriture* (2.17) *n'est pas unique. Néanmoins, puisque les estimées* (2.18) *et* (2.19) *sont symétriques par rapport à l'ordre des indices $j_1, \cdots, j_k$, l'absence d'unicité n'affecte pas les Définitions 2.2.5 et 2.2.6.*

**Remarque 2.2.8.** *Dans l'estimée* (2.18)*, le numérateur autorise une croissance par rapport à $\mu(j)$ qui sera utile pour contrôler les petits diviseurs. Le dénominateur impose une faible décroissance par rapport à $C(j)$ et une forte décroissance pour les monômes qui ont deux modes dont les grands indices n'ont pas le même ordre. Ce contrôle est meilleur dans la classe $\mathcal{T}_k^{\nu,\beta,+}$.*

**Remarque 2.2.9.** *Nous allons voir dans la Proposition 2.2.12 que, si $\beta > 1/2$ alors $\mathcal{T}_k^{\nu,\beta} \subset \mathcal{H}^s$ pour $s \geq \nu + 1$. Malheureusement $\beta$ n'est pas très grand pour l'oscillateur harmonique ($\beta = 1/24$ est optimal). Ainsi, l'appartenance $P \in \mathcal{T}_k^{\nu,\beta}$ n'implique pas $P \in \mathcal{H}^s$. Par contre, comme nous allons le voir dans la Proposition 2.2.12, un polynôme de $\mathcal{T}_k^{\nu,\beta}$ est bien défini et continu sur un voisinage de l'origine de $\mathcal{P}_s(\mathbb{C})$ pour $s$ assez grand. À titre de comparaison, dans [Gré07, Bam07], notre estimation* (2.18) *est remplacée par*

$$|a_j| \leq C_N \frac{\mu(j)^{N+\nu}}{(\mu(j) + S(j))^N}. \tag{2.20}$$

*qui est en réalité meilleure que (2.18), puisqu'elle implique la régularité $\mathcal{H}^s$. Ce genre de contrôle sur les coefficients $a_j$ a été initialement introduit dans [DS04] dans le contexte des formes multilinéaires.*

**Définition 2.2.10.** *Soient $\nu \geq 0$ et $\beta \geq 0$. Une fonction $P$ est dans la classe $\mathcal{T}^{\nu,\beta}$ si*
- *il existe $s_0 \geq 0$ tel que, pour tout $s \geq s_0$ il existe $\mathbb{U}_s$, un voisinage de l'origine de $\mathcal{P}_s$ vérifiant $P \in C^\infty(\mathbb{U}_s, \mathbb{C})$.*
- *$P$ admet l'origine comme zéro d'ordre $\geq 3$*
- *pour tout $k \geq 3$ le polynôme de Taylor en 0 de degré $k$ de $P$ appartient à $\otimes_{l=3}^k \mathcal{T}_l^{\nu,\beta}$.*

Nous définissons maintenant les classes de polynômes en **forme normale** :

**Définition 2.2.11.** *Soit $k = 2m$ un entier pair. Un polynôme homogène formel $Z$ de degré $k$ sur $\mathcal{P}_s$ est en forme normale s'il est de la forme*

$$Z(z) = \sum_{j \in \bar{\mathbb{N}}^m} b_j z_{j_1} z_{-j_1} \ldots z_{j_m} z_{-j_m} \tag{2.21}$$

*i.e. $Z$ ne dépend que des actions $I_l := z_l z_{-l} = \xi_l \eta_l$.*

Le but du théorème des formes normales de Birkhoff est de réduire un hamiltonien donné $H_0 + P$ avec $P \in \mathcal{H}^s$ en un hamiltonien de la forme $Z + R$ où $Z$ est en forme normale et $R$ est très petit, en ce sens qu'il admet l'origine comme zéro d'ordre élevé.

Nous résumons maintenant les propriétés des polynômes de classe $\mathcal{T}^{\nu,\beta}$.

**Proposition 2.2.12.** *Soient $k \in \bar{\mathbb{N}}$, $\nu \in [0, +\infty)$, $\beta \in [0, +\infty)$, $s \in \mathbb{R}$ avec $s > \nu + 1$, et $P \in \mathcal{T}_{k+1}^{\nu,\beta}$. Alors*

*(i) $P$ se prolonge en un polynôme continu sur $\mathcal{P}_s(\mathbb{C})$ et il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C})$*

$$|P(z)| \leq C \|z\|_s^{k+1}$$

*(ii) Pour tout $s' < s + \beta - \frac{1}{2}$, le champ de vecteur hamiltonien $X_P$ se prolonge en une fonction bornée de $\mathcal{P}_s(\mathbb{C})$ vers $\mathcal{P}_{s'}(\mathbb{C})$. De surcroît, pour tout $s_0 \in (\nu + 1, s]$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $z \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C})$*

$$\|X_P(z)\|_{s'} \leq C \|z\|_s \|z\|_{s_0}^{(k-1)}. \tag{2.22}$$

*(iii) Supposons de plus que $P \in \mathcal{T}_{k+1}^{\nu,\beta,+}$ avec $\beta > 0$, alors le champ de vecteur hamiltonien $X_P$ se prolonge en une fonction bornée de $\mathcal{P}_s(\mathbb{C})$ vers $\mathcal{P}_s(\mathbb{C})$. En outre, pour tout $s_0 \in (\nu + 1, s]$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C})$*

$$\|X_P(z)\|_s \leq C \|z\|_s \|z\|_{s_0}^{(k-1)}. \tag{2.23}$$

*(iv) Supposons enfin que $P \in \mathcal{T}_{k+1}^{\nu,\beta}$ et $P$ est en* forme normale *au sens de la définition 2.2.11, alors le champ de vecteur hamiltonien $X_P$ se prolonge en une fonction bornée de $\mathcal{P}_s(\mathbb{C})$ vers $\mathcal{P}_s(\mathbb{C})$. En outre, pour tout $s_0 \in (\nu, s]$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C})$*

$$\|X_P(z)\|_s \leq C \, \|z\|_s \, \|z\|_{s_0}^{(k-1)} . \tag{2.24}$$

**Remarque 2.2.13.** *Puisque les polynômes homogènes constituent trivialement leur propre développement de Taylor en 0 , les assertions (iii) et (iv) impliquent que chaque élément de $\mathcal{T}_{k+1}^{\nu,\beta,+}$, ainsi que chaque élément de $\mathcal{T}_{k+1}^{\nu,\beta}$ en forme normale est déjà dans $\mathcal{H}^s$.*

Preuve. (i) Soit $P$ un polynôme homogène de degré $k+1$ dans $\mathcal{T}_{k+1}^{\nu,\beta}$ et pour $z \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C})$, écrivons

$$P(z) = \sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}^{k+1}} a_j \, z_{j_1} \dots z_{j_{k+1}} \, . \tag{2.25}$$

Nous avons, à l'aide de (2.18) et de $A(j) \leq 1$, $C(j) \geq 1$,

$$\begin{aligned}
|P(z)| &\leq C \sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}^{k+1}} \frac{\mu(j)^\nu}{C(j)^\beta} A(j)^N \prod_{i=1}^{k+1} |z_{j_i}| \\
&\leq C \sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}^{k+1}} \frac{\mu(j)^\nu}{\prod_{i=1}^{k+1} |j_i|^s} \prod_{i=1}^{k+1} |j_i|^s |z_{j_i}| \\
&\leq C \sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}^{k+1}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k+1} |j_i|^{s-\nu}} \prod_{i=1}^{k+1} |j_i|^s |z_{j_i}| \\
&\leq C \left( \sum_{l \in \bar{\mathbb{Z}}} \frac{1}{|l|^{2s-2\nu}} \right)^{\frac{k+1}{2}} \|z\|_s^{k+1}
\end{aligned}$$

où, dans la dernière inégalité, nous avons utilisé $k+1$ fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Puisque $s > \nu + 1/2$, la dernière somme converge et la première assertion est prouvée.

(ii) Nous devons estimer la dérivée du polynôme $P$ par rapport à chacune de ses variables. En invoquant (2.18), étant donné $N$, nous obtenons

$$\left|\frac{\partial P}{\partial z_l}\right| \leq C_N (k+1) \sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}^k} \frac{\mu(j,l)^\nu}{C(j,l)^\beta} A(j,l)^N |z_{j_1}| \dots |z_{j_k}| \, ,$$

où les quantités $\mu(j,l)$, $C(j,l)$ et $A(j,l)$ sont calculées pour le $k+1$-uplet formé par $j_1, \dots, j_k, l$. De surcroît

$$\begin{aligned}
||X_P(z)||_{s'}^2 &\leq C \sum_{l \in \bar{\mathbb{Z}}} \left( \sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}^k} \frac{|l|^{s'} \mu(j,l)^\nu}{C(j,l)^\beta} A(j,l)^N |z_{j_1}| \dots |z_{j_k}| \right)^2 \\
&\leq C(k!)^2 \sum_{l \in \bar{\mathbb{Z}}} \left( \sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}^k_>} \frac{|l|^{s'} \mu(j,l)^\nu}{C(j,l)^\beta} A(j,l)^N |z_{j_1}| \dots |z_{j_k}| \right)^2 \\
&\leq C' ||z||_{s_0}^{2(k-3)} \sum_{l \in \bar{\mathbb{Z}}} \left( \sum_{|j_1| \geq |j_2| \geq |j_3|} \frac{|l|^{s'} \mu(j,l)^\nu}{C(j,l)^\beta} A(j,l)^N |z_{j_1}| |z_{j_2}| |z_{j_3}| \right)^2
\end{aligned} \tag{2.26}$$

où $\bar{\mathbb{Z}}^k_>$ désigne l'ensemble des $k$-uplets $(j_1, \ldots, j_k)$ satisfaisant $|j_1| \geq |j_2| \geq \cdots \geq |j_k|$. Nous avons utilisé le résultat suivant dans la dernière inégalité :

**Lemme 2.2.14.** *Étant donnés $s \geq 0$, $s_0 > \frac{1}{2}$ et $z \in \ell^2_{s+s_0}$ nous avons*

$$\sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}} |j|^s |z_j| \leq C_{s_0} ||z||_{s+s_0} \,.$$

Preuve. Ce résultat est une conséquence banale de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}} |j|^s |z_j| = \sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}} \frac{1}{|j|^{s_0}} |j|^{s+s_0} |z_j| \leq \left( \sum_{j \in \bar{\mathbb{Z}}} \frac{1}{|j|^{2s_0}} \right)^{\frac{1}{2}} ||z||_{s+s_0} \,.$$

□

Avant de continuer la démonstration de l'assertion (ii) de la Proposition 2.2.12, nous donnons deux lemmes techniques qui estiment $A(j,l)$.

**Lemme 2.2.15.** *Étant donné un k-uplet $j \in \bar{\mathbb{Z}}^k_>$ et $l \in \bar{\mathbb{Z}}$, nous avons*

$$|l| A(j,l) \leq 2|j_1| \,.$$

Preuve. C'est clair si $|l| \leq 2|j_1|$, car $A(j,l) \leq 1$. Dans le cas contraire, l'ordre est le suivant : $|l| > 2|j_1| > |j_1| \geq |j_2|$ et

$$|l| A(j,l) = \frac{|l| \sqrt{|j_1 j_2|}}{\sqrt{|j_1 j_2|} + |l| - |j_1|} \leq \frac{|l| \sqrt{|j_1 j_2|}}{|l|/2} \leq 2|j_1| \,,$$

le lemme est prouvé. □

**Lemme 2.2.16.** *Étant donné un k-uplet $j \in \bar{\mathbb{Z}}^k_>$ et $l \in \bar{\mathbb{Z}}$ nous avons*

$$A(j,l) \leq \tilde{A}(j_1, j_2, l) := \begin{cases} 2 \frac{|j_2|}{|l| + |j_1| - |j_2|} & \text{if} \quad |l| \leq |j_2| \,, \\ 2 \frac{\sqrt{|l j_2|}}{\sqrt{|l j_2|} + ||j_1| - |l||} & \text{if} \quad |l| \geq |j_2| \,. \end{cases}$$

Preuve. si $|l| > 2|j_1|$, $A(j,l)$ s'écrit :

$$A(j,l) = \frac{\sqrt{|j_1 j_2|}}{\sqrt{|j_1 j_2|} + |l| - |j_1|} \,.$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sqrt{|j_1 j_2|} + |l| - |j_1| &= \sqrt{|l j_2|} + |l| - |j_1| - \sqrt{|j_2|}(\sqrt{|l|} - \sqrt{|j_1|}) \\ &= \sqrt{|l j_2|} + |l| - |j_1| - \sqrt{|j_2|} \frac{|l| - |j_1|}{\sqrt{|l|} + \sqrt{|j_1|}} \\ &\geq \sqrt{|l j_2|} + |l| - |j_1| - \sqrt{|j_1|} \frac{|l| - |j_1|}{\sqrt{|l|} + \sqrt{|j_1|}} \\ &\geq \sqrt{|l j_2|} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} (|l| - |j_1|) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A(j,l) \leq \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{|j_1 j_2|}}{\sqrt{|j_1 j_2|} + |l| - |j_1|} \leq 2 \frac{\sqrt{|l j_2|}}{\sqrt{|l j_2|} + |l| - |j_1|} .$$

Si $|j_2| \leq |l| \leq 2|j_1|$, alors $B(j,l)^2 = |j_2| \min(|l|, |j_1|) \in \left[\frac{|l j_2|}{2}, |l j_2|\right]$, de plus

$$A(j,l) \leq \frac{\sqrt{|l j_2|}}{1/\sqrt{2}\sqrt{|l j_2|} + ||l| - |j_1||} \leq 2 \frac{\sqrt{|l j_2|}}{\sqrt{|l j_2|} + ||l| - |j_1||} .$$

Enfin, si $|l| \leq |j_2|$ nous avons

$$A(j,l) = \frac{\sqrt{|l j_2|}}{\sqrt{|l j_2|} + |j_1| - |j_2|} \leq 2 \frac{|j_2|}{|l| + |j_1| - |j_2|} ,$$

et cela achève la preuve du lemme 2.2.16. □

Pour continuer la preuve de l'assertion (ii) de la proposition 2.2.12, nous définissons $0 < \varepsilon < s - s' - \frac{1}{2}$, et $N = s + 1 + \varepsilon$. À la vue de (2.26), nous décomposons :

$$||X_P(z)||_{s'}^2 \leq C \sum_{l \in \bar{\mathbb{Z}}} \left(T_1(l) + T_2(l)\right)^2 , \tag{2.27}$$

avec

$$\begin{aligned} T_1(l) &= \sum_{|j_1| \geq |j_2| \geq |j_3|, |j_2| > |l|} \frac{|l|^{s'} |\mu(j,l)|^\nu}{\max(|j_1|, |l|)^\beta} A(j,l)^N |z_{j_1}||z_{j_2}||z_{j_3}| \\ T_2(l) &= \sum_{|j_1| \geq |j_2| \geq |j_3|, |j_2| \leq |l|} \frac{|l|^{s'} |\mu(j,l)|^\nu}{\max(|j_1|, |l|)^\beta} A(j,l)^N |z_{j_1}||z_{j_2}||z_{j_3}| . \end{aligned}$$

Puisque $A(j,l) \leq 1$ et $N > \frac{1}{2} + s' + \varepsilon$, nous pouvons estimer $T_1(l)$ à l'aide des lemmes 2.2.15 et 2.2.16 :

$$\begin{aligned} T_1(l) &\leq C \sum_{|j_1| \geq |j_2| \geq |j_3|, |j_2| > |l|} |j_1|^{s'} |j_2|^\nu \tilde{A}(j_1, j_2, l)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} |z_{j_1}||z_{j_2}||z_{j_3}| \\ &\leq C||z||_{s_0} \sum_{|j_1| \geq |j_2|, |j_2| > |l|} \frac{1}{|l|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} |j_1|^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon} |z_{j_1}||j_2|^{\nu+\frac{1}{2}+\varepsilon} |z_{j_2}| \\ &\leq C||z||_{s_0} \frac{1}{|l|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} ||z||_s ||z||_{\nu+1+2\varepsilon} , \end{aligned}$$

par suite $T_1(l)$ est une suite $\ell^2$, dont la norme $\ell^2$ est bornée par $C||z||_{s_0}^2 ||z||_s$ en supposant $s_0 > \nu + 1 + 2\varepsilon$. Concernant $T_2(l)$, les lemmes 2.2.15 et 2.2.16 nous permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} T_2(l) &\leq C \sum_{|j_1| \geq |j_2| \geq |j_3|, |j_2| \leq |l|} \frac{1}{|l|^{s-s'+\beta}} |j_1|^s |j_2|^\nu \tilde{A}(j_1, j_2, l)^{N-s} |z_{j_1}||z_{j_2}||z_{j_3}| \\ &\leq C \frac{||z||_{s_0}}{|l|^{s-s'+\beta}} \sum_{|j_1| \geq |j_2|, |j_2| \leq |l|} \left(\frac{\sqrt{|l j_2|}}{1 + ||j_1| - |l||}\right)^{1+\varepsilon} |j_1|^s |z_{j_1}||j_2|^\nu |z_{j_2}| \\ &\leq C \frac{||z||_{s_0}}{|l|^{s-s'+\beta-(1+\varepsilon)/2}} \left(\sum_{j_2 \in \bar{\mathbb{Z}}} |j_2|^{\nu+(1+\varepsilon)/2} |z_{j_2}|\right) \sum_{j_1 \in \bar{\mathbb{Z}}} \frac{|j_1|^s |z_{j_1}|}{(1 + ||j_1| - |l||)^{1+\varepsilon}} . \end{aligned}$$

La dernière somme en $j_1$ est un produit de convolution des suites $|j_1|^s|z_{j_1}| \in \ell^2$ et $\frac{1}{(1+|j_1|)^{1+\varepsilon}} \in \ell^1$, par suite elle appartient à l'espace $\ell^2$ par rapport à l'indice $l$, dont la norme $\ell^2$ est bornée par $||z||_s$. Choisissons $\varepsilon > 0$ de sorte que $s - s' + \beta - (1+\varepsilon)/2 > 0$, la suite de terme général $T_2(l)$ est $\ell^2$, avec une norme bornée par

$$||T_2|| \leq C||z||_{s_0}||z||_{\nu+(1+\varepsilon)/2}||z||_s \leq C||z||_{s_0}^2||z||_s \,,$$

avec $s_0 > \nu + (1+\varepsilon)/2$. En combinant ces estimations $T_1$ et $T_2$, nous obtenons l'inégalité désirée.

(iii) Nous définissons $0 < \varepsilon < 1/12$ et $N = s + \frac{1}{2} + \varepsilon$. Nous avons, comme dans (ii), la première estimée

$$||X_P(z)||_s^2 \leq C||z||_{s_0}^{2(k-3)} \sum_{l\in\bar{\mathbb{Z}}} \left( \sum_{|j_1|\geq|j_2|\geq|j_3|} \frac{|l|^s \mu(j,l)^\nu}{C(j,l)^\beta(1+S(j,l))} A(j,l)^N |z_{j_1}||z_{j_2}||z_{j_3}| \right)^2 . \tag{2.28}$$

Nous pouvons aussi décomposer la somme en $j_1$, $j_2$ et $j_3$ en deux morceaux, $T_1^+(l)$ regroupant les termes $|j_2| > |l|$ et $T_2^+(l)$ regroupant ceux qui satisfont $|j_2| \leq |l|$. En suivant (ii), puisque $C(j,l) \geq 1$ et $1 + S(j,l) \geq 1$, nous obtenons pour $T_1^+$ :

$$\begin{aligned}
T_1^+(l) &\leq C \sum_{|j_1|\geq|j_2|\geq|j_3|,|j_2|>|l|} |l|^s|j_2|^\nu A(j,l)^N|z_{j_1}||z_{j_2}||z_{j_3}| \\
&\leq C \sum_{|j_1|\geq|j_2|\geq|j_3|,|j_2|>|l|} |l|^{1/2+\varepsilon}|j_1|^{s-1/2-\varepsilon}|j_2|^\nu A(j,l)^{N-(s-1/2-\varepsilon)}|z_{j_1}||z_{j_2}||z_{j_3}| \\
&\leq C||z||_{s_0} \sum_{|j_1|\geq|j_2|,|j_2|>|l|} |l|^{1/2+\varepsilon}|j_1|^{s-1/2-\varepsilon}|j_2|^\nu \tilde{A}(j_1,j_2,l)^{N-(s-1/2-\varepsilon)}|z_{j_1}||z_{j_2}| \\
&\leq C||z||_{s_0} \sum_{|j_1|\geq|j_2|,|j_2|>|l|} |l|^{s-N}|j_1|^{s-1/2-\varepsilon}|j_2|^{\nu+N-(s-1/2-\varepsilon)}|z_{j_1}||z_{j_2}| \\
&\leq C||z||_{s_0} \frac{1}{|l|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \sum_{|j_1|\geq|j_2|,|j_2|>|l|} |j_1|^{s-1/2-\varepsilon}|j_2|^{\nu+N-(s-1/2-\varepsilon)}|z_{j_1}||z_{j_2}| \\
&\leq C||z||_{s_0} \frac{1}{|l|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} ||z||_s||z||_{\nu+1+2\varepsilon} \,,
\end{aligned}$$

par suite $T_1^+(l)$ a une norme $\ell^2$ bornée par $C||z||_{s_0}^2||z||_s$ si $s_0 > \nu + 1 + 2\varepsilon$.

L'estimation de $T_2^+$ nécessite tous les facteurs présents dans la définition de $\mathcal{T}^{\nu,\beta,+}$ :

$$\begin{aligned}
T_2^+(l) &\leq C \sum_{|j_1|\geq|j_2|\geq|j_3|,|j_2|\leq|l|} \frac{|j_1|^s|j_2|^\nu}{\max(j_1,l)^\beta(1+||j_1|-|l||)} \tilde{A}(j_1,j_2,l)^{N-s}|z_{j_1}||z_{j_2}||z_{j_3}| \\
&\leq C||z||_{s_0} \sum_{|j_1|\geq|j_2|,|j_2|\leq|l|} \left( \frac{\sqrt{|lj_2|}}{1+||j_1|-|l||} \right)^\varepsilon \frac{1}{|l|^\beta(1+||j_1|-|l||)} |j_1|^s|z_{j_1}||j_2|^\nu|z_{j_2}| \\
&\leq C||z||_{s_0} \frac{1}{|l|^{\beta-\varepsilon/2}} \sum_{j_2\in\bar{\mathbb{Z}}} |j_2|^{\nu+\varepsilon/2}|z_{j_2}| \sum_{j_1\in\bar{\mathbb{Z}}} \frac{|j_1|^s|z_{j_1}|}{(1+||j_1|-|l||)^{1+\varepsilon}} \,.
\end{aligned}$$

De nouveau, la somme précédente en $j_1$ s'avère être un produit de convolution des $|j_1|^s|z_{j_1}| \in \ell^2$ et $\frac{1}{(1+|j_1|)^{1+\varepsilon}} \in \ell^1$. Choisissons alors $\varepsilon > 0$ de sorte que $\beta - \varepsilon/2 > 0$, la suite $T_2^+(l)$ est alors $\ell^2$ avec une norme bornée par

$$||T_2|| \leq C||z||_{s_0}||z||_{\nu+(1+\varepsilon)/2}||z||_s \leq C||z||_{s_0}^2||z||_s \,,$$

avec $s_0 > \nu + (1+\varepsilon)/2$. En combinant toutes ces estimations, nous concluons.

(iv) Soit $k+1 = 2m$. Comme dans (ii), nous obtenons

$$||X_P||_s^2 \leq C \sum_{l\in\bar{\mathbb{Z}}} \left( \sum_{j\in\bar{\mathbb{N}}_>^{m-1}} |l|^s |z_l| \frac{\mu(j,j,l,l)^\nu}{C(j,j,l,l)^\beta} |z_{j_1}||z_{-j_1}|\ldots|z_{j_{m-1}}||z_{-j_{m-1}}| \right)^2, \qquad (2.29)$$

en utilisant la même convention pour $\mu(j,j,l,l)$ et $C(j,j,l,l)$ que $\mu(j,l)$ and $C(j,l)$ : par exemple, $\mu(j,j,l,l)$ est le troisième plus grand entier parmi
$|j_1|, |j_1|, \ldots |j_{m-1}|, |j_{m-1}|, |l|$ et $|l|$, c'est-à-dire, si $j$ est ordonné, ou bien $\mu(j,j,l,l) = |j_1|$, et dans ce cas $C(j,j,l,l) = |l|$, ou bien $\mu(j,j,l,l) = |l|$ et dans ce cas $C(j,j,l,l) = |j_1|$. Remarquons que l'égalité $A(j,j,l,l) = 1$ n'est pas pertinente ici. La somme en $j$ se décompose en deux morceaux :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\bar{\mathbb{N}}_>^{m-1}, j_1\leq l} |l|^s |z_l| \frac{\mu(j,j,l,l)^\nu}{C(j,j,l,l)^\beta} |z_{j_1}||z_{-j_1}|\ldots|z_{j_{m-1}}||z_{-j_{m-1}}| \\
&\leq \sum_{j\in\bar{\mathbb{N}}_>^{m-1}, j_1\leq l} |l|^s |z_l| \frac{|j_1|^\nu}{|l|^\beta} |z_{j_1}||z_{-j_1}|\ldots|z_{j_{m-1}}||z_{-j_{m-1}}| \\
&\leq |l|^{s-\beta}|z_l| \sum_{j_1} j_1^\nu |z_{j_1}||z_{-j_1}|||z||_0^{2(m-2)} \\
&\leq |l|^{s-\beta}|z_l|||z||_{\nu/2}^2||z||_0^{2(m-2)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\bar{\mathbb{N}}_>^{m-1}, j_1> l} |l|^s |z_l| \frac{\mu(j,j,l,l)^\nu}{C(j,j,l,l)^\beta} |z_{j_1}||z_{-j_1}|\ldots|z_{j_{m-1}}||z_{-j_{m-1}}| \\
&\leq |l|^s|z_l| \sum_{j\in\bar{\mathbb{N}}_>^{m-1}} |j_1|^{\nu-\beta} |z_{j_1}||z_{-j_1}|\ldots|z_{j_{m-1}}||z_{-j_{m-1}}| \\
&\leq |l|^s|z_l|||z||_{(\nu-\beta)/2}^2||z||_0^{2(m-2)}
\end{aligned}$$

En incluant ces deux estimées dans (2.29) nous obtenons (2.23). □

La seconde propriété essentielle satisfaite par les polynômes de $\mathcal{T}_k^{\nu,\beta}$ est donnée par la proposition suivante

**Proposition 2.2.17.** *Soient $k_1, k_2 \geq 2$, $\nu_1, \nu_2 \geq 0$ et $\beta > 0$, l'application $(P,Q) \mapsto \{P,Q\}$ est continue de $\mathcal{T}_{k_1+1}^{\nu_1,\beta,+} \times \mathcal{T}_{k_2+1}^{\nu_2,\beta}$ vers $\mathcal{T}_{k_1+k_2}^{\nu',\beta}$ pour $\nu' = 2(\nu_1+\nu_2)+1$.*

Preuve. Nous supposons que $P \in \mathcal{T}_{k_1+1}^{\nu_1,\beta,+}$ et $Q \in \mathcal{T}_{k_2+1}^{\nu_2,\beta}$ sont deux polynômes homogènes et nous écrivons

$$P(z) = \sum_{j\in\bar{\mathbb{Z}}^{k_1+1}} a_j\, z_{j_1}\ldots z_{j_{k_1+1}}$$

et

$$Q(z) = \sum_{i\in\bar{\mathbb{Z}}^{k_2+1}} b_i\, z_{i_1}\ldots z_{i_{k_2+1}}\ .$$

La symétrie de (2.18) par rapport aux indices concernés nous permet d'obtenir facilement

$$\{P,Q\}(z) = \sum_{(j,i)\in\bar{\mathbb{Z}}^{k_1+k_2}} c_{j,i}\, z_{j_1}\dots z_{j_{k_1}} z_{i_1}\dots z_{i_{k_2}}$$

avec

$$|c_{j,i}| \le c_{N,N'} \sum_{l\in\bar{\mathbb{Z}}} \frac{\mu(j,l)^{\nu_1}}{C(j,l)^\beta(1+S(j,l))} A(j,l)^N \frac{\mu(i,l)^{\nu_2}}{C(i,l)^\beta} A(i,l)^{N'}.$$

Par conséquent, il nous reste à prouver que pour chaque $M \ge 1$, il existe $N, N' \ge 1$, $C > 0$ tels que pour tous $j \in \bar{\mathbb{Z}}^{k_1}$ et $i \in \bar{\mathbb{Z}}^{k_2}$,

$$\sum_{l\in\bar{\mathbb{Z}}} \frac{\mu(j,l)^{\nu_1}}{C(j,l)^\beta(1+S(j,l))} A(j,l)^N \frac{\mu(i,l)^{\nu_2}}{C(i,l)^\beta} A(i,l)^{N'} \le C \frac{\mu(j,i)^{\nu'}}{C(i,j)^\beta} A(j,i)^M \tag{2.30}$$

avec $\nu' = 2(\nu_1+\nu_2)+1$.
En vue de simplifier les notations, et parce que cela ne change pas les estimées de (2.30), nous allons faire les suppositions suivantes

- $k_1 = k_2 = k$
- tous les indices sont positifs $j_1,\dots,j_k, i_1,\dots,i_k \ge 1$.
- $j$ et $i$ sont ordonnés : $j_1 \ge \dots \ge j_k$ et $i_1 \ge \dots \ge i_k$.

Nous commençons par deux lemmes techniques dont les preuves ont été placées juste après.

**Lemme 2.2.18.** *Il existe $C > 0$ tel que pour tous $j \in \bar{\mathbb{Z}}^{k_1}$, $i \in \bar{\mathbb{Z}}^{k_2}$ et $l \in \bar{\mathbb{Z}}$ nous avons*

$$A(j,l)^2 A(i,l)^2 \le C A(i,j). \tag{2.31}$$

**Lemme 2.2.19.** *Il existe $C > 0$ tel que pour tous $j \in \bar{\mathbb{Z}}^{k_1}$, $i \in \bar{\mathbb{Z}}^{k_2}$ et $l \in \bar{\mathbb{Z}}$ nous avons*

$$\max(\mu(j,l)A(i,l)^2, \mu(i,l)A(j,l)^2) \le C\mu(i,j)^2. \tag{2.32}$$

À l'aide de ces lemmes, la preuve de (2.30) découlera de l'inégalité

$$\sum_{l\in\bar{\mathbb{Z}}} \frac{1}{C(j,l)^\beta(1+S(j,l))} \frac{A(i,l)^2}{C(i,l)^\beta} \le C \frac{\mu(j,i)}{C(i,j)^\beta}.$$

En remarquant $C(i,l)C(j,l) \ge C(i,j)l$, nous voyons qu'il suffit de vérifier

$$\sum_{l\in\bar{\mathbb{Z}}} \frac{A(i,l)^2}{(1+S(j,l))l^\beta} \le C\mu(j,i).$$

Décomposons la somme en deux morceaux, $I_1 = \sum_{l>j_2}$ et $I_2 = \sum_{l\le j_2}$. Pour la première somme, nous avons

$$I_1 = \sum_{l>j_2} \frac{A(i,l)^2}{(1+S(j,l))l^\beta} \le \sum_{l\in\bar{\mathbb{Z}}} \frac{1}{(1+|l-j_1|)l^\beta} \le C,$$

tandis que pour la seconde :

$$I_2 = \sum_{l\le j_2} \frac{A(i,l)^2}{(1+S(j,l))l^\beta} \le \sum_{l\le j_2} \frac{A(i,l)^2}{l^\beta}.$$

Dans la dernière somme, si $j_2 < \mu(i,j)$ alors

$$I_2 \le j_2 \le \mu(i,j).$$

D'autre part, si $\mu(i,j) \le j_2$, alors nous décomposons la somme $I_2$ en deux morceaux, $I_{2,1} = \sum_{l<2i_1}$ et $I_{2,2} = \sum_{l\ge 2i_1}$. Puisque $i_1 \le \mu(i,j) = \max(i_1, j_3)$ nous avons

$$I_{2,1} = \sum_{l\le 2i_1} \frac{A(i,l)^2}{l^\beta} \le 2i_1 \le 2\mu(i,j).$$

Enfin, quand $l \ge 2i_1$, il vient $S(i,l) \ge l/2$ et $B(i,l)^2 = i_1 i_2 \le i_2 l/2 \le \mu(i,j) l/2$ et donc $A(i,l) \le \sqrt{2\mu(i,j)} l^{-1/2}$ ce qui nous mène à

$$I_{2,2} = \sum_{2i_1 \le l \le j_2} \frac{A(i,l)^2}{l^\beta} \le C\mu(i,j) \sum_{l\in\bar{\mathbb{N}}} \frac{1}{l^{1+\beta}} \le C\mu(i,j).$$

□

*Preuve du lemme 2.2.18* — L'estimation (2.31), étant symétrique par rapport à $i$ et $j$, nous pouvons supposer que $j_1 \ge i_1$. Nous considérons trois cas, dépendant de la position de $l$ par rapport à $i_1$ et $j_1$.

**Premier cas $l \ge j_1$ :**
Nous avons $S(i,l) = |i_1 - l| \ge |i_1 - j_1| \ge S(i,j)$ et $B(i,l) = (i_1 i_2)^{1/2} \le B(i,j)$. Par conséquent

$$A(i,l) = \frac{B(i,l)}{B(i,l)+S(i,l)} \le \frac{B(i,l)}{B(i,l)+S(i,j)} \le \frac{B(i,j)}{B(i,j)+S(i,j)} = A(i,j),$$

en utilisant $A(j,l) \le 1$, (2.31) est obtenue.

**Deuxième cas** $l \le i_1$ :
Comme dans le premier cas, nous avons $S(j,l) \ge S(i,j)$ et $B(j,l) = (j_2 \max(j_3, l))^{1/2} \le (j_2 \max(j_3, i_1))^{1/2} \le B(i,j)$ et ainsi

$$A(j,l) \le A(i,j).$$

**Troisième cas** $i_1 < l < j_1$ :
C'est le cas le plus complexe et nous devons distinguer si l'on a $i_1 \ge j_2$ ou pas.
*Sous-cas 1.* $i_1 \ge j_2$ :
Nous avons $B(i,l) \le B(i,j)$, et donc si $S(i,l) = |i_1 - l| \ge \frac{1}{2}|i_1 - j_1| = \frac{1}{2}S(i,j)$ nous obtenons $A(j,l) \le 2A(i,j)$ et (2.31) est valide. Maintenant si $S(i,l) < \frac{1}{2}S(i,j)$ alors $S(j,l) \ge \frac{1}{2}S(i,j)$ Puisque $S(i,l) + S(j,l) \ge S(i,j)$. De surcroît, si $B(j,l) \le B(i,j)$ alors

$$A(j,l) = \frac{B(j,l)}{B(j,l)+S(j,l)} \le 2\frac{B(j,l)}{B(j,l)+S(i,j)} \le 2\frac{B(i,j)}{B(i,j)+S(i,j)} = 2A(i,j)\,,$$

et (2.31) est vraie. Si $B(j,l) > B(i,j)$, alors en invoquant

$$B(j,l)^2 = j_2 l = j_2 i_1 + j_2(l - i_1) \le B(i,j)^2 + j_2 S(i,l) \le B(i,j)^2 + \frac{1}{2}B(i,j)S(i,j)\,,$$

nous comprenons que

$$A(j,l)^2 \le \frac{B(j,l)^2}{(B(i,j)+\frac{1}{2}S(i,j))^2} \le 2\frac{B(i,j)^2 + B(i,j)S(i,j)}{(B(i,j)+S(i,j))^2} \le 2(A(i,j)^2 + A(i,j))\,,$$

ainsi (2.31) est aussi vraie dans ce cas, puisque $A(i,j) \le 1$.

*Sous-cas 2.* $i_1 \leq j_2$ :
Nous avons $B(i,l) \leq B(i,j)$ donc si de surcroît $S(i,j) \leq 2S(i,l)$ alors $A(i,l) \leq 2A(i,j)$ et (2.31) est vraie. Donc nous pouvons supposer $2S(i,l) < S(i,j)$ ce qui implique $S(i,j) \leq 2S(j,l)$ car $S(i,l) + S(j,l) \geq S(i,j)$. Si en outre $l \leq j_3$, $B(j,l) = B(j) \leq B(i,j)$ et donc $A(j,l) \leq 2A(i,j)$ et (2.31) est encore vraie. Donc nous supposons $j_3 \leq l$ et nous avons

$$B(j,l)^2 = lj_2 = i_1 j_2 + j_2(l - i_1) \leq B(i,j)^2 + j_2 S(i,l).$$

Si $S(i,l) \leq l/2$ alors nous déduisons $B(j,l)^2 \leq 2B(j,l)^2$ et (2.31) est satisfaite. Il reste à considérer le cas $S(i,l) > l/2$ qui implique $i_1 < l/2$ ainsi que

$$A(i,l) \leq \frac{i_1}{i_1 + l/2} \leq 2\frac{i_1}{l}. \tag{2.33}$$

Soit $n \geq 1$ tel que $\frac{l}{2^{n+1}} \leq i_1 \leq \frac{l}{2^n}$ nous obtenons de (2.33)

$$A(i,l) \leq \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{2.34}$$

D'un autre coté

$$A(j,l) \leq 2\frac{(lj_2)^{1/2}}{(lj_2)^{1/2} + S(i,j)} \leq 2\frac{(lj_2)^{1/2}}{(i_1 j_2)^{1/2} + S(i,j)} \tag{2.35}$$

et

$$A(i,j) \geq \frac{(i_1 j_2)^{1/2}}{(i_1 j_2)^{1/2} + S(i,j)} \geq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(lj_2)^{1/2}}{(i_1 j_2)^{1/2} + S(i,j)}. \tag{2.36}$$

En combinant (2.34), (2.35) et (2.36) nous concluons

$$A(i,l)A(j,l) \leq 8A(i,j). \qquad \square$$

*Preuve du lemme 2.2.19* — L'estimation (2.32) étant symétrique par rapport à $i$ et $j$, nous pouvons supposer $j_1 \geq i_1$. Si en outre $i_1 \geq j_2$ alors on vérifie que

$$\mu(i,l) \leq \mu(i,j) \text{ et } \mu(j,l) \leq \mu(i,j)$$

et (2.32) est satisfait.
Dans le cas $j_1 \geq j_2 \geq i_1$ nous avons encore $\mu(i,l) \leq \mu(i,j)$ mais $\mu(j,l)$ peut être plus grand que $\mu(i,j)$. En réalité si $\mu(j,l) \leq 2\mu(i,j)$, l'estimation (2.32) est encore trivialement vraie. Par conséquent, il reste à considéré le cas où $\mu(j,l) > 2\mu(i,j)$. Remarquons que dans ce cas $i_1 \leq \mu(i,j) \leq \frac{\mu(j,l)}{2} \leq l/2$ et donc $S(i,l) = |i_1 - l| \geq l/2$ ce qui nous amène à

$$A(i,l) \leq \frac{(i_1 i_2)^{1/2}}{S(i,l)} \leq \frac{(2i_2)^{1/2}}{l^{1/2}} \leq \frac{(2\mu(i,j))^{1/2}}{l^{1/2}}.$$

Nous obtenons alors

$$\mu(j,l)A(i,l)^2 \leq lA(i,l)^2 \leq 2\mu(i,j)^2.\square$$

Nous finissons cette partie par une proposition concernant les transformations de Lie de polynômes homogènes $\chi \in \mathcal{T}_l^{\delta,\beta,+}$, i.e. le flot au temps 1 du champ de vecteur hamiltonien $X_\chi$.

**Proposition 2.2.20.** *Soit $\chi$ un polynôme homogène réel dans $\mathcal{T}_l^{\delta,\beta,+}$ avec $\delta \geq 0$, $\beta > 0$, $l \geq 3$, $s > s_1 := \delta + 3/2$ et désignons par $\phi$ la transformation de Lie de $\chi$. Nous avons* *(i)* $\phi$ *est une transformation canonique analytique définie sur une boule* $B_\epsilon$ *de centre* $0$ *et de rayon* $\epsilon$ *dans* $\mathcal{P}_s$ *vers une boule* $B_{2\epsilon}$ *de* $\mathcal{P}_s$ *et nous avons*

$$\|\phi(z) - z\|_s \leq C_s \|z\|_s^2 \text{ pour tout } z \in B_\varepsilon. \tag{2.37}$$

*En particulier si* $F \in \mathcal{H}^s$ *avec* $s > s_1$ *alors* $F \circ \phi \in \mathcal{H}^s$*. En outre, si* $F$ *est réelle alors* $F \circ \phi$ *est aussi réelle.*

*(ii) Soient* $P \in \mathcal{T}_n^{\nu,\beta} \cap \mathcal{H}^s$*,* $\nu \geq 0$*,* $n \geq 3$ *et fixons un entier* $r \geq n$*. Alors*

$$P \circ \phi = Q_r + R_r$$

*où :*
*-* $Q_r$ *est un polynôme de degré* $\leq r$*, appartenant à* $\mathcal{T}^{\nu',\beta} \cap \mathcal{H}^s$ *avec* $\nu' = 2^{r-n}\nu + (2^{r-n} - 1)(2\beta + 1)$*,*
*-* $R_r$ *est un Hamiltonien de* $\mathcal{T}^{\nu'',\beta} \cap \mathcal{H}^s$ *avec* $\nu'' = 2^{r-n+1}\nu + (2^{r-n+1} - 1)(2\beta + 1)$*, ayant l'origine comme zéro d'ordre* $\geq r + 1$*.*

Preuve. (i) Puisque $\chi \in \mathcal{T}_l^{\delta,\beta,+}$, la proposition 2.2.12(iii) assure que $X_\chi \in C^\infty(\mathcal{P}_s, \mathcal{P}_s)$ si $s > s_1 = \delta + 3/2$. En particulier, si $s > s_1$, le flot $\Phi^t$ engendré par le champ de vecteur $X_\chi$ transporte un voisinage ouvert de l'origine de $\mathcal{P}_s$ vers un voisinage ouvert de l'origine de $\mathcal{P}_s$. Remarquons que le caractère réel de $\chi$ nous permet d'affirmer que $\Phi^t$ conserve la partie réelle de $\mathcal{P}_s$, $\{(\xi, \bar{\xi}) \in \mathcal{P}_s\}$. En outre, nous avons pour $z \in \mathcal{P}_s$ suffisamment petit

$$\Phi^t(z) - z = \int_0^t X_\chi(\Phi^{t'}(z))dt'$$

et puisque $\chi$ a un zéro d'ordre $\geq 3$, la proposition 2.2.12(iii) nous amène à

$$\left\|\Phi^t(z) - z\right\|_s \leq C_s \int_0^t \left\|\Phi_\chi^{t'}(z)\right\|_s^2 dt'.$$

Un classique argument de type Bootstrap assure l'existence de $\epsilon > 0$ tel que le flot $B_\varepsilon \ni z \mapsto \Phi_\chi^t(z) \in B_{2\varepsilon}$ est bien défini et régulier pour $0 \leq t \leq 1$. En plus, la transformation de Lie $\phi = \Phi^1$ satisfait (2.37).
D'autre part, par simple composition nous obtenons que si $F \in \mathcal{H}^s$ avec $s > s_1$, alors $F \circ \phi \in C^\infty(B_\epsilon, \mathbb{C})$. La formule

$$X_{F\circ\phi}(z) = (D\phi(z))^\star X_F(\phi(z)),$$

nous permet de déduire que $X_{F\circ\phi} \in C^\infty(B_\epsilon, \mathcal{P}_s)$. Nous devons maintenant examiner les propriétés des polynômes de Taylor de $F \circ \phi$. Notons $F_k$ (resp. $(F \circ \phi)_k$) le polynôme homogène de degré $k$ de Taylor $F$ (resp $F \circ \phi$), et posons $F_k^{[0]} = F_k$, $F_k^{[j+1]} = \{F_k, \chi\}$, nous avons

$$(F \circ \phi)_k(z) = \sum_{j\geq 0, k'\geq 0, k'+j(l-2)=k} F_{k'}^{[j]}(z),$$

puisque $\chi$ est lui-même un polynôme homogène de degré $l$. Il est suffisant de prouver que le crochet de Poisson de $F_k \in \mathcal{H}^s$ avec $\chi$ appartient à $\mathcal{H}^s$.
En utilisant la forme symplectique (constante) $\omega$ sur $\mathcal{P}_s$, nous obtenons $\{F_k, \chi\}(z) = \omega(X_{F_k}, X_\chi)$, et donc $\{F_k, \chi\} \in C^\infty(B_\epsilon, \mathbb{C})$. En plus

$$X_{\{F_k,\chi\}}(z) = [X_{F_k}, X_\chi] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(X_{F_k} - \Phi_*^t(X_{F_k}))(z)\,.$$

Puisque $\Phi^t$ est le flot d'un hamiltonien régulier $\chi \in C^\infty(B_\epsilon, \mathbb{R})$, le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que l'application $(t,z) \mapsto \Phi^t_*(X_{F_k})(z)$ est dans $C^\infty([-1,1] \times B_\epsilon, \mathcal{P}_s)$. Maintenant , $X_{\{F_k,\chi\}}$ n'est autre que la dérivée temporelle au temps 0, donc $X_{\{F_k,\chi\}} \in C^\infty(B_\epsilon, \mathcal{P}_s)$ et la preuve est finie.

(ii) Par calcul direct, il vient

$$\frac{d^k}{dt^k} P \circ \Phi^t(z)\big|_{t=0} = P^{[k]}(z)$$

avec la même notation $P^{[k+1]} = \{P^{[k]}, \chi\}$ et $P^{[0]} = P$. Par conséquent, par application de la formule de Taylor à $P \circ \Phi^t(z)$ enter $t = 0$ et $t = 1$ nous déduisons

$$P \circ \phi(z) = \sum_{k=0}^{r-n} \frac{1}{n!} P^{[k]}(z) + \frac{1}{(r-n)!} \int_0^1 (1-t)^r P^{[r-n+1]}(\Phi^t(z)) dt. \tag{2.38}$$

Remarquons que $P^{[k]}(z)$ est un polynôme homogène de degré $n + k(l-2)$ et, la proposition 2.2.17 assure que $P^{[k]}(z) \in \mathcal{T}^{2^k\nu + (2^k-1)(2\delta+1),\beta}$. Ensuite, $P^{[k]}(z)$ est un polynôme de Taylor de $P \circ \phi \in \mathcal{H}^s$, donc appartient à $\mathcal{H}^s$. Par suite (2.38) se décompose en la somme d'un polynôme de degré $r$ dans $\mathcal{T}_r^{\nu',\beta}$et d'une fonction de $\mathcal{H}^s$ ayant l'origine comme zéro d'ordre $r+1$. $\square$

### 2.2.3 Le théorème des formes normales de Birkhoff

Nous commençons par la résolution de l'équation homologique et énonçons le théorème des formes normales.

**Lemme 2.2.21.** *Soit $\nu \in [0, +\infty)$ et supposons que le vecteur-fréquence de $H_0$ est fortement non résonant (voir Définition 2.2.4). Soit $Q$ un polynôme homogène réel de degré $k$ de $\mathcal{T}_k^{\nu,\beta}$, il existe $\nu' > \nu$, $Z$ et $\chi$ deux polynômes homogènes réels de degré $k$, respectivement dans $\mathcal{T}_k^{\nu',\beta}$ et $\mathcal{T}_k^{\nu',\beta,+}$, qui satisfont*

$$\{H_0, \chi\} + Q = Z \tag{2.39}$$

*et*

$$\{Z, I_j\} = 0 \quad \forall j \geq 1 \tag{2.40}$$

*En plus, $Z$ est en forme normale, $Z$ et $\chi$ appartiennent tous les deux à $\mathcal{H}^s$ pour $s > \nu' + 1$.*

Preuve. Pour tous $j \in \bar{\mathbb{N}}^{k_1}$ et $l \in \bar{\mathbb{N}}^{k_2}$ avec $k_1 + k_2 = k$ nous notons

$$\xi^{(j)}\eta^{(l)} = \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_{k_1}} \eta_{l_1} \ldots \eta_{l_{k_2}}.$$

On a

$$\{H_0, \xi^{(j)}\eta^{(l)}\} = -i\Omega(j,l)\xi^{(j)}\eta^{(l)}$$

avec

$$\Omega(j,l) := \omega_{j_1} + \ldots + \omega_{j_{k_1}} - \omega_{l_1} - \ldots - \omega_{l_{k_2}}.$$

Soit $Q \in \mathcal{T}_k^{\nu,\beta}$

$$Q = \sum_{k_1=0}^{k} \sum_{(j,l) \in \bar{\mathbb{N}}^{k_1} \times \bar{\mathbb{N}}^{k-k_1}} a_{jl} \xi^{(j)} \eta^{(l)}$$

Définissons $\chi$ et $Z$

$$\chi = \sum_{k_1=0}^{k} \sum_{(j,l)\in\bar{\mathbb{N}}^{k_1}\times\bar{\mathbb{N}}^{k-k_1}} b_{jl}\xi^{(j)}\eta^{(l)}, \qquad Z = \sum_{k_1=0}^{k} \sum_{(j,l)\in\bar{\mathbb{N}}^{k_1}\times\bar{\mathbb{N}}^{k-k_1}} c_{jl}\xi^{(j)}\eta^{(l)}$$

où

$$b_{jl} = i\Omega(j,l)^{-1}a_{jl}, \quad c_{jl} = 0 \quad \text{si } \{j_1,\dots,j_{k_1}\} \neq \{l_1,\dots,l_{k_2}\} \tag{2.41}$$

et

$$b_{jl} = 0, \quad c_{jl} = a_{jl} \quad \text{si } \{j_1,\dots,j_{k_1}\} = \{l_1,\dots,l_{k_2}\}. \tag{2.42}$$

Ainsi, (2.39) est valide. Puisque $\omega$ est fortement non résonant, il existe $\gamma$ et $\alpha$ tels que

$$|\Omega(j,l)| \geq \gamma \frac{1+S(j,l)}{\mu(j,l)^\alpha}$$

pour tous $(j,l) \in \bar{\mathbb{N}}^k$ avec $\{j_1,\dots,j_{k_1}\} \neq \{l_1,\dots,l_{k_2}\}$. Par suite, d'après les définitions 2.2.5 et 2.2.6, le polynôme $\chi$ appartient à $\mathcal{T}_k^{\nu',\beta,+}$ tandis que le polynôme $Z$ appartient à $\mathcal{T}_k^{\nu',\beta}$ avec $\nu' = \nu + \alpha$.

Remarquons que $Z$ est en forme normale. De surcroît, $Z$ satisfait par construction (2.40). Remarquons que le caractère réel de $Q$ est équivalent à la relation de symétrie $\bar{a}_{jl} = a_{lj}$. En prenant compte de $\Omega_{lj} = -\Omega_{jl}$, cette symétrie est encore vérifiée par les polynômes $\chi$ et $Z$. Finalement, $\chi$ et $Z$ appartiennent à $\mathcal{H}^s$, puisqu'ils sont homogènes (voir la proposition 2.2.12 (iii) et (iv)). □

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de cette partie :

**Théorème 2.2.22.** *Supposons que $P$ est un hamiltonien réel appartenant à $\mathcal{H}^s$ pour tout $s$ suffisamment grand ainsi qu'à la classe $\mathcal{T}^{\nu,\beta}$ pour certains $\nu \geq 0$ et $\beta > 0$. Supposons aussi que $\omega$ est fortement non résonant (cf. Définition 2.2.4) et satisfait* (2.12) *pour un certain $\bar{d} \geq 0$. Alors pour tout $r \geq 3$ il existe $s_0 > 0$ et pour tout $s \geq s_0$ il existe $\mathbb{U}_s$, $\mathcal{V}_s$ deux voisinages de l'origine de $\mathcal{P}_s$, et enfin $\tau_s : \mathcal{V}_s \to \mathbb{U}_s$ une transformation canonique réelle analytique dont la restriction à $\mathcal{V}_s$ of $\tau := \tau_{s_0}$ transforme $H = H_0 + P$ en une forme normale perturbée d'un terme correctif d'ordre $r$, c'est-à-dire*

$$H \circ \tau = H_0 + Z + R$$

*avec*

*(a) $Z$ est un polynôme réel continu homogène de degré $r$ à champ de vecteur régulier (i.e. $Z \in \mathcal{H}^s$) et qui ne dépend que des actions $Z = Z(I)$.*
*(b) $R \in \mathcal{H}^s$ est réel e $\|X_R(z)\|_s \leq C_s \|z\|_s^r$ pour tout $z \in \mathcal{V}_s$.*
*(c) $\tau$ est proche de l'identité : $\|\tau(z) - z\|_s \leq C_s \|z\|_s^2$ pour tout $z \in \mathcal{V}_s$.*

Preuve. La preuve est similaire au théorème des formes normales de Birkhoff présent dans [Gré07] ou [Bam07]. La principale différence a déjà été signalée : nous devons vérifier à chaque étape la régularité $\mathcal{H}^s$ des fonctions hamiltoniennes, indépendamment de l'appartenance à $\mathcal{T}^{\nu,\beta}$ (en effet l'implication $P \in \mathcal{T}^{\nu,\beta} \Rightarrow P \in \mathcal{H}^s$ est malheureusement fausse).
Fixons $r \geq 3$, l'idée est de construire par récurrence pour $k = 3,\dots,r$, un voisinage $\mathcal{V}_k$ de l'origine $0 \in \mathcal{P}_s$ ($s$ suffisamment grand et fonction de $r$), une transformation canonique $\tau_k$, définie sur $\mathcal{V}_k$, une suite croissante de nombres $(\nu_k)_{k=3,\dots,r}$ et enfin des hamiltoniens réels $Z_k, P_{k+1}, Q_{k+2}, R_k$ tels que

$$H_k := H \circ \tau_k = H_0 + Z_k + P_{k+1} + Q_{k+2} + R_k\,, \tag{2.43}$$

et

(i) $Z_k$ est un polynôme de $k$ dans $\mathcal{T}^{\nu_k,\beta} \cap \mathcal{H}^s$ ayant l'origine comme zéro d'ordre $\geq 3$ et $Z_k$ ne dépend que des (nouvelles) actions : $\{Z_k, I_j\} = 0$ pour tout $j \geq 1$.

(ii) $P_{k+1}$ est un polynôme homogène de degré $k+1$ de $\mathcal{T}_{k+1}^{\nu_k,\beta} \cap \mathcal{H}^s$.

(iii) $Q_{k+2}$ est un polynôme de degré $r+1$ dans $\mathcal{T}^{\nu_k,\beta} \cap \mathcal{H}^s$ ayant l'origine comme zéro d'ordre $\geq k+2$.

(iv) $R_k$ est un Hamiltonien régulier appartenant à $\mathcal{H}^s$ qui admet l'origine comme zéro d'ordre $r+2$.

D'abord nous fixons $s > \nu_r + 3/2$ afin de pouvoir appliquer la Proposition 2.2.12 à chaque étape ($\nu_r$ sera défini plus tard indépendamment de $s$). Alors, nous remarquons que (2.43) à l'ordre $r$ prouve le Théorème 2.2.22 avec $Z = Z_r$ et $R = P_{r+1} + R_r$ (puisque $Q_{r+2} = 0$). En réalité, puisque $R = P_{r+1} + R_r$ appartient à $\mathcal{H}^s$ et admet l'origine comme zéro d'ordre $\geq r+1$, nous pouvons appliquer le lemme 2.2.2 :

$$\|X_R(z)\|_s \leq C_s \|z\|_s^r. \tag{2.44}$$

sur un certain voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_r$ de l'origine $0 \in \mathcal{P}_s$.

À l'étape initiale (par commodité, il s'agira de l'étape $k=2$), l'hamiltonien $H = H_0 + P$ à la forme désirée (2.43) avec $\tau_2 = I$, $\nu_2 = \nu$, $Z_2 = 0$, $P_3$ étant le polynôme de Taylor de $P$ de degré 3, $Q_4$ celui de degré $r+1$ auquel on a soustrait $P_3$ et bien entendu $R_2 = P - P_3 - Q_4$.

Nous passons maintenant de l'étape $k$ à $k+1$.

Nous allons chercher $\tau_{k+1}$ sous la forme $\tau_k \circ \phi_{k+1}$ où $\phi_{k+1}$ est la transformation de Lie d'un polynôme homogène $\chi_{k+1}$ de degré $k+1$.

Nous décomposons $H_k \circ \phi_{k+1}$ comme suit

$$\begin{aligned}
H_k \circ \phi_{k+1} &= H_0 + Z_k + \{H_0, \chi_{k+1}\} + P_{k+1} && (2.45)\\
&+ H_0 \circ \phi_{k+1} - H_0 - \{H_0, \chi_{k+1}\} && (2.46)\\
&+ Z_k \circ \phi_{k+1} - Z_k && (2.47)\\
&+ P_{k+1} \circ \phi_{k+1} - P_{k+1} && (2.48)\\
&+ Q_{k+2} \circ \phi_{k+1} && (2.49)\\
&+ R_k \circ \phi_{k+1}\ . && (2.50)
\end{aligned}$$

À l'aide du lemme 2.2.21, nous choisissons $\chi_{k+1}$ dans $\mathcal{T}_{k+1}^{\nu_k',\beta,+}$ de sorte que

$$\hat{Z}_{k+1} := \{H_0, \chi_{k+1}\} + P_{k+1} \tag{2.51}$$

est un polynôme homogène réel de degré $k+1$ dans $\mathcal{T}_{k+1}^{\nu_k',\beta}$. Nous posons alors $Z_{k+1} = Z_k + \hat{Z}_{k+1}$, qui est de degré $k+1$ et admet l'origine comme zéro d'ordre $\geq 3$. Le membre droit de (2.45) devient $H_0 + Z_{k+1}$. Rappelons par ailleurs que $\nu_k' = \nu_k + \alpha$, où $\alpha$ est déterminé par $\omega$, indépendamment de $r$ et $s$. D'après la Proposition 2.2.20, la transformation de Lie de $\chi_{k+1}$ est bien définie et régulière sur un voisinage $\mathcal{V}_{k+1} \subset \mathcal{V}_k$ et, pour $z \in \mathcal{V}_{k+1}$ nous avons

$$\|\phi_{k+1}(z) - z\|_s \leq C \|z\|_s^2.$$

Par suite, en examinant les Proposition 2.2.17, Proposition 2.2.20 et formule (2.38), nous trouvons que (2.47), (2.48), (2.49) et (2.50) sont des hamiltoniens réguliers ayant l'origine comme zéros d'ordre $k+2$. Par exemple, concernant (2.47), on obtient à l'aide de la formule de Taylor que pour tout $z \in \mathcal{V}_{k+1}$ on a

$$Z_k \circ \phi_{k+1}(z) - Z_k(z) = \{Z_k, \chi_{k+1}\}(z) + \int_0^1 (1-t)\{\{Z_k, \chi_{k+1}\}, \chi_{k+1}\}(\Phi^t_{\chi_{k+1}}(z))\ dt$$

et $\{Z_k, \chi_{k+1}\}$ est un polynôme ayant l'origine comme zéro d'ordre $3 + \text{degree}(\chi_{k+1}) - 2 = k+2$ tandis que le terme intégral est un hamiltonien régulier ayant un zéro d'ordre $2k+1$. Donc si $2k+1 \geq r+2$ le terme intégral apporte une contribution à $R_{k+1}$ et si ce n'est pas le cas, nous devons utiliser la formule de Taylor à un ordre plus élevé.
Par conséquent, la somme de (2.47), (2.48), (2.49) et (2.50) se décompose $\tilde{P}_{k+2} + \tilde{Q}_{k+3} + \tilde{R}_{k+1}$ avec $\tilde{P}_{k+2}$, $\tilde{Q}_{k+3}$ où $\tilde{R}_{k+1}$ satisfait les propriétés (ii), (iii) et (iv) au rang $k+1$ (avec $\nu_{k+1} = k\nu'_k + \nu_k + k + 2$).
Concernant le terme (2.46), on doit procéder différemment car $H_0$ n'appartient par à $\mathcal{H}^s$. Remarquons d'abord que l'équation homologique (2.51) fournit $\{H_0, \chi_{k+1}\} = Z_{k+1} - Z_k - P_{k+1}$. Par construction $Z_k$ et $P_{k+1}$ appartiennent à $\mathcal{H}^s$. D'un autre coté, $Z_{k+1} \in \mathcal{T}_{k+1}^{\nu'_k,\beta}$ d'après le Lemme 2.2.21, et est en forme normale. La point (iv) de la Proposition 2.2.12 permet de conclure que $Z_{k+1} \in \mathcal{H}^s$. Dès lors, nous avons prouvé l'appartenance $\{H_0, \chi_{k+1}\} \in \mathcal{H}^s$.
Maintenant, utilisons la formule de Taylor à l'ordre 1 pour obtenir

$$H_0 \circ \phi_{k+1}(z) - H_0(z) = \int_0^1 \{H_0, \chi_{k+1}\}(\Phi^t_{\chi_{k+1}}(z))\, dt.$$

Or nous savons que $\Phi^t_{\chi_{k+1}} : \mathcal{V}_{k+1} \to \mathcal{P}_s$ pour tout $t \in [0,1]$ (voir Proposition 2.2.20). Par conséquent, $H_0 \circ \phi_{k+1} - H_0 \in \mathcal{H}^s$ et (2.46) définit un hamiltonien régulier.
Finalement, nous invoquons de nouveau la formule de Taylor et l'équation homologique pour écrire

$$\begin{aligned} H_0 \circ \phi_{k+1}(z) - H_0(z) - &\{H_0, \chi_{k+1}\}(z) = \\ &\int_0^1 (1-t)\{Z_{k+1} - Z_k - P_{k+1}, \chi_{k+1}\}(\Phi^t_{\chi_{k+1}}(z))\, dt \end{aligned}$$

et, puisque $Z_{k+1} - Z_k - P_{k+1}$ appartient à $\mathcal{T}_{k+1}^{\nu'_k,\beta}$ et $\chi_{k+1} \in \mathcal{T}_{k+1}^{\nu'_k,\beta,+}$ nous concluons à l'aide de la Proposition 2.2.17 que $H_0 \circ \phi_{k+1} - H_0 - \{H_0, \chi_{k+1}\} \in \mathcal{T}^{\nu_{k+1},\beta}$. Finalement nous utilisons la Proposition 2.2.20 pour effectuer une décomposition de la forme $\hat{P}_{k+2} + \hat{Q}_{k+3} + \hat{R}_{k+1}$ où $\hat{P}_{k+2}$, $\hat{Q}_{k+3}$ et $\hat{R}_{k+1}$ satisfont les propriétés (ii), (iii) et (iv) au rang $k+1$. Nous définissons alors $P_{k+2} = \hat{P}_{k+2} + \tilde{P}_{k+2}$, $Q_{k+3} = \hat{Q}_{k+3} + \tilde{Q}_{k+3}$ et $R_{k+1} = \hat{R}_{k+1} + \tilde{R}_{k+1}$. □

## 2.3 Conséquences dynamiques

### 2.3.1 Oscillateur harmonique non linéaire en dimension 1

Rappelons les notations utilisées en introduction. L'oscillateur harmonique quantique $T = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ est diagonalisé dans la base d'Hermite $(\phi_j)_{j \in \bar{\mathbb{N}}}$ :

$$T\phi_j = (2j-1)\phi_j, \quad j \in \bar{\mathbb{N}}$$
$$\phi_{n+1} = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n!}} e^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où $H_n(x)$ est le $n^{ieme}$ polynôme d'Hermite :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}.$$

Le multiplicateur d'Hermite est aussi diagonalisé dans cette base :

$$M\phi_j = m_j \phi_j \tag{2.52}$$

où $(m_j)_{j\in\bar{\mathbb{N}}}$ est une suite réelle bornée. Pour tout $k\geq 1$, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{W}_k = \{(m_j)_{j\in\bar{\mathbb{N}}} \mid \text{ pour tout } j,\ m_j = \frac{\tilde{m}_j}{j^k} \text{ avec } \tilde{m}_j \in [-1/2,1/2]\} \tag{2.53}$$

que l'on munit de la mesure de probabilité produit. Les fréquences, i.e. les valeurs propres de $T+M=-d^2/dx^2+x^2+M$ sont données par

$$\omega_j = 2j-1+m_j = 2j-1+\frac{\tilde{m}_j}{j^k}, \quad j\in\bar{\mathbb{N}}.$$

**Proposition 2.3.1.** *Il existe un sous-ensemble $F_k\subset\mathcal{W}_k$ de probabilité 1 vérifiant ceci : si $m=(m_j)_{j\in\bar{\mathbb{N}}}\in F_k$ alors le vecteur-fréquence $(\omega_j)_{j\geq 1}$ est fortement non-résonant (cf. Définition 2.2.4).*

Preuve. Remarquons d'abord qu'il suffit de prouver que le vecteur-fréquence est non résonant au sens de la définition 2.2.3. En effet, si nous prouvons que (2.14) est vérifié pour certaines constantes $\delta'$ et $\gamma'$ alors si $S(j)<r\mu(j)$

$$\left|\omega_{j_1}+\dots+\omega_{j_i}-\omega_{j_{i+1}}-\dots-\omega_{j_r}\right| \geq \frac{\gamma'}{\mu(j)^{\delta'}} \geq \frac{\gamma'}{r+1}\frac{1+S(j)}{\mu(j)^{\delta'+1}}$$

et donc (2.15) est vérifié avec $\delta=\delta'+1$ et $\gamma=\frac{\gamma'}{r+1}$. Maintenant si $S(j)\geq r\mu(j)$ alors on utilise

$$\left|\omega_{j_1}+\dots+\omega_{j_i}-\omega_{j_{i+1}}-\dots-\omega_{j_r}\right| \geq S(j)-(r-2)\mu(j), \tag{2.54}$$

pour conclure que

$$\left|\omega_{j_1}+\dots+\omega_{j_i}-\omega_{j_{i+1}}-\dots-\omega_{j_r}\right| \geq \frac{2}{r}S(j) \geq \frac{\gamma'}{r+1}\quad\frac{1+S(j)}{\mu(j)^{\delta'+1}}$$

pourvu que $\gamma'$ est suffisamment petit.
La preuve de l'existence de l'ensemble $F_k\subset\mathcal{W}_k$ est similaire à la preuve du théorème 5.7 de [Gré07]. Nous ne la retranscrivons pas (voir aussi [BG04] ou l'annexe 4.1). □

Dans l'équation (2.1) avec $d=1$, l'hamiltonien perturbé est donné par

$$P(\xi,\eta)=\int_{\mathbb{R}} g(\xi(x),\eta(x))dx \tag{2.55}$$

où $g:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ est analytique, $\xi(x)=\sum_{j\geq 1}\xi_j\phi_j(x)$, $\eta(x)=\sum_{j\geq 1}\eta_j\phi_j(x)$ et $((\xi_j)_{j\geq 1},(\eta_j)_{j\geq 1})\in\mathcal{P}_s$. Nous remarquons d'abord que $P$ appartient à $\mathcal{H}^s$ pour $s$ grand.

**Lemme 2.3.2.** *Soit $P$ donné par (2.55) où $g:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ est analytique sur un voisinage de $0\in\mathbb{C}^2$, réelle i.e. $g(z,\bar{z})\in\mathbb{R}$ et admet l'origine comme zéro d'ordre $\geq 3$. Alors $P\in\mathcal{H}^s$ pour tout $s>1/2$.*

Preuve. Voir la partie 3.4 plus loin. □

Le fait que $P$ appartient à $\mathcal{T}^{\nu,\beta}$ est intimement lié au comportement des modes propres $\phi_j$. En effet, nous avons

**Proposition 2.3.3.** *Soit $\nu>1/8$ et $0\leq\beta\leq\frac{1}{24}$. Pour tous $k\geq 1$ et $N\geq 0$ il existe $c_N>0$ tel que pour tout $j\in\bar{\mathbb{N}}^k$ on a*

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\phi_{j_1}\dots\phi_{j_k}dx\right| \leq c_N\frac{\mu(j)^\nu}{C(j)^\beta}A(j)^N. \tag{2.56}$$

*Par suite, l'hamiltonien perturbé $P$ de forme (2.55) appartient à la classe $\mathcal{T}^\nu$.*

La preuve sera faite dans le cas multi-dimensionnel dans la prochaine partie (cf. Proposition 2.3.6).

Nous pouvons enfin appliquer notre Théorème 2.2.22 pour obtenir

**Théorème 2.3.4.** *Soit $M \in F_m$ défini dans la Proposition 2.3.1. Pour tout $r \geq 3$ il existe un entier $s_0(r)$ tel que pour tout $s \geq s_0(r)$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $C > 0$ vérifiant ceci : si $\|\psi_0\|_{\tilde{H}^{2s}} = \varepsilon < \varepsilon_0$ alors l'équation*

$$i\psi_t = (-\Delta + x^2 + M)\psi + \partial_2 g(\psi, \bar{\psi}), \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \tag{2.57}$$

*à condition initiale $\psi_0$ admet une unique solution $\psi \in C^0((-T_\epsilon, T_\epsilon), \tilde{H}^{2s})$ avec*

$$T_\epsilon \geq C\epsilon^{-r}. \tag{2.58}$$

*De plus,*
*(i) $\|\psi(t,\cdot)\|_{\tilde{H}^{2s}} \leq 2\epsilon$ pour tout $t \in (-T_\epsilon, T_\epsilon)$.*
*(ii) $\sum_{j\geq 1} j^{2s}||\xi_j(t)|^2 - |\xi_j(0)|^2| \leq \varepsilon^3$ pour tout $t \in (-T_\epsilon, T_\epsilon)$*
*où $|\xi_j(t)|^2$, $j \geq 1$ sont les actions de $\psi(t,\cdot) = \sum \xi_j(t)\phi_j$ .*
*(iii) il existe un tore $\mathcal{T}_0 \subset \tilde{H}^{2s}$ tel que,*

$$dist_{2s}(\psi(t,\cdot), \mathcal{T}_0) \leq C\varepsilon^{r_1/2} \quad \textit{for } |t| \leq \epsilon^{-r_2}$$

*où $r_1 + r_2 = r + 3$ et $dist_{2s}$ désigne la distance de $\tilde{H}^{2s}$.*

Preuve. Soit $\psi_0 = \sum \xi_j(0)\phi_j$ et $z_0 = (\xi(0), \bar{\xi}(0))$. Remarquons que si $\psi_0 \in \tilde{H}^{2s}$ vérifie $\|\psi_0\|_{\tilde{H}^{2s}} = \epsilon$ alors $z_0 \in \mathcal{P}_s$ et $\|z_0\|_s = \epsilon$. Notons $z(t)$ l'unique solution du problème de Cauchy à condition initiale $z_0$, où $H = H_0 + P$ est la fonction hamiltonienne de l'équation (2.57) écrite dans la base d'Hermite $\psi(t) = \sum \xi_j(t)\phi_j$, $z(t) = (\xi(t), \bar{\xi}(t))$. Puisque $P$ est réel, $z$ demeure un point réel de $\mathcal{P}_s$ pour tout $t$ et $\|\psi(t)\|_{\tilde{H}^{2s}} = \|z(t)\|\ s$.
Donc, si l'on note $z' = \tau^{-1}(z)$ (ne pas confondre avec une dérivée !) où $\tau : \mathcal{V}_s \to \mathbb{U}_s$ est la transformation donnée par le Théorème 2.2.22 (ainsi $z'$ désigne les nouvelles coordonnées) à l'ordre $r+2$ et $s \geq s_0(r+2)$. Nous voyons que, puisque la transformation $\tau$ est générée par un Hamiltonien réel, $z'(t)$ est encore un point réel de l'espace des phases.
Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B_{2\varepsilon_0} \subset \mathcal{V}_s$ et prenons $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Nous supposons $\|z(0)\|_s = \|\psi_0\|_{\tilde{H}^s} = \varepsilon$. Pour $z = (\xi, \eta) \in \mathcal{P}_s$ nous définissons

$$N(z) := 2\sum_{j=1}^{\infty} j^{2s} I_j(\xi, \eta)$$

où $I_j(\xi, \eta) = \xi_j\eta_j$. Nous remarquons que pour un point réel $z = (\xi, \bar{\xi}) \in \mathcal{P}_s$,

$$N(z) = \|z\|_s^2.$$

En particulier, nous avons [5]

$$N(z(t)) = \|z(t)\|_s^2 \quad \text{et } N(z'(t)) = \left\|z'(t)\right\|_s^2.$$

Comme $Z$ ne dépend que des nouvelles actions, nous avons

$$\dot{N}(z') = \{N, H \circ \tau\} \circ \tau^{-1}(z) = \{N, R\}(z'). \tag{2.59}$$

5. c'est précisément à ce point que nous avons besoin de travailler avec des hamiltoniens réels. Le théorème des formes normales est en fait essentiellement algébrique.

Par conséquent, tant que $\|z(t)\|_s \leq 2\varepsilon$, et donc $z(t) \in \mathcal{V}_s$, l'assertion (c) du Théorème 2.2.22 fournit $\|z'(t)\|_s \leq C\varepsilon$ nous obtenons alors grâce à (2.59) et l'assertion (b) du Théorème 2.2.22 (à l'ordre $r+2$)

$$\left|N(z'(t)) - N(z'(0))\right| \leq \left|\int_0^t \{N, R\}(z'(t'))dt'\right| \leq Ct \left\|z'(t)\right\|_s^{r+3} \leq Ct\varepsilon^{r+3}.$$

En particulier, tant que $\|z(t)\|_s \leq 2\varepsilon$ et $|t| \leq C\varepsilon^{-r}$

$$\left|N(z'(t)) - N(z'(0))\right| \leq C\varepsilon^3.$$

Par conséquent, l'assertion (c) du Théorème 2.2.22 permet d'obtenir

$$|N(z(t)) - N(z(0))| \leq C\varepsilon^3$$

ce qui nous amène à $\|z(t)\|_s \leq 3/2\ \varepsilon$ tant que $\|z(t)\|_s \leq 2\varepsilon$ et $|t| \leq C\varepsilon^{-r}$, en choisissant $\varepsilon_0$ suffisamment petit. Enfin, (2.58) et l'assertion (i) découlent d'un argument de continuité.

En vue de prouver l'assertion (ii) nous rappelons la notation $I_j(z) = I_j(\xi, \eta) = \xi_j \eta_j$. Comme $Z$ est en forme normale, nous avons

$$\{I_j \circ \tau^{-1}, H\}(z) = \{I_j, H \circ \tau\} \circ \tau^{-1}(z) = \{I_j, R\}(z').$$

Par conséquent, dans les nouvelles coordonnées, il vient

$$\frac{d}{dt} I_j(\xi', \eta') = -i\xi'_j \frac{\partial R}{\partial \eta_j} + i\eta'_j \frac{\partial R}{\partial \xi_j}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\sum_j j^{2s} \left|\frac{d}{dt} I_j(\xi', \bar{\xi}')\right| &= \sum_j j^{2s} \left|-\xi'_j \frac{\partial R}{\partial \eta_j} + \bar{\xi}'_j \frac{\partial R}{\partial \xi_j}\right| \\
&\leq \left(\sum_j j^{2s}(|\xi'_j|^2 + |\xi'_j|^2)\right)^{1/2} \left(\sum_j j^{2s} \left(\left|\frac{\partial R}{\partial \eta_j}\right|^2 + \left|\frac{\partial R}{\partial \xi_j}\right|^2\right)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

ce qui nous mène à

$$\sum_j j^{2s} \left|\frac{d}{dt} I_j(z')\right| \leq \left\|z'\right\|_s \left\|X_R(z')\right\|_s \leq \left\|z'\right\|_s^{r+3}. \tag{2.60}$$

Ainsi, en se rappelant que $I_j(\xi', \bar{\xi}') = |\xi'_j|^2$ nous obtenons

$$\sum_{j \geq 1} j^{2s} \left||\xi'_j(t)|^2 - |\xi'_j(0)|^2\right| \leq \varepsilon^3 \text{ pour tout } |t| \leq C\varepsilon^{-r}. \tag{2.61}$$

D'un autre coté, en invoquant (i) et l'assertion (c) du théorème 2.2.22, pour tout $|t| \leq C\varepsilon^{-r}$, on obtient

$$\sum_{j \geq 1} j^{2s} \left||\xi_j(t)|^2) - |\xi'_j(t)|^2\right| \leq \sum_{j \geq 1} j^{2s}(|\xi_j(t)| + |\xi'_j(t)|) \left|\xi_j(t) - \xi'_j(t)\right| \leq C\varepsilon^3.$$

Combinant cette dernière relation avec (2.61), l'assertion (ii) en découle.

Prouvons maintenant (iii) et posons $\bar{I}_j = I'_j(0)$ les actions initiales, considérons de surcroît le tore

$$\Pi_0 := \left\{ z \in \mathcal{P}_s \ : \ I_j(z) = \bar{I}_j \ , j \geq 1 \right\}$$

et son image dans $\tilde{H}^s$

$$\mathcal{T}_0 = \{ u \in \tilde{H}^s \ : \ u = \sum \xi_j \phi_j \text{ avec } \tau(\xi, \bar{\xi}) \in \Pi_0 \}.$$

Nous avons

$$d_s(z(t), \mathcal{T}_0) \leq \left[ \sum_j j^{2s} \left| \sqrt{I'_j(t)} - \sqrt{\bar{I}_j} \right|^2 \right]^{1/2} \tag{2.62}$$

où $d_s$ désigne la distance de $\mathcal{P}_s$ associée à $\|\cdot\|_s$.
Remarquons que pour $a, b \geq 0$,

$$\left| \sqrt{a} - \sqrt{b} \right| \leq \sqrt{|a-b|} \ .$$

Si bien qu'en invoquant (2.60), nous obtenons

$$\begin{aligned}
[d_s(z(t), \mathcal{T}_0)]^2 &\leq \sum_j j^{2s} |I'_j(t) - I'_j(0)| \\
&\leq |t| \sum_j j^{2s} |\dot{I}'_j(t)| \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^{r_1}} \left\| z' \right\|_s \left\| X_R(z') \right\|_s \\
&\leq C \frac{1}{\epsilon^{r_1}} \epsilon^{r+3} \leq C \epsilon^{r+3-r_1}.
\end{aligned}$$

ce qui donne (ii).

□

### 2.3.2 Oscillateur harmonique multidimensionnel non linéaire

#### Modèle

Le spectre $\mathbb{N}_d$ de l'oscillateur harmonique d-dimensionnel

$$T = -\Delta + |x|^2 = -\Delta + x_1^2 + \cdots + x_d^2$$

est l'ensemble des sommes de $d$ entiers impairs, i.e.

$$\mathbb{N}_d = \text{card} \left\{ \begin{array}{c} 2\mathbb{N} \setminus \{0, 2, \cdots, d-2\} \text{ si d est pair} \\ 2\mathbb{N}+1 \setminus \{1, 3, \cdots, d-2\} \text{ si d est impair.} \end{array} \right. \tag{2.63}$$

Pour toute valeur propre $j \in \mathbb{N}_d$ nous désignons par $E_j$ le sous-espace propre associé, sa dimension est

$$d_j = \sharp \{ (i_1, \cdots, i_d) \in (2\mathbb{N}+1)^d \mid i_1 + \cdots + i_d = j \}.$$

Nous notons $\{\Phi_{j,l}, \ l = 1, \cdots, d_j\}$ la base de $E_j$ obtenue par tensorisation des fonctions d'Hermite : $\Phi_{j,l} = \phi_{i_1} \otimes \cdots \phi_{i_d}$ avec $i_1 + \cdots + i_d = j$ .

Le multiplicateur d'Hermite $M$ est défini sur la base $(\Phi_{j,l})_{j \in \mathbb{N}_d, l=1,\cdots,d_j}$ of $L^2(\mathbb{R}^d)$ par

$$M \Phi_{j,l} = m_{j,l} \Phi_{j,l} \tag{2.64}$$

où $(m_{j,l})_{j\in\mathbb{N}_d,l=1,\cdots,d_j}$ est une suite réelle bornée.

La partie linéaire de (2.1) est donc

$$H_0 = -\Delta + x^2 + M.$$

L'opérateur $H_0$ est diagonalisé dans la base $(\Phi_{j,l})_{j\in\mathbb{N}_d,l=1,\cdots,d_j}$ et son spectre est

$$\sigma(H_0) = \{j + m_{j,l} \mid j \in \mathbb{N}_d, l = 1, \cdots, d_j\} \tag{2.65}$$

Par commodité, on se restreint au cas $m_{j,l} = m_j$ pour tout $l = 1, \cdots, d_j$. Si bien que l'on a $\sigma(H_0) = \{j + m_j \mid j \in \mathbb{N}_d\}$ et une conséquence de la Proposition 2.3.1 est

**Proposition 2.3.5.** *Il existe un sous-ensemble $F_k \subset \mathcal{W}_k$ de probabilité 1 tel que si $m = (m_j)_{j\in\bar{\mathbb{N}}} \in F_k$ alors le vecteur-fréquence $(\omega_{j,i})_{j\in\mathbb{N}_d,i=1,\cdots,d_j}$ satisfait ceci :*
*pour tout $r \in \bar{\mathbb{N}}$, il existe $\gamma, \delta > 0$ tels que pour tous $j \in {\mathbb{N}_d}^r$, $l \in \{1, \cdots, d_{j_1}\} \times \cdots \times \{1, \cdots, d_{j_r}\}$ et $1 \le i \le r$, on a*

$$\left|\omega_{j_1,l_1} + \cdots + \omega_{j_i,l_i} - \omega_{j_{i+1},l_{i+1}} - \cdots - \omega_{j_r,l_r}\right| \ge \gamma \frac{1 + S(j)}{\mu(j)^\delta} \tag{2.66}$$

*sauf si bien entendu $\{j_1, \ldots, j_i\} = \{j_{i+1}, \ldots, j_r\}$.*

Concernant les intégrale-produits des fonctions propres, nous avons

**Proposition 2.3.6.** *Soit $\nu > d/8$. Pour tous $k \ge 1$ et $N \ge 1$ il existe $c_N > 0$ vérifiant ceci : pour tous $j \in {\mathbb{N}_d}^k$ et $l \in \{1, \cdots, d_{j_1}\} \times \cdots \times \{1, \cdots, d_{j_k}\}$ on a*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_{j_1,l_1} \ldots \Phi_{j_k,l_k} dx\right| \le c_N \frac{\mu(j)^\nu}{C(j)^{\frac{1}{24}}} A(j)^N. \tag{2.67}$$

Remarquons que cette condition ne distingue pas deux modes de même énergie (i.e. associés à la même valeur propre).

Preuve. Nous nous inspirons de [Bam07] Section 6.2. L'idée de base est d'invoquer le lemme de commutateur : soit $A$ un opérateur différentiel qui laisse stable $D(T^k)$ et définissons les opérateurs

$$A_N := [T, A_{N-1}], \quad A_0 := A$$

alors ([Bam07] Lemme 7) pour tout $j_1 \neq j_2 \in \mathbb{N}_d$, $0 \le l_1 \le d_1$, $0 \le l_2 \le d_2$ et $N \ge 0$ on a

$$|\langle A\Phi_{j_2,l_2}, \Phi_{j_1,l_1}\rangle| \le \frac{1}{|j_1 - j_2|^N} |\langle A_N \Phi_{j_2,l_2}, \Phi_{j_1,l_1}\rangle|.$$

Soit $A$ l'opérateur différentiel de multiplication par la fonction $\Phi = \Phi_{j_3,l_3} \cdots \Phi_{j_k,l_k}$ alors une récurrence immédiate fournit

$$A_N = \sum_{0\le|\alpha|\le N} C_{\alpha,N} D^\alpha$$

où

$$C_{\alpha,N} = \sum_{0\le|\beta|\le 2N-|\alpha|} V_{\alpha,\beta,N}(x) D^\beta \Phi$$

$V_{\alpha,\beta,N}$ étant un polynôme de degré inférieur à $2N-|\alpha|-|\beta|$. Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_{j_1,l_1}\dots\Phi_{j_k,l_k}dx\right| &\leq \frac{1}{|j_1-j_2|^N}\left\|A_N\Phi_{j_2,l_2}\right\|_{L^2}\\ &\leq C\frac{1}{|j_1-j_2|^N}\sum_{0\leq|\alpha|\leq N}\sum_{0\leq|\beta|\leq 2N-|\alpha|}||V_{\alpha,\beta,N}D^\beta\phi D^\alpha\Phi_{j_2,l_2}||_{L^2} \\ &\leq C\leq C\frac{1}{|j_1-j_2|^N}\sum_{0\leq|\alpha|\leq N}\left\|\Phi_{j_2,l_2}\right\|_{|\alpha|}||\Phi||_{\nu_0+2N-|\alpha|}\end{aligned} \tag{2.68}$$

On a utilisé l'inégalité suivante dans la dernière estimée (rappelons que $\|f\|_s=\|f\|_{\tilde{H}^s(\mathbb{R}^d)}=\||x|^sf\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ et $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ est la norme usuelle de Sobolev)

$$\forall\nu_0>d/2\qquad ||fg||_{L^2}\leq C_{\nu_0}||f||_{\nu_0}||g||_{L^2}.$$

Nous estimons maintenant $||\Phi||_s$. Remarquons que, puisque $T\Phi_{j,l}=j\Phi_{j,l}$, on a pour tout $s\geq 0$

$$\left\|\Phi_{j,l}\right\|_s\leq Cj^{s/2}. \tag{2.69}$$

Rappelons que les fonctions d'Hermite (normalisées dans $L^2(\mathbb{R})$) sont en fait uniformément bornées dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et vérifient précisément (voir [Sze75] où [KT05])

$$||\phi_j||_{L^\infty}\leq Cj^{-1/12}, \tag{2.70}$$

Par suite, puisque $\Phi_{j,l}=\phi_{i_1}\otimes\cdots\phi_{i_d}$ avec $i_1+\cdots+i_d=j$, nous déduisons

$$||\Phi_{j,l}||_{L^\infty}\leq C_dj^{-1/12} \tag{2.71}$$

avec $C_d=Cd^{1/12}$. Ainsi, en invoquant une estimée <<tame>> (voir [Tay91]) nous obtenons

$$\|uv\|_s\leq C(\|u\|_s\|v\|_{L^\infty}+\|v\|_s\|u\|_{L^\infty})$$

combinée avec (2.69) and (2.71), il vient pour $j_3\geq\cdots\geq j_k$,

$$\|\Phi\|_s\leq Cj_3^{s/2}. \tag{2.72}$$

Insérons (2.69) et (2.72) dans (2.68) nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_{j_1,l_1}\dots\Phi_{j_k,l_k}dx\right| &\leq C\frac{1}{|j_1-j_2|^N}\sum_{0\leq|\alpha|\leq N}\sum_{0\leq|\beta|\leq 2N-|\alpha|}j_2^{|\alpha|/2}j_3^{(\nu_0+|\beta|)/2)}\\ &\leq C\frac{1}{|j_1-j_2|^N}\sum_{0\leq|\alpha|\leq N}j_2^{|\alpha|/2}j_3^{\nu_0/2+N-|\alpha|/2}\\ &\leq C\frac{1}{|j_1-j_2|^N}j_3^{N+\nu_0/2}\left(\frac{j_2}{j_3}\right)^{N/2}\\ &=C\frac{1}{|j_1-j_2|^N}j_3^{\nu_0/2}(j_2j_3)^{N/2}.\end{aligned}$$

Remarquons alors que si $\sqrt{j_2j_3}\leq|j_1-j_2|$ alors la dernière estimée implique la suivante

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_{j_1,l_1}\dots\Phi_{j_k,l_k}dx\right|\leq Cj_3^{\nu_0/2}\frac{(j_2j_3)^{N/2}}{(\sqrt{j_2j_3}+|j_1-j_2|)^N}=C\mu(j)^{\nu/2}A(j)^N \tag{2.73}$$

Mai si $\sqrt{j_2 j_3} > |j_1 - j_2|$ alors $A(j) \geq 1/2$ et par conséquent (2.73) est triviale.

D'un autre coté, (2.71) fournit

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_{j_1,l_1} \dots \Phi_{j_k,l_k} dx\right| \leq C j_1^{-1/12} = C\ C(j)^{-1/12}.$$

En combinant cette estimation avec (2.73) on obtient que pour tout $N \geq 1$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_{j_1,l_1} \dots \Phi_{j_k,l_k} dx\right| \leq c_N \frac{\mu(j)^\nu}{C(j)^{\frac{1}{24}}} A(j)^N$$

avec $\nu = \frac{\nu_0}{4}$. □

**Résultat**

Nous généralisons d'abord le théorème des formes normales dans un contexte adapté en multi-dimension.

Nous suivons l'organisation de la partie 2.2 et nous concentrons sur les différences.

Soit $s \geq 0$, nous considérons l'espace des phases $\mathcal{Q}_s = \mathcal{L}_s \times \mathcal{L}_s$ avec

$$\mathcal{L}_s = \{(a_{j,l})_{j\in\mathbb{N}_d,\, 1\leq l\leq d_j} \mid \sum_{j\in\mathbb{N}_d} |j|^{2s} \sum_{l=1}^{d_j} |a_{j,l}|^2 < \infty\}$$

que l'on munit des norme et structure symplectique usuelles. En écrivant $\psi = \sum \xi_{j,l}\Phi_{j,l}$, $\bar{\psi} = \sum \eta_{j,l}\Phi_{j,l}$ avec $(\xi,\eta) \in \mathcal{Q}_s$, nous notons que $\psi \in \tilde{H}^{2s}$ si et seulement si $\xi \in \mathcal{L}_s$. La partie linéaire de la version multidimensionnelle de (2.1) s'écrit

$$H_0(\xi,\eta) = \frac{1}{2} \sum_{j\in\mathbb{N}_d} \sum_{l=1}^{d_j} \omega_{j,l}\xi_{j,l}\eta_{j,l}.$$

Pour tout $j \geq 1$, nous définissons

$$J_j(\xi,\eta) = \sum_{l=1}^{d_j} \xi_{j,l}\eta_{j,l}\ .$$

En reprenant les notations de la partie 2.2.1, nous définissons la classe $\mathcal{ST}_k^\nu$ des polynômes homogènes de degré $k$ sur $\mathcal{Q}_s$

$$Q(\xi,\eta) \equiv Q(z) = \sum_{j\in{\mathbb{N}_d}^k} \sum_{l_1=1}^{d_{j_1}} \dots \sum_{l_m=1}^{d_{j_k}} a_{j,l} z_{j_1,l_1} \dots z_{j_k,l_k}$$

tels que pour tout $N \geq 1$, il existe $C, \beta > 0$ tels que pour tous $j, l$

$$|a_{j,l}| \leq C \frac{\mu(j)^\nu}{C(j)^\beta} A(j)^N.$$

Ainsi, en s'inspirant de la Définition 2.2.10 nous créons une classe correspondante $\mathcal{ST}^\nu$ constituée d'hamiltoniens $C^\infty$ sur $\mathcal{Q}_s$ ayant leurs polynômes de Taylor dans $\mathcal{ST}_k^\nu$. De manière similaire, en suivant la définition 2.2.1, nous définissons aussi la classe $\mathcal{H}_d^s$ des hamiltoniens réels analytiques $P : \mathbb{U}_S \to \mathbb{C}$ et $X_P, X_{P_k} \in C^\infty(\mathbb{U}_s, \mathcal{Q}_s)$ pour un certain voisinage de l'origine $\mathbb{U}_s \subset \mathcal{Q}_s$ et de même pour tout $k \geq 1$.

Dans l'équation (2.1), le hamiltonien perturbé s'écrit

$$P(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi(x), \eta(x))dx \tag{2.74}$$

où $g$ est analytique sur un voisinage de l'origine, $\xi(x) = \sum_{j\geq 1} \xi_j \phi_j(x)$, $\eta(x) = \sum_{j\geq 1} \eta_j \phi_j(x)$ et $((\xi_j)_{j\geq 1}, (\eta_j)_{j\geq 1}) \in \mathcal{P}_s$. Comme dans le cas uni-dimensionnel (cf. Lemme 2.3.2), $P$ appartient à $\mathcal{H}_d^s$ pour $s$ suffisamment grand ($s > d/2$) et à l'aide de la Proposition 2.3.6, $P$ appartient à $\mathcal{ST}^\nu$. Par conséquent, on a

**Lemme 2.3.7.** *L'hamiltonien $P$ donné par* (2.74) *appartient à $\mathcal{H}^s \cap \mathcal{ST}^\nu$ pour $s > d/2$ et $\nu > d/8$.*

Nous avons aussi besoin d'une définition $d$-dimensionnelle des polynômes en *forme normale* :

**Définition 2.3.8.** *Soit $k = 2m$ un entier pair, un polynôme formel $Z$ homogène de degré $k$ sur $\mathcal{Q}_s$ est en forme normale s'il s'écrit :*

$$Z(\xi,\eta) = \sum_{j \in {\mathbb{N}_d}^k} \sum_{l_1, l_1'=1}^{d_{j_1}} \cdots \sum_{l_k, l_k'=1}^{d_{j_k}} a_{j,l,l'} \xi_{j_1,l_1} \eta_{j_1,l_1'} \cdots \xi_{j_k,l_k} \eta_{j_k,l_k'}$$

*pour tout $(\xi,\eta) \in \mathcal{Q}_s$.*

Un calcul facile prouve que si $Z$ est en forme normale alors il commute avec chaque pseudo-action $J_j = \sum_{l=1}^{d_j} \xi_{j,l}\eta_{j,l}$, par exemple on a

$$\{\xi_{j_1,l_1}\eta_{j_1,l_1'}, \xi_{j_1,l_1}\eta_{j_1,l_1} + \xi_{j_1,l_1'}\eta_{j_1,l_1'}\} = 0.$$

Une légère modification de la preuve du Théorème 2.2.22 amène au suivant

**Théorème 2.3.9.** *Soit $P$ un hamiltonien réel appartenant à $\mathcal{ST}^\nu \cap \mathcal{H}_d^s$ pour un certain $\nu \geq 0$ et pour tout $s$ suffisamment grand et soit $\omega$ un vecteur-fréquence non résonant au sens de* (2.66). *Alors pour tout $r \geq 3$ il existe $s_0$ tel que pour $s \geq s_0$ il existe $\mathbb{U}$, $\mathcal{V}$ deux voisinages de l'origine de $\mathcal{Q}_s$ et une application canonique $\tau : \mathcal{V} \to \mathbb{U}$ réelle analytique qui transforme $H = H_0 + P$ en une forme normale perturbée d'un terme d'ordre $r$, i.e.*

$$H \circ \tau = H_0 + Z + R$$

*avec*

*(i) $Z$ est un polynôme réel continu de degré $r$ qui appartient à $\mathcal{H}_d^s$ et qui est en forme normale (voir la Définition 2.3.8). En particulier $Z$ commute avec les pseudo-actions $J_j$, $j \geq 1$, i.e. $\{Z, J_j\} = 0$ pour tout $j \geq 1$.*

*(ii) $R$ est réelle et appartient à $\mathcal{H}_d^s$, de plus $\|X_R(z)\|_s \leq C_s \|z\|_s^r$ pour tout $z \in \mathcal{V}_s$.*

*(iii) $\tau$ est proche de l'identité au sens suivant : $\|\tau(z) - z\|_s \leq C_s \|z\|_s^2$ pour tout $z \in \mathcal{V}_s$.*

Preuve. La seule différence avec le Théorème 2.2.22 est l'assertion (ii) : nous obtenons $\{Z, J_j\} = 0$ au lieu de $\{Z, I_j\} = 0$. En fait, à la vue de (2.66), nous adaptons le Lemme 2.2.21 et en particulier (2.41) et (2.42), de sorte que $\chi \in \mathcal{ST}^{\nu,+}$ et que $Z$ soit en forme normale.

D'un autre coté, nous vérifions aussi, en suivant les lignes de la preuve de l'assertion (iv) de la proposition 2.2.12, qu'un polynôme homogène de degré $k+1$ en forme normale $Z \in \mathcal{ST}^\nu$ satisfait $\|X_Z(z)\|_s \le C\,\|z\|_s^k$ pour tout $z$ proche de 0. En particulier, si $Z \in \mathcal{ST}^\nu$ est en forme normale, alors il appartient automatiquement à $\mathcal{H}_d^s$ (ce point a été crucial dans la preuve du Théorème 2.2.22).
□

En général $H_0 + Z$ n'est pas intégrable. Les conséquences dynamiques sont en fait similaires à la dimension 1 mais l'on doit remplacer $I_j$ par $J_j$. Les quantités $J_j$ sont presque conservées et ne tiennent pas compte des modes de même énergie (contrairement à la dimension 1 qui ne présente pas deux modes de même énergie !)

**Théorème 2.3.10.** *Supposons que $m$ appartient à $F_k$ (voir la proposition 2.3.5). Pour tout $r \ge 3$ et $s \ge s_0(r)$, il existe $\varepsilon_0, c > 0$ tels que pour tout $\psi_0$ dans $\tilde{H}^s$, et $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, le problème de Cauchy suivant*

$$i\psi_t = (-\Delta + x^2 + M)\psi + \partial_2 g(\psi, \bar{\psi}), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R}$$

*à condition initiale $\psi_0$ admet une unique solution $\psi \in C^0((-T_\epsilon, T_\epsilon), \tilde{H}^s)$ avec*

$$T_\epsilon \ge c\epsilon^{-r}.$$

*De surcroît pour tout $t \in (-T_\epsilon, T_\epsilon)$, on a*

$$\|\psi(t,\cdot)\|_{\tilde{H}^s} \le 2\epsilon$$

*et*

$$\sum_{j \ge 1} j^s |J_j(t) - J_j(0)| \le \varepsilon^3$$

*où $J_j(t) = \sum_{l=1}^{d_j} |\xi_{j,l}|^2$, $j \ge 1$ sont les <<pseudo-actions>> de $\psi(t,\cdot) = \sum_{j,l} \xi_{j,l}(t)\Phi_{j,l}(\cdot)$ .*

Preuve. Comme dans la preuve du Théorème 2.3.4, nous définissons $N(z) := 2\sum_{j \in \mathbb{N}_d} j^s J_j(\xi, \eta) = 2\sum_{j \in \mathbb{N}_d} j^s \sum_{l=1}^{d_j} \xi_{j,l}\eta_{j,l}$ on a $N(z) = \|z\|_{s/2}^2$ pour tout point réel $z = (\xi, \bar{\xi})$. D'un autre coté, en invoquant les relations $\{Z, J_j\} = 0$, nous avons

$$\{N \circ \tau^{-1}, H\}(z) = \{N, H \circ \tau\} \circ \tau^{-1}(z) = \{N, R\}(z').$$

Par conséquent, dans les nouvelles variables nous avons $|\dot{N}| \le C N^{(r+1)/2}$ et nous concluons comme dans la preuve du Théorème 2.3.4.

□

**Benoît Grébert, Rafik Imekraz, Éric Paturel**
*Laboratoire de Mathématiques Jean Leray UMR 6629,*
*Université de Nantes,*
*2, rue de la Houssinière,*
*44322 Nantes Cedex 3, France*

E-mail : `benoit.grebert@univ-nantes.fr`
`rafik.imekraz@univ-nantes.fr`
`eric.paturel@univ-nantes.fr`

# Chapitre 3

## Formes normales pour les oscillateurs quantiques superquadratiques unidimensionnels

**par**

**Rafik Imekraz**

Nous considérons l'équation de Schrödinger associée à l'oscillateur quantique superquadratique

$$i\psi_t = (-\frac{d}{dx^2} + x^{2p} + \eta(x) + M)\psi \pm \psi|\psi|^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

où $p$ est un entier $\geq 2$, $\eta$ est un polynôme de degré $< 2p$ tel que $\inf x^{2p} + \eta(x) \geq 0$, et $M$ est un multiplicateur (i.e. simultanément diagonalisable avec $-d^2/dx^2 + x^{2p} + \eta(x)$).

L'article [GIP09] étudie le cas particulier $p = 1$ dans $\mathbb{R}^d$ pour tout $d \geq 1$, tandis que nous nous occupons ici du cas $d = 1$ mais autorisant tout potentiel superquadratique, i.e. un polynôme positif de degré pair $x^{2p} + \eta(x)$. Une telle équation hamiltonienne admet, au voisinage de l'origine, une forme normale de Birkhoff à tout ordre et, pour des opérateurs génériques $M$ (généricité liée à des conditions de non-résonance des fréquences linéaires). En conséquence, lorsque la condition initiale est suffisamment petite nous déduisons un contrôle de la dynamique en temps longs ainsi que des normes de Sobolev à grande régularité.

## 3.1 Introduction

Nous sommes intéressés par le comportement dynamique des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire suivante

$$\begin{cases} i\partial_t\psi = (-\frac{d}{dx^2} + V(x) + M_k)\psi + \partial_2 g(\psi, \overline{\psi}) & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ \psi_{|t=0} = \psi_0 \in \widehat{H}^s \end{cases} \tag{3.1}$$

Nous définissons les notations suivantes :

(A) $V(x)$ est un potentiel superquadratique , i.e un polynôme positif de degré $2p \geq 4$. Nous posons $T := -\frac{d}{dx^2} + V(x)$, $(\phi_j)_{j\geq 1}$ les modes propres de $T$ et $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ la suite positive croissante des valeurs propres correspondantes.

(B) Les espaces de Sobolev $\widehat{H}^s := \mathrm{Dom}(T^{s/2}) = \{f \in H^s(\mathbb{R}), x^{ps}f(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$ de $T$ sont munis des normes $||\cdot||_{\widehat{H}^s}$ (voir sous-partie 3.2.1).

(C) $k \geq 1$ est un entier, $(m_j)_{j\geq 1}$ est une suite à valeurs dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et enfin $M_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est l'unique opérateur borné vérifiant $M_k\phi_j = \frac{m_j}{j^k}\phi_j$.

(D) La fonction holomorphe $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ s'annule sur $(0,0)$ avec multiplicité $\geq 3$, et $g(\xi, \overline{\xi})$ est réelle pour tout $\xi \in \mathbb{C}$. Par exemple, si $g(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}\xi_1^2\xi_2^2$ alors $\partial_2 g(\xi, \overline{\xi}) = \xi|\xi|^2$.

(E) L'espace-produit $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{\mathbb{N}^\star}$ est muni de la probabilité produit.

Notre principal résultat s'énonce comme suit

**Théorème 3.1.1.** *Soit $k \geq 1$, il existe un ensemble de mesure pleine $F_k \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{\mathbb{N}^\star}$ tel que si $m \in F_k$ (cas générique), pour tout $r \geq 3$ il existe $s_0(r,m), \epsilon_0(r,m), C(r,m) > 0$ tels que pour tout $s \geq s_0$ si $\epsilon := ||\psi_0||_{\widehat{H}^s} < \epsilon_0$ alors l'équation r(3.1) admet une solution $\psi(t,x) = \sum_{j\geq 1} z_j(t)\phi_j(x)$ dans l'espace $\mathcal{C}^0((-\epsilon^{-r}, \epsilon^{-r}), \widehat{H}^s)$. En outre, on a le contrôle*

$$\sup_{|t|<\epsilon^{-r}} ||\psi(t,\cdot)||_{\widehat{H}^s} \leq 2\epsilon$$

$$\sup_{|t|<\epsilon^{-r}} \sum_{j\geq 1} \lambda_j^s ||z_j(t)|^2 - |z_j(0)|^2| \leq C\epsilon^3$$

**Remarque 3.1.2.** *La première estimation est souvent appelée « existence presque globale », en ce sens que la croissance du temps d'existence dépend de manière inversement polynomiale par rapport à la petitesse de la donnée initiale. D'un point de vue dynamique, la dernière inégalité signifie que $\psi(t,\cdot)$ reste près d'un tore.*

**Remarque 3.1.3.** *Nous pouvons obtenir la même conclusion si $g$ est seulement holomorphe au voisinage de l'origine $(0,0)$. En fait, la seule chose que nous avons à vérifier est que la dérivée partielle $\partial_2 g(\psi(t,x), \overline{\psi(t,x)})$ est définie si $t \in (-T_\epsilon, T_\epsilon)$. En réalité, lorsque $s$ est grand, cela découle de $||\psi(t,\cdot)||_{L^\infty} \leq C(s)||\psi(t,\cdot)||_{\widehat{H}^s}$ qui assure que $\partial_2 g(\psi, \overline{\psi})$ est bien définie.*

La technique utilisée à été développée par Bambusi [Bam08], Bambusi-Grébert ([BG04]) and Faou-Grébert ([FG10]) pour des EDP sur le torus, par Bambusi-Delort-Grébert-Szeftel ([BDGS07]) pour l'équation semi-linéaire de Klein-Gordon équation sur $S^d$, et par Grébert-Imekraz-Paturel ([GIP09]) pour l'équation semi-linéaire de l'osillateur harmonique sur $\mathbb{R}^N$, voir aussi un travail de Bourgain ([Bou96a]). Dans toutes ces situations, les données spectrales sont importantes. Comme dans [GIP09], nous traitons une EDP sur une variété non compacte, modestement $\mathbb{R}$, c'est pour cela que nous choisissons un potentiel qui croît vers l'infini, cela assure un spectre discret.

Dans le théorème (3.1.1), il est très important de signaler que les solutions considérées sont régulières ($s$ très grand). En outre, la classe des perturbations $\partial_2 g(\psi, \overline{\psi})$ est assez générale. Par exemple, nous pouvons choisir les perturbations cubiques focalisante ou défocalisante $\pm|\psi|^2\psi$. Concernant le temps d'existence, lorsque $V(x) = x^{2p}$ et que la perturbation est défocalisante, il est bien connu que l'on a une solution globale dans $\widehat{H}^1$ car l'énergie suivante est conservée

$$||\psi(t,\cdot)||_{\widehat{H}^1}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\nabla\psi(t,x)|^2 + |x^p\psi(t,x)|^2 dx$$

L'existence de l'ensemble $F_k$ n'a qu'un seul but : éviter les résonances des fréquences linéaires.

Permettons-nous d'expliquer le modèle abstrait. L'idée principale est de transférer l'EDP (3.1) dans l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \ell_s(\mathbb{Z}^\star))$, où

$$\ell_s(\mathbb{Z}^\star) := \left\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^\star}, \quad ||z||_s := \sqrt{\sum_j \lambda_j^s |z_j|^2} < \infty \right\}$$

par l'intermédiaire de l'isomorphisme suivant

$$\begin{array}{rccll} \Gamma_s : & \widehat{H}^s & \to & \ell_s(\mathbb{N}^\star) & \subset \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \\ & \sum_{j\geq 1} u_j\phi_j & \mapsto & (u_j)_{j\geq 1} & = ((\overline{u_{-j}})_{j\leq 1}, (u_j)_{j\geq 1}) \end{array} \tag{3.2}$$

En d'autres termes, on définit

$$\psi(t,x) = \sum_{j\geq 1} z_j(t)\phi_j(x) \qquad \forall j \geq 1 \quad \overline{z_{-j}}(t) = z_j(t)$$

L'EDP (3.1) devient

$$\forall j \in \mathbb{N}^\star \quad \left\{ \begin{array}{rclcl} z'_j & = & -i\frac{\partial}{\partial z_{-j}}(H_0+P) & = & -i\omega_j z_j - i\frac{\partial P}{\partial z_{-j}} \\ z'_{-j} & = & i\frac{\partial}{\partial z_j}(H_0+P) & = & i\omega_j z_{-j} + i\frac{\partial P}{\partial z_j} \end{array} \right. \tag{3.3}$$

où l'hamiltonien libre et la non-linéarité s'écrivent

$$H_0(z) = \sum_{j>0} \omega_j z_j z_{-j}, \qquad P(z) = \int_{\mathbb{R}} g\left(\sum_{j>0} z_j\phi_j(x), \sum_{j>0} z_{-j}\phi_j(x)\right)dx \tag{3.4}$$

En fait, les deux équations (3.3) seront redondantes grâce à l'hypothèse (D). À l'aide d'une structure symplectique naturelle sur $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ donnée par

$$\omega(z,\xi) = \sum_{j\geq 1} z_j\xi_{-j} - z_{-j}\xi_j$$

l'équation (3.3) prend la forme simplifiée

$$z'(t) = iX_{H_0+P}(z)$$

où $X_{H_0+P}$ est le gradient symplectique $X$. Ainsi, la quantité $(H_0+P)(z)$ fait office d'énergie conservée. Comme $H_0$ est quadratique, $X_{H_0}$ est linéaire, aussi nous préférons voir la dernière équation ainsi :

$$z(t) = \exp(itX_{H_0})z(0) + \int_0^t \exp(i(t-t')X_H)X_P(z(t'))dt'$$

Il est crucial que le flot $\exp(itX_{H_0})$ laisse stable $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ et que $X_P$ est à valeurs dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$. Un argument de point fixe usuel montre l'existence locale dans l'espace $\mathcal{C}^0([-T,T],\overline{B(z(0),\epsilon)})$. En vue de prouver l'existence presque globale et les conséquences dynamiques, nous utilisons la théorie des formes normales de Birkhoff. En fait, nous prouvons qu'il existe une transformation symplectique $\tau$ sur un voisinage de $0 \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ tel que $(H_0+P)\circ\tau = H_0 + Z + R$, où $Z$ sera en forme normale (i.e ne dépend que des actions $z_jz_{-j}$, voir 3.3.3) et $||X_R(z)||_s \leq C||z||_s^r$. Il est important que $X_Z$ envoie $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$.

La théorie des formes normales de Birkhoff nécessite un modèle perturbatif qui contient bien entendu $P$ et quelques classes de polynômes en forme normale.

En développant $g$ en série de Taylor dans (3.4), on constate que les intégrales-produits des modes propres apparaissent naturellement. Dans notre modèle, les estimations

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \phi_{j_1}(x)\cdots\phi_{j_k}(x)dx\right| \leq C_N j_3^\nu \left(\frac{\sqrt{\lambda_{j_2}\lambda_{j_3}}}{\sqrt{\lambda_{j_2}\lambda_{j_3}} + \lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}}\right)^N \tag{3.5}$$

vont jouer un rôle essentiel pour tous entiers $N$ et $j_1 \geq \cdots \geq j_k$. En un certain sens, ces intégrales expliquent comment les différents modes interagissent via la non-linéarité. Par exemple, ces intégrales-produits interviennent également dans [GIP09] qui traite de l'oscillateur harmonique sur $\mathbb{R}^N$ :

$$i\partial_t = (-\Delta + ||x||^2 + M)\psi + \partial_2 g(\psi, \overline{\psi}) \tag{3.6}$$

Dans la situation précédente, les modes $\phi_j$ sont les fonctions d'Hermite. Des estimations analogues sont présentes dans [WM08], où Wang montre la stabilité de l'équation suivante avec $\delta$ petit et où la perturbation $V$ dépend du temps :

$$-i\partial_t = \frac{1}{2}\left(-\Delta + x^2\right) + \delta V(t, x)$$

Voir aussi [GT10]. Les modes propres de l'oscillateur harmonique $-\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, i.e. les fonctions d'Hermite, sont agréables à manipuler car autorisent des calculs exacts dans certains cas (voir [Wan09]) et ont une bibliographie abondante. Nous savons que les valeurs propres sont exactement les entiers impairs. Dans notre cas, les modes propres et les valeurs propres ne sont pas du tout explicites.

Pour estimer les intégrale-produits (3.5), nous utilisons un lemme de commutateur (inspiré de [Bam08] mais un peu plus précis car nous avons besoin de contrôler certains degrés de polynômes, voir le lemme 3.2.8), et nous avons besoin d'informations spectrales de $T$. Précisément, pour tous $p, r \geq 2$ nous avons l'équivalent suivant pour un certain $\sigma(r, p) \in \mathbb{R}$ (voir [YZ01])

$$||\phi_j||_{L^r} \simeq j^{\sigma(r,p)}$$

De surcroît, nous avons

$$c|j_1^{2p/(p+1)} - j_2^{2p/(p+1)}| \leq |\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}| \leq C|j_1^{2p/(p+1)} - j_2^{2p/(p+1)}| \tag{3.7}$$

Cela signifie essentiellement que l'ensemble des différences de deux valeurs propres ne s'agglutine pas vers 0. Signalons que (3.7) n'est pas une simple conséquence de la célèbre formule de Weyl $\lambda_j \simeq j^{2p/p+1}$, et nous avons en effet besoin d'un développement asymptotique précis

$$\lambda_j = \beta_0 j^{2p/p+1} + \beta_1 j^{(2p-1)/p+1)} + \cdots + \beta_{2p-1} j^{1/(p+1)} + \beta_{2p} + o(1) \tag{3.8}$$

Ce genre de développement asymptotique a été obtenu pour de grandes classes d'opérateurs uni-dimensionnels dans l'article [HR82]. Les estimations (3.7) sont aussi utiles pour assurer l'existence de l'ensemble de mesure pleine $F_k$, ce dernier étant défini par une condition de non-résonance.

Cet article est organisé comme suit : Dans la partie 2, nous développons toute l'analyse spectrale dont nous avons besoin. Dans la partie 3, nous définissons le modèle abstrait, i.e. l'ensemble des classes de polynômes et prouvons les estimations nécessaires pour faire fonctionner la théorie des formes normales de Birkhoff. Enfin, dans la dernière partie, nous vérifions que le modèle est correct et prouvons le théorème final.

Pour finir cette introduction, nous voulons signaler que dans le cas multi-dimensionnel, le problème analogue semble être beaucoup plus difficile car nous n'avons pas un développement asymptotique analogue à (3.8). En outre, dans le cas multi-dimensionnel les valeurs propres de (3.6) sont des entiers, ce qui n'est a priori pas le cas pour un potentiel quelconque.

## 3.2 Analyse spectrale

### 3.2.1 Espace de Sobolev et asymptotique des valeurs propres

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'usuel espace de Schwartz. Nous définissons les espaces de Sobolev naturellement associés $T = -\frac{d}{dx^2} + V(x)$. Rappelons tout d'abord les résultats suivants qui sont bien connus (voir par exemple [BS] chapitre 2.3, Théorème 3.1, 3.3 et Corollaire 1)

**Théorème 3.2.1.** *L'opérateur différentiel $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est essentiellement auto-adjoint. Son spectre est une suite réelle croissante $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ qui tend vers $+\infty$ et $\lambda_1 > 0$. En outre, il existe une base orthonormale $(\phi_j)_{j\geq 1}$ de $L^2(\mathbb{R})$ telle que*

*a)* $\overline{\phi_j} = \phi_j$

*b)* $\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

*c)* $T\phi_j = \lambda_j \phi_j$

*d) chaque valeur propre $\lambda_j$ est simple*

Remarquons que d) est valide car nous sommes en dimension 1. Maintenant, nous définissons les espaces de Sobolev. En fait, toutes les données spectrales dont nous avons besoin sont asymptotiques. Rappelons que nous pouvons directement définir les opérateurs $T^{s/2}$ par $T^{s/2}\phi_j = \lambda_j^{s/2}\phi_j$, mais l'on pose plus simplement

**Définition 3.2.2.** *Pour tout $s \geq 0$, nous définissons*

$$\widehat{H}^s := Dom(T^{s/2}) = \left\{ f = \sum_{j\geq 1} \alpha_j \phi_j \in L^2(\mathbb{R}), \quad \sum \lambda_j^s |\alpha_j|^2 < +\infty \right\}$$

$$\forall f = \sum_{j\geq 1} \alpha_j \phi_j \in \widehat{H}^s \qquad ||f||_{\widehat{H}^s} = \left( \sum_{j\geq 1} \lambda_j^s |\alpha_j|^2 \right)^{1/2}$$

**Remarque 3.2.3.** *Comme chaque $\phi_j$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la classe de Schwartz est dense dans $\widehat{H}^s$.*

Soit $D = d/dx$ et $\langle x \rangle = \sqrt{1+x^2}$, nous posons :

$$\langle -iD \rangle^s u(x) = (\mathrm{Id} - \Delta)^s u(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi)d\xi$$

Grâce à [YZ04], nous avons le Théorème :

**Théorème 3.2.4.** *Pour tout $s \geq 0$, les normes suivantes sont équivalentes sur $\widehat{H}^s$ :*

*a)* $u = \sum_{j\geq 1}^{\infty} \alpha_j \phi_j \mapsto \left( \sum_j |\alpha_j|^2 (1+|\lambda_j|)^s \right)^{1/2}$

*b)* $||\langle iD \rangle^s u||_{L^2} + ||\langle x \rangle^{ps} u||_{L^2}$

*c)* $||u(x)||_{L^2} + ||x^s \widehat{u}(x)||_{L^2} + ||x^{ps}u(x)||_{L^2}$

*d)* $||u||_{H^s} + ||x^{ps}u(x)||_{L^2}$

*Par commodité, nous appelons $||\cdot||_{\widehat{H}^s}$ une de ces normes.*

Preuve. Les normes a) et b) sont équivalentes grâce au Lemme 2.4 de [YZ04]. Les autres équivalences sont claires. $\square$

**Remarque 3.2.5.** *L'espace $\widehat{H}^s$ est bien entendu un espace de Hilbert.*

### 3.2.2 Asymptotique des valeurs propres

Nous avons besoin d'une description précise du comportement asymptotique des différences $\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}$ quand $j_1$ et $j_2$ tendent vers $+\infty$. En fait, nous avons

**Proposition 3.2.6.** *Soit $\widehat{p} = \frac{p}{p+1}$, il existe $c, C > 0$ tel que*

$$\forall j_1 > j_2 \geq 1 \qquad c(j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}}) \leq \lambda_{j1} - \lambda_{j2} \leq C(j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}})$$

La classique formule de Weyl (voir [RS] Théorème XIII.81) nous fournit

$$N(E) := \mathrm{Card}(j \geq 1, \lambda_j \leq E) \simeq \frac{2}{2\pi} \int_{\{x, V(x) \leq E\}} \sqrt{E - V(x)} dx$$

Le changement de variable $x \mapsto xE^{1/2p}$ montre que $N(E) \simeq cE^{1/2\widehat{p}}$. Par conséquence, nous avons

$$\lambda_j \simeq c j^{2\widehat{p}} \tag{3.9}$$

Malheureusement, cela ne suffit pas pour prouver 3.2.6. C'est pour cela que nous avons besoin de connaître un développement asymptotique de la suite $\lambda_j$.

**Théorème 3.2.7.** *(Helffer-Robert) Soient $k, p \in \mathbb{N}^\star$, et $V$ un polynôme réel de degré $2p$ qui satisfait $\lim\limits_{\pm\infty} V(x) = +\infty$, si $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ est la suite des valeurs propres de l'opérateur différentiel $-d^{2k}/dx^{2k} + V(x)$ on $L^2(\mathbb{R})$, alors il y a une suite $(b_i)_{i\geq 0}$ avec $b_0 > 0$ telle que*

$$\lambda_j \simeq (j+\sigma)^{(2kp)/(p+k)} \sum_{i\geq 0} b_i (j+\sigma)^{-i/(p+k)}$$

Preuve. Le théorème (2-2) de [HR82] (page 858) assure que

$$\lambda_j^{(p+k)/(2kp)} \simeq (j+\sigma) \sum_{i\geq 0} b_i' (j+\sigma)^{-i/(p+k)}$$

avec certaines suites $(b_i')_{i\geq 0}$ et $b_0' > 0$. Par suite, notre conclusion découle par composition avec la fonction $x \mapsto x^{2kp/(p+k)}$ autour de $b_0'$. □

Nous pouvons maintenant prouver 3.2.6 en choisissant $k = 1$ dans le dernier théorème, ainsi

$$\lambda_j = b_0 j^{\widehat{p}} + \beta_1 j^{(2p-1)/(p+1)} + \cdots \beta_{2p-1} j^{1/(p+1)} + \beta_{2p} + o(1)$$

Par conséquent, pour tous $j_1, j_2 \geq 1$, la différence $|\lambda_{j1} - \lambda_{j2}|$ est supérieure à

$$b_0(j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}}) - \sum_{i=1}^{2p-1} |\beta_i| |j_1^{(2p-i)/(p+1)} - j_2^{(2p-i)/(p+1)}| - |R(j_1) - R(j_2)|$$

où $\lim\limits_{j\to+\infty} R(j) = 0$. Pour $j_1 > j_2$ suffisamment grand, nous avons

$$b_0(j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}}) > c > |R(j_1) - R(j_2)|$$

Il nous reste à contrôler les autres termes. Rappelons que, pour tout $\omega \in (0,1)$, l'application $x \mapsto x^{1/\omega}$ est convexe sur $(0, +\infty)$. Par suite, si $j_1 > j_2$ alors

$$\frac{|j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}}|}{|j_1^{2\widehat{p}\omega} - j_2^{2\widehat{p}\omega}|} \geq \frac{d(x^{1/\omega})}{dx}(j_2^{2\widehat{p}\omega}) = \frac{j_2^{2\widehat{p}(1-\omega)}}{\omega}$$

Choisissons $\omega$ tel que $2\widehat{p}\omega$ appartient à $\{(2p-i)/(p+1), i \in [[1, 2p-1]]\}$, et nous comprenons qu'il existe un certain $J \geq 1$ tel que

$$\forall j_1 > j_2 \geq J \qquad \lambda_{j1} - \lambda_{j2} \geq c(j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}})$$

Par ailleurs $\lambda_j \simeq j^{2\widehat{p}}$, le Lemme (3.2.6) découle alors des deux faits suivants

$$\inf_{j_1 > J \geq j_2} \frac{\lambda_{j1} - \lambda_{j2}}{(j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}})} > 0, \qquad \inf_{J \geq j_1 > j_2} \frac{\lambda_{j1} - \lambda_{j2}}{(j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}})} > 0$$

La même argumentation amène à

$$\lambda_{j1} - \lambda_{j2} \leq C(j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}})$$

### 3.2.3 Lemme du commutateur

La source de notre inspiration réside dans [Bam08]. Ici, l'application $u : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}, \alpha \in [0, n]$ et $\beta \in [0, 2n - \alpha]$ :

i) $u(0, 0, 0) = 0$

ii) $u(n, \alpha, \beta) \leq u(n + 1, \alpha, \beta)$

iii) $u(n, \alpha, \beta) \leq u(n + 1, \alpha, \beta + 2)$

iv) $u(n, \alpha, \beta) \leq u(n + 1, \alpha, \beta + 1)$

v) $u(n, \alpha, \beta) \leq u(n + 1, \alpha + 1, \beta + 1)$

vi) $u(n, \alpha, \beta) \leq u(n + 1, \alpha + 1, \beta)$

vii) si $1 \leq k \leq \alpha$ alors $u(n, \alpha, \beta) + 1 \leq u(n + 1, \alpha - k, \beta)$

La condition vii) prouve que $u$ n'est pas nulle. Par exemple, nous pouvons choisir $u(n, \alpha, \beta) = \frac{1}{2}(n - \alpha)$. Mais pour notre propos, nous utiliserons

$$u(n, \alpha, \beta) = \frac{2n - \alpha - \beta}{2} \tag{3.10}$$

Il serait intéressant de trouver la suite minimale $u$ vérifiant les conditions précédentes en raison du lemme suivant

**Lemme 3.2.8.** *Soient $T = -\Delta + V$ un opérateur différentiel sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, où $V$ est un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}^\star$, et une fonction $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists c > 0 \qquad |a^{(n)}(x)| \leq c(1 + |x|)^c$$

*L'opérateur $A_0 : f \mapsto af$ est bien défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nous définissons les opérateurs $A_n$ par récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A_{n+1} = A_n T - T A_n$$

*Dans ce cas, nous avons*

*a) $A_n$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq n$, et précisément*

$$A_n = \sum_{\alpha=0}^{n} \left( \sum_{\beta=0}^{2n-\alpha} V_{\alpha,\beta,n} a^{(\beta)} \right) D^\alpha \tag{3.11}$$

*et $V_{\alpha,\beta,n}$ est un polynôme de degré $\leq (d - 1)u(n, \alpha, \beta)$. En outre, les coefficients de $V_{\alpha,\beta,n}$ ne dépendent que de $\alpha, \beta, n$ et $V$.*

b) *Si $\phi$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ satisfont $T\phi = \lambda\phi$, $T\psi = \mu\psi$ et $\lambda \neq \mu$, alors*

$$\left|\int_{\mathbb{R}} a(x)\phi(x)\psi(x)dx\right| \leq \frac{1}{|\lambda-\mu|^n}\left|\int_{\mathbb{R}}(A_n\phi)(x)\psi(x)dx\right|$$

PREUVE.

a) Le lemme est en un sens purement algébrique, l'hypothèse sur les dérivées de $a$ est faite seulement pour assurer que $A_0$ est bien défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Commençons par examiner les premiers opérateurs différentiels, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, nous avons $T(f) = -f^{''} + Vf$, donc

$$A_1(f) = aT(f) - T(af) = a^{(2)}f + 2a'f'$$
$$A_2(f) = (2V'a' + a^{(4)})f + 4a^{(3)}f' + 4a^{(2)}f^{(2)}$$
$$A_3(f) = (2V^{(3)}a' + 8V^{(2)}a^{(2)} + 6V'a^{(3)} + a^{(6)})f + (4V^{(2)}a' + 12V'a^{(2)} + 6a^{(5)})f' + 12a^{(4)}f^{(2)} + 8a^{(3)}f^{(3)}$$
$$\begin{aligned} A_4(f) \;=\;& (4V'V^{(2)}a' + 2V^{(5)}a' + 12V^{(4)}a^{(2)} + 12(V')^2a^{(2)} + \\ & 32V^{(3)}a^{(3)} + 32V^{(2)}a^{(4)} + 12V'a^{(5)} + a^{(8)})f \\ & +(8V^{(4)}a' + 40V^{(3)}a^{(2)} + 80V^{(2)}a^{(3)} + 48V'a^{(4)} + 8a^{(7)})f' \\ & +(8V^{(3)}a' + 32V^{(2)}a^{(2)} + 48V'a^{(3)} + 24a^{(6)})f^{(2)} \\ & +32a^{(5)}f^{(3)} + 16a^{(4)}f^{(4)} \end{aligned}$$

Par exemple, on peut vérifier que $\deg V_{\alpha,\beta,n} \leq \frac{(d-1)}{2}(2n-\alpha-\beta)$ pour les premiers cas. Examinons le cas général par récurrence.
Nous avons $A_0 = a$, les polynômes sont constants, leurs degrés sont inférieurs à $\leq (d-1)u(0,0,0) = 0$.
Supposons que $A_n$ est de la forme (3.11). Nous devons calculer $A_{n+1}$ :

$$A_{n+1} = -A_n \circ \Delta + \Delta \circ A_n + A_nV - VA_n$$

La partie $-A_n \circ \Delta + \Delta \circ A_n$ va contribuer à élever le degré de dérivation tandis qu'elle n'augmente pas les degrés de polynômes, l'autre partie $A_nV - VA_n$ contribue de manière opposée.
Commençons avec $-A_n\Delta + \Delta A_n$, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nous avons

$$-A_n(f^{(2)}) + (A_n(f))^{(2)} = \sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{2n-\alpha}\left(V_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta)}f^{(\alpha)}\right)^{(2)} - V_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta)}f^{(\alpha+2)}$$

La somme est combinaison linéaire de cinq termes

$$V^{(2)}_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta)}f^{(\alpha)}, V_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta+2)}f^{(\alpha)}, V'_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta+1)}f^{(\alpha)}, V_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta+1)}f^{(\alpha+1)}, V'_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta)}f^{(\alpha+1)}$$

Les conditions $0 \leq \alpha \leq n$ et $0 \leq \beta \leq 2n-\alpha$ prouvent que $-A_n(f^{(2)}) + (A_n(f))^{(2)}$ est en fait un polynôme combinaison de $a^{(\beta)}f^{(\alpha)}$ avec $0 \leq \alpha \leq n+1$ et $0 \leq \beta \leq 2n-\alpha+2 = 2(n+1)-\alpha$. En outre, nous devons vérifier sur chaque terme que le degré du polynôme coefficient de $a^{(\beta)}f^{(\alpha)}$ est inférieur à $(d-1)u(n+1,\alpha,\beta)$. En fait, pour chaque terme nous avons

$$\begin{aligned} V^{(2)}_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta)}f^{(\alpha)} &\Rightarrow \deg(V^{(2)}_{\alpha,\beta,n}) \leq \deg(V_{\alpha,\beta,n}) \leq (d-1)u(n,\alpha,\beta) \leq (d-1)u(n+1,\alpha,\beta) \\ V_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta+2)}f^{(\alpha)} &\Rightarrow \deg(V_{\alpha,\beta,n}) \leq (d-1)u(n,\alpha,\beta) \leq (d-1)u(n+1,\alpha,\beta+2) \\ V'_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta+1)}f^{(\alpha)} &\Rightarrow \deg(V'_{\alpha,\beta,n}) \leq \deg(V_{\alpha,\beta,n}) \leq (d-1)u(n,\alpha,\beta) \leq (d-1)u(n+1,\alpha,\beta+1) \\ V_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta+1)}f^{(\alpha+1)} &\Rightarrow \deg(V_{\alpha,\beta,n}) \leq (d-1)u(n,\alpha,\beta) \leq (d-1)u(n+1,\alpha+1,\beta+1) \\ V'_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta)}f^{(\alpha+1)} &\Rightarrow \deg(V_{\alpha,\beta,n}) \leq (d-1)u(n,\alpha,\beta) \leq (d-1)u(n+1,\alpha+1,\beta) \end{aligned}$$

Ainsi, nous constatons que les nouveaux polynômes $V_{\alpha,\beta,n+1}$ ne dépendent que des anciens polynômes $V_{\alpha,\beta,n}$ et de $V$. Maintenant calculons $A_nV - VA_n$.

$$\begin{aligned}
A_n(Vf) - VA_n(f) &= \sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{2n-\alpha} V_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta)}\left((Vf)^{(\alpha)} - Vf^{(\alpha)}\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=0}^{2n-\alpha} V_{\alpha,\beta,n}a^{(\beta)}\left((Vf)^{(\alpha)} - Vf^{(\alpha)}\right)
\end{aligned}$$

Cette fois, la somme est combinaison linéaire des termes $V_{\alpha,\beta,n}V^{(k)}a^{(\beta)}f^{(\alpha-k)}$ pour $k \in [1, \alpha]$. Par suite, $A_n(Vf) - VA_n(f)$ est une combinaison polynomiale de $a^{(\beta)}f^{(\alpha)}$ avec $\alpha \in [0, n] \subset [0, n+1]$ et $\beta \in [0, 2n-\alpha] \subset [0, 2n+2-\alpha]$. Comme avant, nous devons vérifier dans $A_n(Vf) - VA_n(f)$ que le coefficient polynomial de $a^{(\beta)}f^{(\alpha)}$ a un degré inférieur à $(d-1)u(n+1, \alpha, \beta)$. Il est suffisant d'examiner le terme $V_{\alpha,\beta,n}V^{(k)}a^{(\beta)}f^{(\alpha-k)}$ si $k \in [\![1, \alpha]\!]$ :

$$\begin{aligned}
\deg\left(V_{\alpha,\beta,n}V^{(k)}\right) &\leq (d-1)u(n, \alpha, \beta) + (d-1) \\
&\leq (d-1)u(n, \alpha - k, \beta)
\end{aligned}$$

De nouveau, les nouveaux polynômes ne dépendent que des anciens et des dérivées de $V$.

b) L'opérateur $T$ est clairement auto-adjoint, et alors

$$\int_{\mathbb{R}}(A_{n+1}\phi)\psi = \int_{\mathbb{R}}(A_nT\phi)\psi - \int_{\mathbb{R}}(A_n\phi)(T\psi) = (\lambda - \mu)\int_{\mathbb{R}}(A_n\phi)\psi$$

La conclusion est immédiate par récurrence.

□

### 3.2.4 Certaines estimations des modes propres et de leurs intégrale-produits

Rappelons que $V(x)$ a un degré $2p \geq 4$. Le Théorème 1.5 de [YZ01] (page 576) énonce la chose suivante :

**Théorème 3.2.9.** *Pour tous $r \in [2, \infty]$ et $p \geq 2$ il existe $\sigma(r,p) \geq \frac{-1}{8p}$ tel que*

$$||\phi_j||_{L^r} \simeq C_{r,p}j^{\sigma(r,p)}$$

*avec*

$$\begin{aligned}
2 \leq r \leq 4 &\Rightarrow \sigma(r,p) = \tfrac{1}{2p}\left(\tfrac{1}{r} - \tfrac{1}{2}\right) \leq 0 \\
4 \leq r \leq \tfrac{4p-2}{p-2} &\Rightarrow \sigma(r,p) = \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{r}\right)\left(1 - \tfrac{1}{2p}\right) - \tfrac{1}{4} \leq 0 \\
\tfrac{4p-2}{p-2} \leq r \leq +\infty &\Rightarrow \sigma(r,p) = \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{r}\right)\left(1 - \tfrac{1}{2p}\right) - \tfrac{1}{4} \geq 0
\end{aligned}$$

*En particulier, pour tout $p \geq 2$ nous avons $\sigma(r,p) \leq \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2p}\right) - \frac{1}{4}$.*

L'inégalité de Hölder amène trivialement au

**Corollaire 3.2.10.** *Pour tous $p \geq 2$, $k \geq 3$, il existe $\gamma(k,p) > 0$ tel que pour tout $j_1 \geq \cdots j_k$ nous avons*

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\phi_{j_1}(x)\cdots\phi_{j_k}(x)dx\right| \leq Cj_3^{\gamma} \tag{3.12}$$

PREUVE. Choisissons $r_1 = r_2 = 4$ et $r_3, \cdots, r_k \geq 2$ tel que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{r_3} + \cdots + \frac{1}{r_k} = 1$. Soit $\gamma := (k-2)\left(\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2p}\right) - \frac{1}{4}\right)$ et appliquons l'inégalité de Hölder pour dominer le membre gauche de (3.12) par

$$||\phi_{j_1}||_{L^4}||\phi_{j_2}||_{L^4}\prod_{i=3}^{k}||\phi_{j_i}||_{L^{r_i}} \leq C j_3^{\gamma}$$

□

Pour la suite, on établit le lemme suivant

**Lemme 3.2.11.** *Pour tous $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{N}, s \geq 0$ nous avons*

$$||x^a f^{(b)}||_{\widehat{H}^s} \leq C(s,a,b)||f||_{\widehat{H}^{s+a/p+b}}$$

PREUVE. À l'aide de la norme c) du Théorème 3.2.4, nous pouvons en fait vérifier que le cas $s = 0$ suffit. Ce cas particulier est une conséquence facile du calcul de Weyl. L'opérateur pseudo-différentiel $x^a \dfrac{d^b}{dx^b} \circ T^{-a/2p-b/2}$ est borné sur $L^2(\mathbb{R})$ grâce au théorème de Calderón-Vaillancourt ([BM88]) : la fonction suivante a ses dérivées bornées

$$(x,\xi) \mapsto \frac{x^a \xi^b}{(1+\xi^2+V(x))^{a/2p+b/2}} < +\infty$$

Par suite, il existe $C(a,b) > 0$ tel que

$$||x^a f^{(b)}||_{L^2} \leq C(a,b)||T^{a/2p+b/2}f||_{L^2} \leq C(a,b)||f||_{\widehat{H}^{a/p+b}}$$

□

**Proposition 3.2.12.** *Pour tous $s > \frac{1}{2}$ et $f, g \in \widehat{H}^s$ nous avons $f, g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et*

$$||fg||_{\widehat{H}^s} \leq C(s)(||f||_{\widehat{H}^s}||g||_\infty + ||f||_{\widehat{H}^s}||g||_\infty)$$

*En d'autres termes, $\widehat{H}^s$ est stable par produit.*

PREUVE. Nous avons $\widehat{H}^s \subset H^s \subset L^\infty$ et $\widehat{H}^s \subset L^2(\mathbb{R})$, par suite, nous avons l'égalité suivante (voir [AG91] page 98 chapitre 2, Proposition 2.1.1)

$$||fg||_{H^s} \leq C(s)(||f||_{H^s}||g||_\infty + ||f||_\infty||g||_{H^s})$$

Et finalement,

$$||fg||_{\widehat{H}^s} = ||fg||_{H^s} + ||x^{ps}f(x)g(x)||_{L^2} \leq C(s)(||f||_{H^s}||g||_\infty + ||f||_{H^s}||g||_\infty) + ||f||_{\widehat{H^s}}||g||_\infty$$

□

Le Théorème 3.2.4 et l'estimation (3.9) nous permettent de comprendre que l'on a $||\phi_j||_{\widehat{H}^s} \leq C j^{s\widehat{p}}$. Le Théorème 3.2.9, la dernière Proposition et une récurrence facile nous amènent au

**Corollaire 3.2.13.** *Il existe $\eta(p) > 0$ tel que pour tous $j_3 \geq \cdots \geq j_k \in \mathbb{N}^\star$, nous avons*

$$||\phi_{j_3}\cdots\phi_{j_k}||_{\widehat{H}^s} \leq kC(s)j_3^{s\widehat{p}+\eta(p)} \tag{3.13}$$

Maintenant, nous pouvons vérifier qu'un calcul fonctionnel holomorphe est possible sur $\widehat{H}^s$.

**Proposition 3.2.14.** *Soient $s > \frac{1}{2}$, $f, g \in \widehat{H}^s$ et $K : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction analytique réelle qui s'annule en $(0,0)$ :*

$$K(\xi_1, \xi_2) = \sum_{(n_1,\dots,n_4)\in\mathbb{N}^4\setminus\{(0,0,0,0)\}} \alpha(n_1,\dots,n_4)\xi_1^{n_1}\overline{\xi_1}^{n_1}\xi_2^{n_3}\overline{\xi_2}^{n_4}$$

*Alors $K(f,g)$ est bien défini dans $\widehat{H}^s$ et coïncide avec la fonction $x \mapsto K(f(x), g(x))$.*

Preuve. Par bilinéarité et par la Proposition 3.2.12, on voit qu'il existe $C(s) > 0$ tel que

$$\forall f, g \in \widehat{H}^s \qquad ||fg||_{\widehat{H}^s} \le C(s)||f||_{\widehat{H}^s}||g||_{\widehat{H}^s}$$

Le théorème 3.2.4 montre alors que $\widehat{H}^s$ est invariant par $f \mapsto \overline{f}$ et $||f||_{\widehat{H}^s} = ||\overline{f}||_{\widehat{H}^s}$. Ensuite, la série suivante converge uniformément sur les ensembles bornés de $\widehat{H}^s \times \widehat{H}^s$ pour la norme sous-multiplicative $C(s)||\cdot||_{\widehat{H}^s}$ :

$$K(f,g) := \sum_{(n_1,\dots,n_4)\in\mathbb{N}^4\setminus\{(0,0,0,0)\}} \alpha(n_1,\dots,n_4)f^{n_1}\overline{f}^{n_1}g^{n_3}\overline{g}^{n_4}$$

Comme $s > \frac{1}{2}$, la convergence dans $\widehat{H}^s$ implique la converge dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Cela implique que $K(f,g)$ coïncide avec la fonction

$$x \mapsto \sum_{(n_1,\dots,n_4)\in\mathbb{N}^4\setminus\{(0,0,0,0)\}} \alpha(n_1,\dots,n_4)f(x)^{n_1}\overline{f(x)}^{n_1}g(x)^{n_3}\overline{g(x)}^{n_4} = K(f(x), g(x))$$

□

### 3.2.5 Intégrale-produits des fonctions propres

On rappelle que $\widehat{p} = \frac{p}{p+1} \in (1,2)$. Nous pouvons maintenant estimer les intégrale-produits des fonctions propres.

**Proposition 3.2.15.** *Pour tout $p \ge 2, k \ge 3, N \ge 1$, il existe $\nu = \nu(p,k) > 0$ et $C(k,N,p) > 0$ tels que*

$$\forall j \in \mathbb{N}^{\star k} \qquad \left|\int_{\mathbb{R}} \phi_{j1}(x)\cdots\phi_{jk}(x)dx\right| \le C(k,N,p)j_3^\nu A(j)^N \tag{3.14}$$

*où $j_1 \ge j_2 \ge \dots \ge j_k$ et*

$$A(j) := \frac{(j_2j_3)^{\widehat{p}}}{(j_2j_3)^{\widehat{p}} + j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}}}$$

**Remarque 3.2.16.** *Cette estimation généralise celle obtenue dans [GIP09] pour les intégrales-produits d'Hermite.*

**Remarque 3.2.17.** *Grâce à la Proposition 3.2.6, il n'est pas difficile de voir*

$$cA(j) \le \frac{\sqrt{\lambda_{j_2}\lambda_{j_3}}}{\sqrt{\lambda_{j_2}\lambda_{j_3}} + \lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}} \le CA(j)$$

Preuve. Par commodité, on ne mentionnera pas $p$ dans les constantes. Nous considérons maintenant deux cas.

- $j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}} \leq (j_2 j_3)^{\widehat{p}}$. La conclusion est claire à l'aide de $A(j) \geq \frac{1}{2}$ et du Corollaire 3.2.10.
- $(j_2 j_3)^{\widehat{p}} \leq j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}}$. En particulier $j_1 > j_2$.
  Nous introduisons l'opérateur $A : f \mapsto af$ où $a = \phi_{j_3} \cdots \phi_{j_k}$. Le lemme 3.2.8 nous permet de voir

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} \phi_{j1} \cdots \phi_{jk} dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (A\phi_{j_2})\phi_{j_1} \right| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda_{j1} - \lambda_{j2}|^N} ||A_N \phi_{j2}||_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{|\lambda_{j1} - \lambda_{j2}|^N} \sum_{\alpha=0}^{N} \sum_{\beta=0}^{2N-\alpha} ||V_{\alpha,\beta,N}(D^\beta a)(D^\alpha \phi_{j2})||_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{|\lambda_{j1} - \lambda_{j2}|^N} \sum_{\alpha=0}^{N} \sum_{\beta=0}^{2N-\alpha} ||V_{\alpha,\beta,N} D^\beta a||_{L^\infty} ||D^\alpha \phi_{j2}||_{L^2} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda_{j1} - \lambda_{j2}|^N} \sum_{\alpha=0}^{N} \sum_{\beta=0}^{2N-\alpha} ||V_{\alpha,\beta,N} D^\beta a||_{H^1} ||D^\alpha \phi_{j2}||_{L^2}
\end{aligned}$$

Le Lemme 3.2.11 et l'inclusion $H^1(\mathbb{R}) \subset \widehat{H}^1(\mathbb{R})$ nous donne

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} \phi_{j1} \cdots \phi_{jk} dx \right| &\leq \frac{C}{|\lambda_{j1} - \lambda_{j2}|^N} \sum_{\alpha=0}^{N} \sum_{\beta=0}^{2N-\alpha} ||a||_{\widehat{H}^{1+\beta+(1/p)\deg V_{\alpha,\beta,N}}} ||\phi_{j2}||_{\widehat{H}^\alpha} \\
&\leq \frac{C(N)}{|\lambda_{j1} - \lambda_{j2}|^N} \max_{\alpha \in [\![0,N]\!], \beta \in [\![0,2N-\alpha]\!]} ||a||_{\widehat{H}^{1+\beta+(1/p)\deg V_{\alpha,\beta,N}}} ||\phi_{j2}||_{\widehat{H}^\alpha}
\end{aligned}$$

Faisons maintenant appel au Lemme 3.2.6, à l'estimation (3.13) et à $||\phi_j||_{\widehat{H}^\alpha} \leq C j^{\widehat{p}\alpha}$, on voit que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \phi_{j1} \cdots \phi_{jk} dx \right| \leq \frac{C(k,N) j_3^{\eta(p)}}{(j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}})^N} \max_{\alpha \in [\![0,N]\!], \beta \in [\![0,2N-\alpha]\!]} j_3^{\widehat{p}(1+\beta)+(\deg V_{\alpha,\beta,N})/(p+1)} j_2^{\alpha\widehat{p}} \tag{3.15}$$

Une application du Lemme 3.2.8 nous permet de constater que $\deg V_{\alpha,\beta,N} \leq \frac{2p-1}{2}(2N - \alpha - \beta)$. Soit $\nu = \eta(p) + \widehat{p}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
(j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}})^N \left| \int_{\mathbb{R}} \phi_{j1} \cdots \phi_{jk} dx \right| &\leq C(k,N) j_3^\nu \max_{\alpha,\beta} j_2^{\widehat{p}\alpha} j_3^{\widehat{p}\beta + (2N-\alpha-\beta)(2p-1)/(2p+2)} \\
&\leq C(k,N) j_3^\nu \max_{\alpha,\beta} j_2^{\widehat{p}\alpha} j_3^{\beta/(2p+2)+(2N-\alpha)(2p-1)/(2p+2)} \\
&\leq C(k,N) j_3^\nu \max_{\alpha} j_2^{\widehat{p}\alpha} j_3^{(2N-\alpha)2p/(2p+2)} \\
&\leq C(k,N) j_3^{\nu+2\widehat{p}N} \max_{\alpha} \left(\frac{j_2}{j_3}\right)^{\widehat{p}\alpha} \\
&\leq C(k,N) j_3^\nu (j_2 j_3)^{\widehat{p}N}
\end{aligned}$$

Puisque $(j_2 j_3)^{\widehat{p}} + j_1^{2\widehat{p}} - j_2^{2\widehat{p}} \leq 2(j_1^{2\widehat{p}} - {j_2}^{2\widehat{p}})$, on comprend que (3.14) est valide.

□

## 3.3 Modèle Abstrait

### 3.3.1 Discrétisation de l'EDP

Par commodité, nous noterons $\mathbb{N}^\star = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{Z}^\star = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

**Définition 3.3.1.** *Nous munissons* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{\mathbb{N}^\star}$ *avec la mesure produit.*

Ensuite, si l'on considère $(m_j)_{j\geq 1} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{\mathbb{N}^\star}$, nous considérons $M_k$ l'unique opérateur borné de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $M_k\phi_j = j^{-k}m_j\phi_j$. Par suite, le spectre de $T + M_k$ est bien sûr $\omega_j := \lambda_j + j^{-k}m_j$. Introduisons maintenant l'espace sur lequel nous allons transférer l'EDP initiale(3.1).

**Définition 3.3.2.** *Nous définissons* $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ *l'espace des suites* $(z_j)_{j\in\mathbb{Z}^\star}$ *telles que*

$$||z||_s := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^\star} |j|^{2s\widehat{p}}|z_j|^2\right)^{1/2} < +\infty$$

*Nous définissons de même* $\ell_s(\mathbb{N}^\star)$.

**Définition 3.3.3.** *Une suite de la forme* $(\overline{z}, z)$ *avec* $z \in \ell_s(\mathbb{N}^\star)$ *est qualifiée de* <<*réelle*>>. *Ainsi, nous pouvons identifier* $\ell_s(\mathbb{N}^\star)$ *à un sous-ensemble de* $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$.

Pour chaque $s \geq 0$, le théorème 3.2.4 et l'inégalité $\lambda_j \simeq j^{2\widehat{p}}$ prouvent que l'application (3.2) est un isomorphisme, en particulier un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. La méthode pour résoudre l'EDP (3.1) dans l'espace $\mathcal{C}^0((-T, +T), \widehat{H}^s)$ est de la transférer sur l'espace $\mathcal{C}^0((-T, T), \ell_s(\mathbb{Z}^\star))$ en posant $z(t) = \Gamma_s(\psi(t, \cdot))$, en d'autres termes

$$\psi(t, x) = \sum_{j\geq 1} z_j(t)\phi_j(x) \qquad \forall j \geq 1 \quad \overline{z_{-j}}(t) = z_j(t)$$

L'EDP (3.1) devient

$$i\sum_{j\geq 1} z_j'(t)\phi_j(x) = \sum_{j\geq 1} \omega_j z_j(t)\phi_j(x) + \partial_2 g\left(\sum_{j\geq 1} z_j(t)\phi_j(x), \sum_{j\geq 1} z_{-j}(t)\phi_j(x)\right)$$

Considérons maintenant les deux fonctions suivantes sur $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ définies par (3.4). En fait, il est facile de vérifier que $H_0$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ lorsque $s$ est grand car $\omega_j$ est polynomialement borné. La Proposition 3.4.1 montrera que $P$ est aussi $\mathcal{C}^\infty$, en particulier pour tout $j \geq 1$ nous avons

$$\partial_1 g\left(\sum_{j\geq 1} z_j(t)\phi_j(x), \sum_{j\geq 1} z_{-j}(t)\phi_j(x)\right) = \sum_{j\geq 1} \phi_j(x)\frac{\partial P}{\partial z_j}$$

$$\partial_2 g\left(\sum_{j\geq 1} z_j(t)\phi_j(x), \sum_{j\geq 1} z_{-j}(t)\phi_j(x)\right) = \sum_{j\geq 1} \phi_j(x)\frac{\partial P}{\partial z_{-j}}$$

En conséquence, (3.1) est équivalente au système suivant

$$\forall j \geq 1 \qquad iz_j' = \omega_j z_j + \frac{\partial P}{\partial z_{-j}}$$

Mais nous devons le résoudre dans l'espace $\ell_s(\mathbb{N}^\star)$. Or $g$ est holomorphe et satisfait $g(\xi,\overline{\xi}) \in \mathbb{R}$, si bien que la condition suivante se réalise (voir la preuve du Lemme 3.4.3)

$$\forall \xi \in \mathbb{C} \quad \partial_2 g(\xi,\overline{\xi}) = \overline{\partial_1 g(\xi,\overline{\xi})}$$

Enfin, les remarques précédentes nous prouvent que la résolution de (3.1) dans l'espace $\mathcal{C}^0((-T,+T),\widehat{H}^s)$ est équivalente à celle du système hamiltonien suivant dans l'espace $\mathcal{C}^0((-T,T),\ell_s^2(\mathbb{Z}^\star))$

$$\forall j \in \mathbb{N}^\star \quad \left\{ \begin{array}{lclcl} \dot{z_j} & = & -i\frac{\partial}{\partial z_{-j}}(H_0+P) & = & -i\omega_j z_j - i\frac{\partial P}{\partial z_{-j}} \\ \dot{z_{-j}} & = & i\frac{\partial}{\partial z_j}(H_0+P) & = & i\omega_j z_{-j} + i\frac{\partial P}{\partial z_j} \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Remarquons que les deux équations sont conjuguées si $z(0) \in \ell_s(\mathbb{N}^\star)$. L'existence locale est facile (voir la prochaine sous-partie). Le but du reste de l'article est de développer un modèle abstrait pour résoudre (3.16).

### 3.3.2 Structure Symplectique et crochet de Poisson

Nous avons toujours $s > 0$, donc $\ell_s(\mathbb{Z}^\star) \subset \ell_0(\mathbb{Z}^\star)$. Maintenant, rappelons certaines définitions usuelles. Nous commençons par la structure symplectique canonique sur $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ qui est donnée par l'automorphisme suivant de $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$

$$J : ((z_j)_{j<0},(z_j)_{j>0}) \mapsto ((-z_{-j})_{j<0},(z_{-j})_{j>0})$$

Ainsi, $J^2 = -Id$ et $J^\star = J$ quand $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ est muni de la dualité canonique :

$$\langle z, z' \rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}^\star} z_j z'_j$$

Si $f : \ell_s \to \mathbb{C}$ est une application régulière, alors nous définissons son gradient par la formule

$$\forall x \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \quad \forall h \in \ell_s^2(\mathbb{Z}^\star) \quad \langle \nabla f_x, h \rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}^\star} \left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)_x h_j$$

Remarquons que sans condition sur $f$, le gradient $\nabla f$ appartient à $\ell_{-s}(\mathbb{Z}^\star)$. Le gradient symplectique est par définition $X_f = iJ\nabla_f$. Ainsi, (3.16) prend la forme simplifiée

$$z'(t) = iX_{H_0+P}(z(t)) \tag{3.17}$$

Comme annoncé dans l'introduction, nous préférons reformuler la dernière équation ainsi

$$z(t) = \exp(itX_{H_0})z(t) + \int_0^t \exp(i(t-t')X_{H_0})X_P(z(t'))dt' \tag{3.18}$$

Admettons un instant la Proposition 3.4.1 qui assure que $X_P$ est à valeurs dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$. Comme $(\exp(itX_{H_0}))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe unitaire de $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ (on le constate en résolvant 3.16 si $P = 0$), par suite (3.1) admet une solution avec existence locale par un classique argument de point fixe.

Quand cela est possible, nous définissons le crochet de Poisson de deux hamiltoniens réguliers $f$ et $g \in \mathcal{C}^1(\ell_s(\mathbb{Z}^\star),\mathbb{C}))$ :

$$\{f,g\} = i\langle \nabla_f, J\nabla_g \rangle = i\sum_{j\geq 1} \frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial g}{\partial z_{-j}} - \frac{\partial f}{\partial z_{-j}}\frac{\partial g}{\partial z_j} \tag{3.19}$$

Par exemple, si $X_f$ ou $X_g$ est à valeurs dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$. Pour chaque solution $z(t)$ de (3.16) et chaque fonction test régulière $\phi : \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \to \mathbb{C}$ nous avons

$$\frac{d}{dt}\phi(z(t)) = \langle \nabla_{z(t)}\phi, z'(t)\rangle = -i\{H_0 + P, \phi\}(z(t))$$

Comme nous le voyons dans (3.18), l'application $P$ doit avoir un gradient à valeurs dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$, c'est pour cela que nous donnons la définition suivante

**Définition 3.3.4.** *Pour chaque $s > 0$, $\mathcal{H}^s$ est la classe des fonctions $F : \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \to \mathbb{C}$ holomorphes sur un voisinage de $0$ qui satisfont*

$$X_F \in \mathcal{C}^\infty(\ell_s, \ell_s)$$

*et si $(F_k)_{k\geq 0}$ est la suite des polynômes de Taylor de $F$ en $0$ alors*

$$F_0 = F_1 = F_2 = 0$$

$$F_k \in \mathcal{C}^\infty(\ell_s, \mathbb{C}) \qquad X_{F_k} \in \mathcal{C}^\infty(\ell_s, \ell_s)$$

Enfin, nous rappelons une condition classique pour la régularité des polynômes en dimension quelconque. Un polynôme homogène $P$ sur $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ est par définition la donnée d'une forme $k$-linéaire continue sur $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ et l'on pose alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(z, \cdots, z)$$

**Proposition 3.3.5.** *Soit $P : \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \to \mathbb{C}$ un polynôme homogène de degré $k \geq 1$ qui satisfait*

$$\forall z \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \qquad |P(z)| \leq C||z||_s^k$$

*alors $P : \ell_s(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si en outre $P$ satisfait* $\quad ||X_P(z)||_s \leq C||z||_s^{k-1}$ *alors $X_P : \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \to \ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

En fait, dans la dernière Proposition, $P$ est une fonction holomorphe (voir [Car67] pour la régularité des polynômes ou [Nac69] pour l'holomorphie).

### 3.3.3 Les classes des polynômes

**Définition 3.3.6.** *Un polynôme formel $P$ sur $\ell_s^2(\mathbb{Z}^\star)$ est dans la classe $T_{k,\nu}$ s'il est homogène de degré $k$ et peut s'écrire :*

$$P(z) = \sum_{(j_1,\cdots,j_k)\in {\mathbb{Z}^\star}^k} a_j z_{j_1} \cdots z_{j_k}$$

*de sorte que pour tout $N > 0$ nous avons*

$$|a_j| \leq C(N)\mu(j)^\nu A(j)^N$$

*où nous ordonnons $(j_1, \cdots, j_k)$ en $(j_1^\star, \cdots, j_k^\star)$ tel que $|j_1^\star| \geq \cdots \geq |j_k^\star|$ et définissons*

$$\mu(j) = |j_3^\star| \qquad A(j) = \frac{(|j_2^\star j_3|^\star)^{\widehat{p}}}{(|j_2^\star j_3^\star|)^{\widehat{p}} + |j_1^\star|^{2\widehat{p}} - |j_2^\star|^{2\widehat{p}}}$$

En fait, avec cette définition les polynômes formels de classe $T_{k,\nu}$ sont réguliers.

**Proposition 3.3.7.** *Pour chaque $P \in T_{k,\nu}$ et $s > (\nu + 1/2)/\widehat{p}$, nous avons*

$$|P(z)| \leq C(P)||z||_s^k$$

*Par conséquent, $P : \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et même holomorphe).*

Preuve. Comme $0 \leq A(j) \leq 1$ nous déduisons

$$\begin{aligned}
|P(z)| &\leq C(N) \sum_{j \in {\mathbb{Z}^\star}^k} \mu(j)^\nu |z_{j1}| \cdots |z_{jk}| \\
&\leq C(N) \sum_{j \in {\mathbb{Z}^\star}^k} \frac{\mu(j)^\nu}{\prod_{i=1}^k |j_i|^s} \prod_{i=1}^k |j_i|^s |z_{ji}| \\
&\leq C(N) \sum_{j \in {\mathbb{Z}^\star}^k} \frac{1}{\prod_{i=1}^k |j_i|^{s-\nu}} \prod_{i=1}^k |j_i|^s |z_{ji}| \\
&\leq C(N) \left( \sum_{j \in {\mathbb{Z}^\star}^k} \frac{1}{\prod_{i=1}^k |j_i|^{2s-2\nu}} \right)^{1/2} \left( \sum_{j \in {\mathbb{Z}^\star}^k} \prod_{i=1}^k |j_i|^{2s} |z_{ji}|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C(N) \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}^\star} \frac{1}{|j|^{2s-2\nu}} \right)^{k/2} ||z||_{s\widehat{p}}^k
\end{aligned}$$

La conclusion découle de la Proposition 3.3.5. □

Malheureusement, il semble que la condition $P \in T_{k,\nu}$ n'implique pas que $X_P$ est à valeurs dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$. En outre, les classes $(T_{k,\nu})_{k \geq 3}$ ne semblent pas stables par crochet de Poisson. C'est pour cela que nous introduisons une nouvelle classe de polynômes $T_{k,\nu}^+$.

**Définition 3.3.8.** *Un polynôme formel $P$ sur $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ est dans la classe $T_{k,\nu}^+$ s'il est homogène de degré $k$ et de la forme*

$$P(z) = \sum_{(j_1, \cdots, j_k) \in {\mathbb{Z}^\star}^k} a_j z_{j_1} \cdots z_{j_k}$$

*de sorte que pour $N > 0$ nous avons*

$$|a_j| \leq C(N) \frac{\mu(j)^\nu A(j)^N}{1 + S(j)}, \quad S(j) = |j_1^\star|^{2\widehat{p}} - |j_2^\star|^{2\widehat{p}}$$

**Lemme 3.3.9.** *Si $j$,$l$ sont deux multi-indice, nous notons $A(j,l) := A((j,l))$ le nombre obtenu avec le muli-indice $(j,l)$. Ici, si $l \in \mathbb{Z}^\star$, nous avons*

$$|l| A(j,l) \leq C |j_1^\star|$$

Preuve. Si $|l| \leq 2|j_1^\star|$, alors la conclusion est facile car $A(j,l) \leq 1$. Si $|l| > 2|j_1^\star| > |j_1| \geq |j_2^\star|$, nous avons

$$|l| A(j,l) = |l| \frac{(|j_1^\star||j_2^\star|)^{\widehat{p}}}{(|j_1^\star||j_2^\star|)^{\widehat{p}} + |l|^{2\widehat{p}} - |j_1^\star|^{2\widehat{p}}} \leq |l| \frac{|j_1^\star|^{2\widehat{p}}}{C|l|^{2\widehat{p}}} \leq C \frac{|j_1^\star|^{2\widehat{p}}}{|l|^{2\widehat{p}-1}} \leq C |j_1^\star|$$

□

L'inégalité de Cauchy-Schwarz amène au lemme facile :

**Lemme 3.3.10.** *Pour tout $s \geq 0$, $z \in \ell_{s+s_0}(\mathbb{Z}^\star)$ nous avons*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^\star} |j|^s |z_j| \leq C||z||_{(s+1)/\widehat{p}}$$

Dans cette nouvelle classe, il n'y a plus de perte de régularité.

**Proposition 3.3.11.** *Soient $k \geq 3$, $\nu > 0$, $s > (\nu+3)/\widehat{p}$ et $P \in T^+_{k,\nu}$. Nous avons*

*i) $P$ est $\mathcal{C}^\infty$*

*ii) L'application $X_P$ est régulière de $\ell_s(\mathbb{C})$ vers $\ell_s(\mathbb{C})$, précisément pour chaque $z \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ nous avons*

$$||X_P(z)||_s \leq C||z||_s^{k-1}$$

Preuve. Le point i) vient de l'inclusion triviale $T^+_{k,\nu} \subset T_{k,\nu}$ (voir la Proposition (3.3.7)). Prouvons maintenant ii). Nous traitons seulement le cas $k \geq 4$, mais la même méthode nous donne le cas $k = 3$. Nous choisissons $N = \widehat{p}s + 1$ dans la définition de $T^+_{k,\nu}$, un calcul amène à

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial P}{\partial z_l}\right| &\leq kC \sum_{j \in \mathbb{Z}^{\star k-1}} \frac{\mu(j,l)^\nu A(j,l)^N}{1+S(j,l)} |z_{j_1} \cdots z_{j_{k-1}}| \\
&\leq k \times (k-1)! C \sum_{|j_1| \geq \cdots \geq |j_{k-1}|} \frac{\mu(j,l)^\nu A(j,l)^N}{1+S(j,l)} |z_{j_1} \cdots z_{j_{k-1}}|
\end{aligned}$$

Faisons alors appel au Lemme 3.3.10

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial P}{\partial z_l}\right| &\leq C \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^\star} |z_j|\right)^{k-4} \left(\sum_{|j_1| \geq |j_2| \geq |j_3|} \frac{\mu(j,l)^\nu A(j,l)^N}{1+S(j,l)} |z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3}|\right) \\
&\leq C||z||_s^{k-4} \sum_{|j_1| \geq |j_2| \geq |j_3|} \frac{\mu(j,l)^\nu A(j,l)^N}{1+S(j,l)} |z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3}|
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
||X_P(z)||_s^2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^\star} |l|^{2\widehat{p}s} \left|\frac{\partial P}{\partial z_l}\right|^2 \\
&\leq C||z||_s^{2(k-4)} \sum_{l \in \mathbb{Z}^\star} |l|^{2\widehat{p}s} \left(\sum_{|j_1| \geq |j_2| \geq |j_3|} \frac{\mu(j,l)^\nu A(j,l)^N}{1+S(j,l)} |z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3}|\right)^2
\end{aligned}$$

Définissons alors les ensembles et applications suivants pour chaque $l \in \mathbb{Z}^\star$

$$\begin{aligned}
\Omega_1(l) &:= \{(j_1, j_2, j_3) \in \mathbb{Z}^{\star 3}, |j_1| \geq |j_2| \geq |j_3|, |j_2| \geq |l|\} \\
\Omega_2(l) &:= \{(j_1, j_2, j_3) \in \mathbb{Z}^{\star 3}, |j_1| \geq |j_2| \geq |j_3|, |l| > |j_2|\}
\end{aligned}$$

$$T_i(l) := |l|^{\widehat{p}s} \sum_{\Omega_i(l)} \frac{\mu(j,l)^\nu A(j,l)^N}{1+S(j,l)} |z_{j_1}||z_{j_2}||z_{j_3}|$$

Par conséquent, nous voulons prouver

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^\star} T_i(l)^2 \leq C||z||_s^6, \qquad i\in\{0,1\} \tag{3.20}$$

D'abord, nous nous occupons du cas $i=1$ et invoquons le Lemme 3.3.9 et l'inégalité $A(j,l)\leq 1\leq |j_2|/|l|$ :

$$\begin{array}{rcl} T_1(l) & \leq & C\displaystyle\sum_{\Omega_1(l)} |l|^{\widehat{p}s}|j_2|^\nu A(j,l)^{s\widehat{p}+1}|z_{j_1}z_{j_2}z_{j_3}| \\ & \leq & C\displaystyle\sum_{\Omega_1(l)} |l||j_1|^{s\widehat{p}-1}|j_2|^\nu A(j,l)^2|z_{j_1}z_{j_2}z_{j_3}| \\ & \leq & C|l|^{-1}\displaystyle\sum_{\Omega_1(l)} |j_1|^{s\widehat{p}-1}|j_2|^{\nu+2}|z_{j_1}z_{j_2}z_{j_3}| \\ & \leq & C|l|^{-1}\displaystyle\sum_{j_1\mathbb{Z}^\star}|j_1|^{\widehat{p}s-1}|z_{j_1}|\sum_{j_2\in\mathbb{Z}^\star}|j_2|^{\nu+2}\sum_{j_3\in\mathbb{Z}^\star}|z_{j_3}| \end{array}$$

Maintenant, le lemme 3.3.10 amène à (3.20) pour $i=1$ :

$$T_1(l)\leq C|l|^{-1}||z||_s^3$$

Occupons-nous à présent de l'estimation de $T_2(l)$. Remarquons que $A(j,l)^N\leq A(j,l)^{\widehat{p}s}\leq C|j_1|^{\widehat{p}s}|l|^{-\widehat{p}s}$ et que $j_3$ n'apparaît pas dans $A(j,l)$, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} T_2(l) & \leq & C|l|^{\widehat{p}s}||z||_s\displaystyle\sum_{j_1,j_2}\frac{|j_2|^\nu A(j,l)^N}{1+S(j,l)}|z_{j_1}||z_{j_2}| \\ & \leq & C||z||_s\displaystyle\sum_{j_1,j_2}\frac{|j_1|^{\widehat{p}s}|z_{j_1}||z_{j_2}||j_2|^\nu}{1+||j_1|^{2\widehat{p}}-|l|^{2\widehat{p}}|} \\ & \leq & C||z||_s\displaystyle\sum_{j_2}|z_{j_2}||j_2|^\nu\sum_{j_1}\frac{|j_1|^s|z_{j_1}|}{1+||j_1|-|l||^{2\widehat{p}}} \\ & \leq & C||z||_s^2\displaystyle\sum_{j_1}\frac{|j_1|^{\widehat{p}s}|z_{j_1}|}{1+||j_1|-|l||^{2\widehat{p}}} \\ \displaystyle\sum_{l\in\mathbb{Z}^\star}T_2(l)^2 & \leq & C||z||_s^4\left(\displaystyle\sum_{j_1}\frac{|j_1|^{\widehat{p}s}|z_{j_1}|}{1+||j_1|-|l||^{2\widehat{p}}}\right)^2 \end{array}$$

Si nous décomposons $(l,j_1)\in\mathbb{Z}^{\star 2}$ sur les différents sous-ensembles $\pm\mathbb{N}^\star\times\pm\mathbb{N}^\star$, nous voyons apparaître quatre produits de convolution (ou des versions discrètes du théorème de Fubini) de $(|j_1|^{s\widehat{p}}z_{j_1})\in\ell^2$ avec $((1+|j_1|)^{-2\widehat{p}}))\in\ell^1$, par suite (3.20) est valide pour $i=2$. □

Enfin, nous définissons la classe des polynômes en forme normale.

**Définition 3.3.12.** *Pour tout $j\in\mathbb{N}^\star$, nous définissons la $j^{ieme}$ action $I_j:\ell_s\mapsto z_jz_{-j}$.*

*Pour chaque entier pair $k=2m$, un polynôme homogène $Z$ de degré $k$ de $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ est dit en forme normale si nous avons*

$$Z(z)=\sum_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}^m} b_jI_{j_1}\cdots I_{j_m}$$

Remarquons que pour chaque application $f:\ell_s(\mathbb{Z}^\star)\to\mathbb{C}$ nous avons $\{I_j,f\}=i\left(z_j\partial_{z_j}-z_{-j}\partial_{z_{-j}}\right)f$, en particulier si $f$ est un polynôme en forme normale alors $\{I_j,f\}=0$. En suivant [GIP09] (Proposition 2.13,iv), nous avons la proposition cruciale :

**Proposition 3.3.13.** *Soient $k\geq 3$, $\nu>0$, il existe $\nu=\nu(s)$ tel que si $s>\nu$ et si $Z\in T_{k,\nu}$ est en forme normale, alors l'application $X_Z$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\ell_s(\mathbb{C})$ vers $\ell_s(\mathbb{C})$.*

### 3.3.4 Crochet de Poisson

En fait, la même preuve que dans [GIP09] (Lemme 2.19 and 2.20) nous fournit le lemme suivant car le terme homologue de $A(j)$ est exactement

$$\frac{\sqrt{|j_2^* j_3^*|}}{\sqrt{|j_2^* j_3^*|} + |j_1^\star| - |j_2^\star|}$$

**Lemme 3.3.14.** *Pour chaque $i \in \mathbb{Z}^{k_1}, j \in \mathbb{Z}^{k_2}, l \in \mathbb{Z}$, nous avons*

$$A(j,l)^2 A(i,l)^2 \leq C A(i,j)$$

$$\max\left(\mu(j,l)A(i,l)^{1/\widehat{p}}, \mu(i,l)A(j,l)^{1/\widehat{p}}\right) \leq C\mu(i,j)^{1/\widehat{p}}$$

**Proposition 3.3.15.** *Soient $k_1, k_2 \geq 2$, $\nu_1, \nu_2 \geq 0$. Il existe $\nu := \nu(\nu_1, \nu_2) > 0$ tel que l'application crochet de Poisson $(P,Q) \mapsto \{P,Q\}$ est bien définie de $T^+_{k_1+1,\nu_1} \times T_{k_2+1,\nu_2}$ vers $T_{k_1+k_2,\nu}$.*

Preuve. Soit $M > 0$, $N := 2M + \frac{\nu_2}{\widehat{p}}$ et $N' := 2M + 1 + \frac{\nu_1}{\widehat{p}}$. Nous supposons que

$$P = \sum_{j \in \mathbb{Z}^{\star k_1+1}} a_j z^{j_1} \cdots z^{j_{k_1+1}}, \qquad |a_j| \leq C(N)\frac{\mu(j)^{\nu_1} A(j)^N}{1+S(j)}$$

$$Q = \sum_{j \in \mathbb{Z}^{\star k_2+1}} b_j z^{j_1} \cdots z^{j_{k_2+1}}, \qquad |b_j| \leq C(N')\mu(j)^{\nu_2} A(j)^{N'}$$

On vérifie que

$$\{P,Q\} = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^{\star k_1+k_2}} c_{i,j} z_{i_1} \cdots z_{i_{k_1}} z_{j_1} \cdots z_{j_{k_2}}$$

$$|c_{i,j}| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^\star} \frac{\mu(j,l)^{\nu_1}}{1+S(j,l)} A(j,l)^N \mu(i,l)^{\nu_2} A(i,l)^{N'}$$

Écrivons maintenant

$$\begin{aligned} |c_{i,j}| &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^\star} \frac{A(i,l)}{1+S(j,l)} \left(\mu(j,l)A(i,l)^{1/\widehat{p}}\right)^{\nu_1} \left(\mu(i,l)A(j,l)^{1/\widehat{p}}\right)^{\nu_2} (A(j,l)A(i,l))^{2M} \\ &\leq C\left(\sum_{l \in \mathbb{Z}^\star} \frac{A(i,l)}{1+S(j,l)}\right) \mu(i,j)^{(\nu_1+\nu_2)/\widehat{p}} A(i,j)^M \end{aligned}$$

La conclusion va découler des faits suivants

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^\star} \frac{A(i,l)}{1+S(j,l)} \leq C\mu(i,j)^{2\widehat{p}}$$

D'abord, nous avons le cas trivial

$$\sum_{|l| > |j_2^\star|} \frac{A(i,l)}{1+S(j,l)} \leq \sum_{|l| \geq |j_2^\star|} \frac{1}{1+||j_1|-|l||^{2\widehat{p}}} \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+|l|^{2\widehat{p}}} < +\infty$$

Le second cas va venir avec l'inégalité suivante et deux sous-cas :

$$\sum_{|l| \leq |j_2^\star|} \frac{A(i,l)}{1+S(j,l)} \leq \sum_{|l| \leq |j_2^\star|} A(i,l)$$

a) $|j_2^\star| \leq \mu(i,j)$. Comme $A(i,l) \leq 1$, nous avons $\sum_{|l|\leq|j_2|} A(i,l) \leq \mu(i,j) \leq \mu(i,j)^{2\widehat{p}}$

b) $|j_2^\star| > \mu(i,j)$. Évidemment, nous avons $|j_1^\star| \geq |j_2^\star| > \mu(i,j) \geq |i_1^\star|$. Ainsi

$$\sum_{|l|\leq|j_2^\star|} A(i,l) = \sum_{|l|\leq|i_1^\star|} A(i,l) + \sum_{|i_1^\star|<|l|\leq|j_2^\star|} A(i,l) \leq \mu(i,j) + \sum_{|i_1^\star|<|l|\leq|j_2^\star|} A(i,l)$$

Dans la dernière somme, nous avons

$$A(i,l) = \frac{(|i_1^\star i_2^\star|)^{\widehat{p}}}{(|i_1^\star i_2^\star|)^{\widehat{p}} + |l|^{2\widehat{p}} - |i_1^\star|^{2\widehat{p}}} \leq \frac{\mu(i,j)^{2\widehat{p}}}{1 + (|l| - |i_1^\star|)^{2\widehat{p}}}$$

$$\sum_{|i_1^\star|<|l|\leq|j_2^\star|} A(i,l) \leq \mu(i,j)^{2\widehat{p}} \sum_{|i_1^\star|<|l|} \frac{1}{1 + (|l| - |i_1^\star|)^{2\widehat{p}}} \leq C\mu(i,j)^{2\widehat{p}}$$

□

### 3.3.5 Transformée de Lie de $T_{k,\nu}^+$

**Définition 3.3.16.** *Une application $f : \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \to \mathbb{C}$ est dans la classe $T_\nu$ s'il existe $s_0 > 0$ tel que*

- *pour chaque $s \geq s_0$, $f$ est analytique sur un voisinage $U_s \subset \ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ of $0$*
- *$0$ est un zéro de $f$ de multiplicité $\geq 3$*
- *Pour chaque $k \geq 3$, le polynôme de Taylor d'ordre $k$ appartient à $T_{k,\nu}$*

Soit $\chi \in T_{l,\delta}^+$, nous savons que $\chi$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\ell_s, \mathbb{C})$ pour $s$ suffisamment grand (voir la Proposition 3.3.11). En particulier, nous pouvons introduire le flot symplectique de $\chi$ :

$$\forall z \in \ell_s \quad \frac{d}{dt}\Phi^t(z) = X_\chi(\Phi^t(z))$$

Comme $l \geq 3$, un argument de type bootstrap va montrer que $\Phi^t(z)$ est bien défini si $t \in [0,1]$ et $||z||_s < \epsilon$ (pour $\epsilon$ petit). Et même, $\Phi^t(z)$ est analytique en $z$.

Nous dirons que la transformation de Lie $\phi := \Phi^1$ de $\chi$ est bien définie. L'application $\phi$ est pertinente car symplectique : le crochet de Poisson est conservé. En d'autres termes, pour chaque application $A$ et $B$ de $\mathcal{C}^\infty$, nous avons

$$\{A \circ \phi, B \circ \phi\} = \{A, B\} \circ \phi$$

**Définition 3.3.17.** *Si $F : \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \to \mathbb{C}$ satisfait $F(z, \overline{z}) \in \mathbb{R}$ dans un voisinage de l'origine $0$, nous dirons que $F$ est réelle.*

**Proposition 3.3.18.** *Soit $\chi$ un polynôme homogène réel $\in T_{l,\delta}^+$ avec $\delta \geq 0$,$l \geq 3$, et considérons $s$ suffisamment grand.*

*i) La transformation de Lie de $\chi$ est bien définie et analytique sur une boule $B_\epsilon = \{z \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star), ||z|| < \epsilon\}$ et est à valeurs dans $B_{2\epsilon}$. En outre, nous avons*

$$\forall z \in B_\epsilon \quad ||\phi(z) - z||_s \leq C_s ||z||_s^{l-1} \leq C_s ||z||_s^2$$

*ii) Pour chaque $F \in \mathcal{H}^s$ avec $s > s_1$, $F \circ \phi \in \mathcal{H}^s$. Si $\chi$ est réel alors $F \circ \phi$ est aussi réel.*

*iii) Soit $P \in T_{n,\nu} \cap \mathcal{H}^s$ avec $\nu \geq 0$, $n \geq 3$ et considérons $r \geq n$, nous avons*

$P \circ \phi = Q_r + R_r$

- *$Q_r$ est un polynôme (non nécessairement homogène) de degré $\leq r$ qui appartient à $\mathcal{H}^s$ et $T_{\nu'}$ pour un certain $\nu' > 0$.*
- *$R_r$ est une application appartenant à $\mathcal{H}^s \cap T_{\nu''}$, pour un certain $\nu'' > 0$, et admet $0$ comme zéro d'ordre $\geq r+1$*

Preuve. i) Pour $\epsilon > 0$ petit, la Proposition 3.3.11 nous donne $\sup\limits_{||z||_s < \epsilon} ||X_\chi(z)||_s \leq C\epsilon^2$. Rappelons que $\Phi^0(z) = z$ et $||z||_s < \epsilon$. Considérons le plus grand temps $t_+ > 0$ tel que pour tout $t \in [0, t_+]$ on a $||\Phi^t(z)||_s \leq 2\epsilon$. Il vient

$$\left| \frac{d}{dt} \Phi^t(z) \right| \leq C\epsilon^2$$

donc $||\Phi^{t_+}(z) - z||s \leq C\epsilon^2 t_+$. Si $t_+ = +\infty$, alors $t_+ \geq 1$. Sinon $||\Phi^{t_+}(z)||_s$ vaut forcément $2\epsilon$ et l'on a

$$\epsilon < ||\Phi^{t_+}(z)||_s - ||z||_s \leq ||\Phi^{t_+}(z) - z||s \leq C\epsilon^2 t_+$$

Ainsi $t_+ \geq 1$ lorsque $\epsilon$ est petit.

ii) L'application $F$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $\ell_s$ (voir la Définition 3.3.4), et de même pour $F \circ \phi$. Ensuite $X_F = J\nabla F \in \mathcal{C}^\infty(\ell_s, \ell_s)$ et $d\phi$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\ell_s$ vers l'espace des applications linéaires bornées. Nous vérifions que pour $z$ voisin de 0

$$X_{F\circ\phi}(z) = J\nabla_{F\circ\phi}(z) = Jd\phi_z^\star(\nabla F(\phi(z))) = -d\phi_z^\star(J\nabla F(\phi(z))) = -d\phi_z^\star(X_F(\phi(z)))$$

Par suite $X_{F\circ\phi}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $0 \in \ell_s$ et est à valeurs dans $\ell_s$.

Si $\chi$ est réelle, $\Phi^t$ conserve la partie réelle de $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$, i.e. $\{(z, \overline{z}), z \in \ell_s(\mathbb{N}^\star)$.

Nous devons récupérer les polynômes de Taylor de $h(t) = F \circ \Phi^t$ en $t = 0$. Nous posons alors $F^{[0]} = F$ et $F^{[k+1]} = \{F^{[k]}, \chi\}$ par récurrence. Nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}\Phi^t(z) = X_\chi(\Phi^t(z)) \qquad \Phi^0(z) = z \qquad \Phi^t(0) = 0$$

$$h'(t) = \langle \nabla_{\Phi^t(z)} F, X_\chi(\Phi^t(z)) \rangle = \{F, \chi\}_{\Phi^t(z)}$$

Ainsi, une récurrence nous donne $h^{(k)}(t) = F^{[k]}(\Phi^t(z))$. Les formules de Taylor nous amène à

$$h(t) = \sum_{k=0}^{n} h^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n h^{n+1}(tu)du$$

$$F \circ \phi(z) = \sum_{k=0}^{n} F^{[k]}(z)\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-u)^n F^{[n+1]} \circ \Phi^1(u)du$$

Nous définissons $F_k$ le $k^{ieme}$ polynôme de Taylor de $F$ en 0 et rappelons que $\deg\{P, \chi\} = (\deg P + \deg \chi) - 2$. Par suite,

$$F \circ \phi(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j+j'(l-2)=k} F_j^{[j']}(z) + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-u)^n F^{[n+1]} \circ \Phi^1(u)ds$$

Le dernier morceau est en $O(||z||^{n+1})$, donc ne contribue pas en degré. Nous finissons comme dans [GIP09] (Proposition 2.21)

iii) Soit $K$ la partie entière de $\frac{r-n}{l-2}$, nous décomposons $P \circ \phi = Q_r + R_r$

$$Q_r = \sum_{k=0}^{K} P^{[k]}(z) \frac{1}{k!}, \qquad R_r = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-u)^n P^{[n+1]} \circ \Phi^1(u) ds$$

Nous avons $P^{[0]} = P \in T_{n,\nu}$. Par récurrence, la Proposition 3.3.15 prouve que $P^{[k]} \in T_{n+k(l-2),\nu'}$. Comme $n + K(l-2) \leq r \leq r+1 \leq n + (K+1)(l-2)$, nous comprenons que $Q_r$ a un degré $\leq r$ et appartient à $T_{\nu'}$. En outre, $P^{[k+1]} \in T_{n+(k+1)(l-2),\nu''}$ pour un certain $\nu'' > 0$, $R_r$ admet un zéro d'ordre $\geq r+1$ et appartient à $T_{\nu''}$. En conséquence, $R_r = P \circ \phi - Q_r \in \mathcal{H}^s$. $\square$

### 3.3.6 Le théorème des formes normales

Maintenant, nous introduisons la définition de non-résonance.

**Définition 3.3.19.** *Un vecteur-fréquence $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est non-résonant si pour tout $r \in \mathbb{N}^\star$, il existe $\gamma, \delta > 0$ tels que pour tous $j \in \mathbb{N}^{\star r}$ et $i \in [[1, r]]$ nous avons*

$$|\omega_{j_1} + \cdots + \omega_{j_i} - \omega_{j_{i+1}} - \cdots - \omega_{j_r}| \geq \frac{\gamma(1 + S(j))}{\mu(j)^\delta} \tag{3.21}$$

*sauf si bien entendu $\{j_1, \ldots, j_i\} = \{j_{i+1}, \ldots, j_r\}$. Ici, $S(j)$ est la quantité apparaissant à la définition (3.3.8).*

Maintenant, nous affirmons que l'on a

**Théorème 3.3.20.** *Pour tout $k \geq 1$, il existe un ensemble $\mathcal{F}_k \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{\mathbb{N}^\star}$ de probabilité 1 tel que si $(m_j) \in \mathcal{F}_k$, alors le vecteur-fréquence $\left(\lambda_j + \frac{m_j}{j^k}\right)_{j\geq 1}$ est non-résonant.*

La preuve du théorème précédent est la même que celle présente dans [Gré07] (Théorème 5.7), nous ne la réitérons pas (voir 4.1), en réalité la preuve ne dépend que de conditions de croissance sur la suite $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ :

i) $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ est positive et croissante

ii) il existe $C > 1$ et $\theta \geq 1$ tels que $\frac{1}{C} j^\theta \leq \lambda_j \leq C j^\theta$

iii) l'ensemble des différences deux à deux $\Lambda := \{\lambda_j - \lambda_{j'}, (j, j') \in \mathbb{N}^2\}$ satisfait pour tout $\sigma > 0$

$$\forall t \geq 1 \qquad \mathrm{Card}(\Lambda \cap [0, t]) \leq C t^\sigma$$

Le point iii) signifie que les différences $\lambda_j - \lambda_{j'}$ ne s'agglutinent pas vers zéro et est conséquence de la Proposition 3.2.6. Nous affirmons que nous avons aussi le théorème des formes normales

**Théorème 3.3.21.** *Soit $P \in \mathcal{H}^s \cap T_\nu$ pour $s$ grand et $H_0 = \sum_{j\geq 1} \omega_j I_j$ un hamiltonien avec un vecteur-fréquence non-résonant $\omega$. L'hamiltonien perturbé s'écrit $H := H_0 + P$. Soit $r \geq 3$, il existe $s_0 \geq s$, $U_s$ et $W_s$ deux voisinages de $0 \in \ell^2_s(\mathbb{Z}^\star)$ et $\tau_s : U_s \to W_s$ un difféomorphisme réel symplectique tels que $H \circ \tau = H_0 + Z + R$ avec*

*i) $Z$ est un polynôme de degré $\leq r$, appartient à $\mathcal{H}^s$ et ne dépend que des actions $I_j$.*

*ii) $R \in \mathcal{H}^s$ et $||X_R(z)||_s \leq C(s, r)||z||_s^r$ pour tout $z \in U_s$*

*iii) $||\tau(z) - z||_s \leq C_s||z||_s^2$ pour tout $z \in U_s$*

La preuve du Théorème 2.23 est identique à celle présente dans [GIP09], et le caractère réel de $\tau_s$ signifie ceci : $\tau_s(\ell_s(\mathbb{N}^\star)) \subset \ell_s(\mathbb{N}^\star))$. Rappelons formellement l'idée de la preuve pour $r = 3$. Écrivons $P = P_3 + P_4$ où $P_3$ est le polynôme de Taylor de degré 3 de $P$. Premièrement, nous avons besoin de résoudre l'équation homologique , c'est-à-dire de trouver un certain polynôme homogène

$$\chi := \sum_{j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{Z}^\star} q(j_1, j_2, j_3) z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3}$$

de degré 3 tel que $X_\chi$ appartient à $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ et $Z := \{H_0, \chi\} + P_3$ est en forme normale (donc ne dépend que des actions). Un calcul facile amène à

$$\{H_0, \chi\} = i \sum_{j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{Z}^\star} (\mathrm{sg}(j_1)\omega_{j_1} + \mathrm{sg}(j_2)\omega_{j_2} + \mathrm{sg}(j_3)\omega_{j_3}) q(j_1, j_2, j_3) z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3}$$

Où $\mathrm{sg}(k)$ vaut $+1$ si $k > 0$ et $-1$ if $k < 0$. Comme $(\omega_j)$ est non-résonant, nous pouvons choisir

$$q(j_1, j_2, j_3) = \frac{ip(j_1, j_2, j_3)}{\mathrm{sg}(j_1)\omega_{j_1} + \mathrm{sg}(j_2)\omega_{j_2} + \mathrm{sg}(j_3)}$$

Où bien sûr $P_3 = \sum p(j_1, j_2, j_3) z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} \in T_{3,\nu}$. La condition de non-résonance (3.21) implique que $\chi$ appartient $T^+_{3,\nu+\delta}$. Comme 3 est impair, nous pouvons éliminer tous les termes de $P_3$, ainsi $Z := \{H_0, \chi\} + P_3 = 0$, mais d'autres termes auraient pu apparaître si nous avions traité le cas $r = 4$, par exemple $z_{j_1} z_{j_2} z_{-j_1} z_{-j_2}$. Comme $\chi \in T^+_{3,\nu+\delta}$, nous pouvons définir la transformée de Lie $\phi$ de $\chi$ et nous avons

$$\begin{aligned} (H_0 + P) \circ \phi(z) &= H_0 + Z + (H_0 \circ \phi - H_0 - \{H_0, \chi\}) + \\ &\quad (P_3 \circ \phi - P_3) + P_4 \circ \phi \end{aligned}$$

Le point i) de la Proposition 3.3.18 montre que $\phi$ est proche de l'identité, et par conséquent les trois termes $(H_0 \circ \phi - H_0 - \{H_0, \chi\})$, $(P_3 \circ \phi - P_3)$ et $P_4 \circ \phi$ sont dominés par $||z||_s^4$ au voisinage de $z = 0$. Dans le cas général $r \geq 4$, $\tau$ est construite par composition de transformations canoniques $\phi$ pour divers polynômes réels $\chi \in T^+_{k,\nu}$ obtenus par résolutions d'équations homologiques.

## 3.4 Régularité de la perturbation et conclusion

Le Théorème 3.1.1 est une conséquence du Théorème 3.3.21, du Lemme 3.4.3 et du fait que la perturbation non linéaire suivante appartient à $\mathcal{H}^s \cap T_\nu$ pour $s$ et $\nu$ grands.

$$\forall z \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \qquad P(z) = \int_{\mathbb{R}} g\left(\sum_{j>0} z_j \phi_j(x), \sum_{j>0} z_{-j} \phi_j(x)\right) dx$$

**Proposition 3.4.1.** *Pour s grand, l'application* $P : \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \to \mathbb{C}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *et son gradient est à valeurs dans* $\ell_s^2(\mathbb{C})$.

Preuve. ♦ L'application $P$ peut s'écrire

$$\begin{array}{ccccccc} \ell_{2s/3}(\mathbb{Z}^\star) & \longrightarrow & \widehat{H}^s \times \widehat{H}^s & \longrightarrow & \widehat{H}^s & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \left(\sum_{j>0} z_j \phi_j, \sum_{j>0} z_{-j} \phi_j\right) & \longmapsto & g\left(\sum_{j>0} z_j \phi_j, \sum_{j>0} z_{-j} \phi_j\right) & \longmapsto & P(z) \end{array}$$

La première flèche est juste $\Gamma_s$, donc est un difféomorphisme. La troisième flèche est régulière car $\widehat{H}^s \subset L^1(\mathbb{R})$ pour $s$ grand. Prouvons que la seconde flèche est régulière. La condition d'analyticité de $g$ amène à

$$g(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m+n \geq 3} \alpha_{m,n} \xi_1^m \xi_2^n$$

En se rappelant de la preuve de la Proposition 3.2.14, nous comprenons que la seconde flèche est limite uniforme de polynômes sur chaque sous-ensemble borné de $\widehat{H}^s \times \widehat{H}^s$ :

$$P_N : (f_1, f_2) \mapsto \sum_{m+n \leq N} \alpha_{m,n} f_1^m f_2^n$$

Conséquemment, $(f_1, f_2) \mapsto g(f_1, f_2)$ est holomorphe, donc $\mathcal{C}^\infty$, sur $\widehat{H}^s \times \widehat{H}^s$ (voir [Nac69] § 6 Proposition 4 et § 7 Proposition 3, ou [PT87] appendice A Théorèmes 1 et 2).

♦ Occupons-nous du gradient. Comme les première et troisième flèches sont linéaires, le gradient de $P$ s'obtient naturellement par linéarisation de la seconde flèche autour de $(f_1, f_2) \in \widehat{H}^s \times \widehat{H}^s$. D'abord, la formule de Taylor nous assure qu'il existe trois fonctions holomorphes $G_1, G_{12}$ et $G_2$ sur $\mathbb{C}^4$ telles que pour chaque $(\xi_1, \chi_1, \xi_2, \chi_2) \in \mathbb{C}^4$ nous avons

$$g(\xi_1 + \chi_1, \xi_2 + \chi_2) - g(\xi_1, \xi_2) = \chi_1 \partial_1 g(\xi_1, \xi_2) + \chi_2 \partial_2 g(\xi_1, \xi_2) +$$

$$\chi_1^2 G_1(\xi_1, \chi_1, \xi_2, \chi_2) + \chi_1 \chi_2 G_{12}(\xi_1, \chi_1, \xi_2, \chi_2) + \chi_2^2 G_2(\xi_1, \chi_1, \xi_2, \chi_2)$$

Par suite, pour tout $\widetilde{h_1}, \widetilde{h_2} \in \widehat{H}^s \times \widehat{H}^s$, la Proposition 3.2.14 nous amène à

$$g(f_1 + \widetilde{h_1}, f_2 + \widetilde{h_2}) - g(f_1, f_2) = \widetilde{h_1} \partial_1 g(f_1, f_2) + \widetilde{h_2} \partial_2 g(f_1, f_2) + O(||\widetilde{h_1}, \widetilde{h_1}||^2_{\widehat{H}^s \times \widehat{H}^s})$$

Revenons à $P$, pour tous $z$ et $h \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ nous avons

$$D_z P(h) = \sum_{j>0} h_j \int_{\mathbb{R}} \phi_j(x) \partial_1 g \left( \sum_{j>0} z_j \phi_j(x), \sum_{j>0} z_{-j} \phi_j(x) \right) dx + \tag{3.22}$$

$$+ \sum_{j<0} h_j \int_{\mathbb{R}} \phi_j(x) \partial_2 g \left( \sum_{j>0} z_j \phi_j(x), \sum_{j>0} z_{-j} \phi_j(x) \right) dx$$

et donc

$$||\nabla_z P||^2_{\widehat{H}^s} = \sum_{j>0} j^{2s\widehat{p}} \left| \int_{\mathbb{R}} \phi_j(x) \partial_1 g \left( \sum_{j>0} z_j \phi_j(x), \sum_{j>0} z_{-j} \phi_j(x) \right) dx \right|^2 +$$

$$\sum_{j<0} |j|^{2s\widehat{p}} \left| \int_{\mathbb{R}} \phi_{-j}(x) \partial_2 g \left( \sum_{j>0} z_j \phi_j(x), \sum_{j>0} z_{-j} \phi_j(x) \right) dx \right|^2$$

À l'aide de $\Gamma_s$, $\overline{\phi_j} = \phi_j$, et de la Proposition 3.2.14, nous concluons que

$$||\nabla_z P||^2_{\widehat{H}^s} \simeq \left\| \partial_1 g \left( \sum_{j>0} z_j \phi_j(x), \sum_{j>0} z_{-j} \phi_j(x) \right) \right\|^2_{\widehat{H}^s} + \left\| \partial_2 g \left( \sum_{j>0} z_j \phi_j(x), \sum_{j>0} z_{-j} \phi_j(x) \right) \right\|^2_{\widehat{H}^s} < +\infty$$

□

Maintenant, nous affirmons que l'on a

**Proposition 3.4.2.** *Pour tous $s$ et $\nu$ grands, l'application $P$ appartient à $\mathcal{H}^s \cap T_\nu$.*

Preuve.

Vérifions que $P \in \mathcal{H}^s$. Nous notons $P = \sum_{k\geq 3} P_k$ la décomposition en série entière (de Taylor) de $P$. Comme $P$ est holomorphe, chaque $P_k$ est $\mathcal{C}^\infty$. Nous avons aussi $X_P = \sum X_{P_k}$ qui s'avère holomorphe de $\ell_s(\mathbb{C})$ dans lui-même, et donc aussi $X_{P_k}$.

Maitenant, vérifions la Définition 3.3.16. Comme $g$ est holomorphe, pour tout $k \geq 3$ il existe des fonctions holomorphes $G_1, \cdots, G_k$ sur $\mathbb{C}^2$ telles que

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C} \quad g(\xi_1, \xi_2) = \sum_{r=3}^{k} \frac{1}{r!} \sum_{\ell=0}^{r} (\xi_1^\ell \xi_2^{r-\ell}) \partial_1^\ell \partial_2^{r-\ell} g(0,0) + \sum_{\ell=0}^{k+1} \xi_1^\ell \xi_2^{k+1-\ell} G_\ell(\xi_1, \xi_2)$$

Examinons la Proposition 3.2.14 et la preuve de 3.4.1, le polynôme de Taylor $P_r$ de $P$ en $(0,0)$ apparaît

$$P_r(z) = \frac{1}{r!} \sum_{\ell=0}^{r} \partial_1^\ell \partial_2^{r-\ell} g(0,0) \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{j>0} z_j \phi_j(x) \right)^\ell \left( \sum_{j<0} z_{-j} \phi_j(x) \right)^{r-\ell} dx$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\ell=0}^{r} \partial_1^\ell \partial_2^{r-\ell} g(0,0) \sum_{j \in \mathbb{N}^{\star r}} z_{j_1} \cdots z_{j_\ell} z_{-j_{\ell+1}} \cdots z_{-j_r} \int_{\mathbb{R}} \phi_{j_1}(x) \cdots \phi_{j_r}(x) dx$$

Enfin, nous obtenons que $P_r$ appartient à $T_{r,\nu}$ pour un certain $\nu$ grâce à la Proposition 3.2.15. □

Pour finir, comme annoncé à la sous-partie 3.3.1, la propriété $g(z, \overline{z}) \in \mathbb{R}$ assure que l'on a le lemme

**Lemme 3.4.3.** *Une solution $z(t)$ de (3.16) est réelle, i.e. $\overline{z_j(t)} = z_{-j}(t)$, si et seulement si la condition initiale $z(0)$ est réelle.*

Preuve. Soit $\mathcal{D}$ la droite complexe $\{(\xi, \overline{\xi}), \xi \in \mathbb{C}\}$. La fonction holomorphe $g$ satisfait $g(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}$. Une différentiation donne

$$\forall z, \xi \in \mathbb{C} \quad \xi \partial_1 g(z,z) + \overline{\xi} \partial_2 g(z,z) \in \mathbb{R}$$

Conséquemment , $\partial_2 g(z,z) = \overline{\partial_1 g(z,z)}$. Grâce à (3.22), nous avons $\frac{\partial P}{\partial z_{-j}}(z) = \overline{\frac{\partial P}{\partial z_j}(z)}$. En d'autres termes, les deux équations de (3.16) sont auto-conjuguées. □

Prouvons à présent le principal théorème. Nous appliquons le théorème 3.3.21 pour $r+2$, soit $(z(t))_{t \in (-T_m, T_M)}$ une solution maximale de (3.17) dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ pour $s$ grand. Comme $\tau$ et $\tau^{-1}$ sont définis sur un voisinage de $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ pour $||\xi(0)||_s < \epsilon$ nous pouvons définir $\xi(t) := \tau^{-1}(z(t))$. Comme $\tau$ est réelle symplectique, nous comprenons que l'on a

$$\xi_{-j}(t) = \overline{\xi_j(t)}, \qquad \xi'(t) = i X_{H_0 + Z + R}(\xi(t))$$

Définissons $N(z) = ||z||_s^2 = \sum_{j\geq 1} \lambda_j^s z_j z_{-j}$ pour tout $z \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star)$. Soit $T_M^+$ maximal $\in (0, T_M)$ tel que $||\xi(t)||_s \leq \frac{3}{2}\epsilon$ pour $t \in [0, T_M^+]$. Nous avons pour tout $t \in [0, T_M^+]$

$$\begin{aligned}
\left|\tfrac{d}{dt}N(\xi(t))\right| &= |\{N, H_0 + Z + R\}(\xi(t))| = |\{N, R\}|(\xi(t))| \\
&= |\sum_{j\geq 1} \lambda_j^s(\xi_j(t)\partial_{-j}R - \xi_{-j}(t)\partial_{-j}R)| \\
&\leq 2\left(\sum_{j\geq 1} \lambda_j^s |\xi_j(t)|^2\right)^{1/2} ||X_R(\xi(t))||_s \\
&\leq C||\xi(t)||_s^{r+3} \leq C\epsilon^{r+3} \\
|||\xi(t)||_s^2 - ||\xi(0)||_s^2| &\leq Ct\epsilon^{r+3}
\end{aligned}$$

Si $t = T_M^+$ alors nous obtenons $T_M^+ \geq C\epsilon^{-1-r}$. Examinons la situation lorsque $t \in [0, C\epsilon^{-r}]$. La même argumentation amène à

$$\sum_{j\geq 1} \lambda_j^s |\frac{d}{dt}|\xi_j|^2| = \sum_{j\geq 1} \lambda_j^s |\{I_j, R\}(\xi(t))| \leq C\epsilon^{r+3}$$

donc

$$\sum_{j\geq 1} \lambda_j^s ||\xi_j(t)|^2 - |\xi_j(0)|^2| \leq Ct\epsilon^{r+3} \leq C\epsilon^3$$

En se rappelant que $||\xi(t)||_s \leq 2\epsilon$. Le point iii) du Théorème 3.3.21 nous amène à

$$\forall t \in [0, C\epsilon^{-r}] \qquad ||z(t) - \xi(t)||_s \leq C_s||z(t)||_s^2 \leq C_s\epsilon^2 \tag{3.23}$$

Conséquemment, lorsque $\epsilon$ est petit nous avons $||z(t)||_s \leq \frac{3}{2}\epsilon$. Finalement, nous pouvons dominer $\sum_{j\geq 1} \lambda_j^s ||z_j(t)|^2 - |z_j(0)|^2|$ par

$$\sum_{j\geq 1} \lambda_j^s ||z_j(t)|^2 - |\xi_j(t)|^2| + \sum_{j\geq 1} \lambda_j^s ||\xi_j(t)|^2 - |\xi_j(0)|^2| + \sum_{j\geq 1} \lambda_j^s ||\xi_j(0)|^2 - |z_j(0)|^2|$$

Les première et troisième sommes sont dominées par $\epsilon^4$ grâce à (3.23). C'est fini.

**Remerciements**. L'auteur aimerait remercier B.Grébert, E.Paturel,G.Popov, L.Thomann et spécialement D.Robert de l'avoir constamment encouragé pendant la période de la thèse.

**Rafik Imekraz**
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray UMR 6629
Université de Nantes,
2, rue de la Houssinière,
44322 Nantes Cedex 3, France
E-mail : **rafik.imekraz@univ-nantes.fr**

# Chapitre 4

# Annexes

## 4.1 Non-résonance

### 4.1.1 Condition de croissance polynomiale et non-résonance

On invoque seulement des propriétés arithmétiques de la suite des valeurs propres $\lambda_j$, à savoir des conditions de croissance polynomiale

(A) $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ *est une suite strictement croissante et positive*

(B) *il existe* $\theta \geq 1$ *et* $\Omega > 1$ *tels que* $\forall j \geq 1 \qquad \frac{1}{\Omega} j^\theta \leq \lambda_j \leq \Omega j^\theta$

(C) *l'ensemble* $\Lambda = \{\lambda_j - \lambda_{j'}, (j, j') \in \mathbb{N}^{\star 2}\}$ *vérifie pour un certain* $\sigma > 0$

$$\forall t \geq 1 \qquad \mathrm{Card}(\Lambda \cap [0, t]) \leq C t^\sigma$$

Avec $t = 1$, on remarque que la condition (C) implique

$$\inf_{j\geq 1}(\lambda_{j+1} - \lambda_j) > 0 \tag{4.1}$$

Sans perdre de généralité on supposera que la borne inférieure précédente est $\geq 2$, de sorte que

$$\forall j \geq k \qquad \lambda_j - \lambda_k - 1 \geq \frac{1}{2}(\lambda_j - \lambda_k)$$

Dans la définition suivante, $j_1^\star, j_2^\star, j_3^\star$ sont les trois entiers de module maximal : $|j_1^\star| \geq |j_2^\star| \geq |j_3^\star|$. La condition suivante de non-résonance a été introduite dans [Bam03].

**Définition 4.1.1.** *La suite réelle* $(\omega_j)$ *est dite non-résonante si elle vérifie pour tout entier* $r \geq 3$*, il existe des nombres* $\gamma(r), \delta(r) > 0$ *tels que pour tous* $j_1, \dots, j_i, j_{i+1}, \dots, j_r \in \mathbb{Z}^\star$ *on ait*

$$|\omega_{j_1} + \cdots + \omega_{j_i} - \omega_{j_{i+1}} - \cdots - \omega_{j_r}| \geq \frac{\gamma}{|j_3^\star|^\delta} \tag{4.2}$$

*si bien entendu* $\{j_1, \dots, j_i\} \neq \{j_{i+1}, \dots, j_r\}$

Cette définition généralise la notion de vecteurs diophantiens dans un cadre de dimension infinie. Et comme en dimension finie, on a une propriété de mesure totale en munissant $\mathcal{W} = \prod_{j\geq 1} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{\mathbb{N}^\star}$ de la mesure Lebesgue-produit.

**Théorème 4.1.2.** *Pour tout entier* $k \geq 1$*, il existe un ensemble* $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{W}$ *de mesure pleine dont tous les vecteurs* $(m_j)$ *sont tels que* $\left(\lambda_j + \frac{m_j}{j^k}\right)_{j\geq 1}$ *est non résonante.*

La démonstration de ce théorème se trouve à la partie 4.1.2. Dans le cas des suites de la forme $\lambda_j + \frac{m_j}{j^k}$ on peut améliorer l'estimation de la non-résonance. Et c'est précisément cela qui permet un gain dans la résolution de l'équation homologique (voir le lemme 2.2.21) et a fortiori justifie la création des classes $T_k^+$.

**Proposition 4.1.3.** *Soit $(m_j)_{j\geq 1}$ une suite à valeurs dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, alors la suite $\omega_j = \lambda_j + \frac{m_j}{j^k}$ est non résonante si et seulement si on peut remplacer dans la définition 4.1.1 l'estimation de non-résonance par la suivante :*

$$|\omega_{j_1} + \cdots + \omega_{j_i} - \omega_{j_{i+1}} - \cdots - \omega_{j_r}| \geq \gamma \frac{(1 + \lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star})}{|j_3^\star|^\delta}$$

Preuve. En vertu de l'inégalité 4.1, il est clair que la condition de l'énoncé implique la non-résonance. Montrons donc la réciproque. Soit $r \geq 3$, on distingue deux situations

i) si $\lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star} < 2r(\lambda_{j_3^\star} + \frac{1}{2})$, alors la propriété (B) donne

$$1 + \lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star} \leq C|j_3^\star|^\theta$$

Il s'ensuit que

$$|\omega_{j_1} \pm \cdots \pm \omega_{j_r}| \geq \frac{\gamma}{|j_3^\star|^\delta} \geq \frac{\gamma(1 + \lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star})}{C|j_3^\star|^{\delta+\theta}}$$

ii) si $\lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star} \geq 2r(\lambda_{j_3^\star} + \frac{1}{2})$, alors on a

$$\begin{aligned} |\omega_{j_1} \pm \cdots \pm \omega_{j_r}| &\geq \lambda_{j_1^\star} - \tfrac{1}{2} - \left(\lambda_{j_2^\star} + \tfrac{1}{2}\right) - (r-2)(\lambda_{j_3^\star} + \tfrac{1}{2}) \\ &\geq \tfrac{2}{r}\left(\lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star}\right) \\ &\geq \tfrac{2}{r}\left(\lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star}\right) \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star} \geq 2$, il vient

$$|\omega_{j_1} \pm \cdots \pm \omega_{j_r}| \geq \frac{4}{3r}(1 + \lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star}) \geq \frac{4}{3r} \times \frac{(1 + \lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star})}{|j_3^\star|}$$

□

Signalons enfin que les propriétés (A),(B) sont clairement raisonnables. La proposition suivante fournit des conditions pratiques qui réalisent (C).

**Proposition 4.1.4.** *Soit $(\lambda_j)$ une suite vérifiant (A) et B), alors la condition (C) est réalisée si l'on a l'une des conditions suivantes*

*a) il existe $a, b \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star$ tels que $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ est à valeurs dans $a + b\mathbb{Z}$*

*b) il existe $\theta > 1$,$c > 0$ et $J > 0$ tels que $\min(j, j') \geq J \quad \Rightarrow \quad |\lambda_j - \lambda_{j'}| \geq c|j^\theta - j'^\theta|$*

*c) on a un développement asymptotique $\lambda_j = c_1 j^{\theta_1} + \cdots + c_n j^{\theta_n} + R(j)$ avec $\theta_1 > 1$, $\theta_1 > \cdots > \theta_n$ et $R(j)$ borné.*

La condition a) englobe bien sûr les valeurs propres de l'oscillateur harmonique sur $\mathbb{R}^d$ ou encore le Laplacien sur le cercle. Quant à la condition c), elle est vérifiée par les valeurs propres de tout opérateur différentiel uni-dimensionnel de la forme $-\frac{d}{dx^2} + V(x)$ avec $V$ polynôme confinant (théorème 3.2.7 ou [HR82]).

Preuve.

a) Fixons $t \geq 1$. Soient $j < j' \in \mathbb{N}^\star$ tels que $0 \leq \lambda_{j'} - \lambda_j \leq t$, on a

$$c\theta \max(j^{\theta-1}, j'-j) \leq c\theta j^{\theta-1}(j'-j) \leq c(j'^\theta - j^\theta) \leq t$$

Il existe $\Omega > 1$ vérifiant $j \leq \Omega t^{1/(\theta-1)}$ et $j' \leq \Omega(t + t^{1/(\theta-1)}) \leq 2\Omega t^{1+1/(\theta-1)}$, par conséquent $\sigma = 1 + \dfrac{2}{\theta - 1}$ convient.

b) La même démonstration que celle de la proposition 3.2.6 assure l'implication b) $\Rightarrow$ (A).

□

### 4.1.2 Démonstration du théorème de mesure totale

Entamons la démonstration technique du théorème 4.1.2. À partir de maintenant l'entier $k \geq 1$ est fixé un fois pour toutes, on ne le mentionne plus dans les énoncés et dans les constantes. On rappelle que $\mathcal{W} = \prod_{j\geq 1} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{\mathbb{N}^\star}$ est muni de la mesure Lebesgue-produit.

**Lemme 4.1.5.** *Soient $M > 0$,$c \in \mathbb{R}$,$\delta > 0$ et $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r \backslash \{0\}$, il existe une constante $C(r) > 0$ telle que*

$$Vol_r\left(\{x \in [-M, +M]^r, \left|\sum_{i=1}^r a_i x_i + c\right| < \delta\}\right) \leq C(r) M^{r-1} \delta$$

*où $Vol_r$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^r$*

Preuve. On a l'inclusion

$$\left\{x \in [-M, +M]^r, \left|\sum_{i=1}^r a_i x_i + c\right| < \delta\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^r, \sum_{i=1}^r x_i^2 \leq rM^2, \left|\sum_{i=1}^r a_i x_i + c\right| < \delta\right\}$$

L'inégalité $|\sum_{i=1}^r a_i x_i + c| < \delta$ signifie que $x$ à une distance $< \dfrac{\delta}{\sqrt{\sum a_i^2}}$ de l'hyperplan affine $\sum a_i x_i + c = 0$. Ce dernier rencontre la boule $\sum x_i^2 \leq rM^2$ en une boule hyperplane $B'$ de volume $(r-1)$-dimensionnel inférieur à $C(r)M^{r-1}$, donc l'ensemble de départ est inclus dans l'ensemble produit $B' \times ] - \dfrac{\delta}{\sqrt{\sum a_i^2}}, \dfrac{\delta}{\sqrt{\sum a_i^2}} [ \subset B' \times ] - \delta, \delta[$.

□

**Lemme 4.1.6.** *Pour tous entiers naturels non nuls $N$ et $r$ on a*

$$Card\left\{\alpha \in \mathbb{Z}^N, \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \leq r\right\} \leq C(r) N^r$$

Preuve. Appelons $\xi(N, r)$ la quantité à majorer. Si $N \leq r$, on a trivialement $\xi(N, r) \leq \xi(r, r)$. On suppose $N \geq r$. Le point clé est que parmi $N$ entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ vérifiant $\sum |\alpha_i| \leq r$, il y a au plus $r$ entiers non nuls. Autrement dit,

$$\left\{\alpha \in \mathbb{Z}^N, \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \leq r\right\} \subset \bigcup_J \left\{\alpha \in \mathbb{Z}^n, \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \leq r, \forall i \in J \quad \alpha_i = 0\right\}$$

où $J$ parcourt les $C_{N-r}^N = C_r^N$ parties de $[[1, N]]$ de cardinal $N - r$. Cela nous amène à $\xi(N, r) \leq \xi(r, r) N^r / r!$. □

Dans la suite si $m \in \mathcal{W}$ alors on note $\omega_j = \lambda_j + \dfrac{m_j}{j^k}$ pour tout $j \geq 1$. Par commodité on ne mentionnera pas la dépendance en $\theta, \sigma$ et $\Omega$ dans les constantes et les ensembles.

**Proposition 4.1.7.** *Soit $r, k \in \mathbb{N}^\star$, $\gamma \in ]0,1[$, il existe certaines constantes $C(r,k) > 0, \beta(r,\gamma,k) \geq k$. Si $\gamma < 1/C(r,k)$ alors il existe une partie mesurable $F'_{r,\gamma} \subset \mathcal{W}$ de mesure $1 - \gamma C(r,k)$ telle que*

$$\forall m \in F'_{r,\gamma} \quad \forall b \in \Lambda \quad \forall N \in \mathbb{N}^\star \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^N \backslash \{0\} \quad \sum_{j=1}^N |\alpha_j| \leq r \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \omega_j - b \right| \geq \frac{\gamma}{N^\beta}$$

Preuve. Pour tous $\alpha, b$ et $N$ comme dans l'énoncé, introduisons l'ensemble suivant

$$A_{\alpha,b} = \left\{ m \in [-1/2, 1/2]^N \quad \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \omega_j - b \right| < \frac{\gamma}{N^\beta} \right\}$$

L'ensemble $\{j \in [[1,N], \alpha_j \neq 0\}$ est de cardinal $\leq r$, on définit $I(\alpha)$ tel que

$$\{j \in [[1,N], \alpha_j \neq 0\} \subset I_\alpha \subset [[1,N]] \qquad \mathrm{Card}(I_\alpha) = r$$

Ainsi $A_{\alpha,b}$ se factorise $A_{\alpha,b} = [-1/2,1/2]^{N-r} \times A'_{\alpha,b}$, avec

$$A'_{\alpha,b} = \left\{ m \in [-1/2, 1/2]^{I_\alpha} \quad \left| \sum_{j \in I_\alpha} \alpha_j \omega_j - b \right| < \frac{\gamma}{N^\beta} \right\}$$

Puisque $\omega_j = \lambda_j + \frac{m_j}{j^k}$, en notant la bijection linéaire $\phi : m \in \mathbb{R}^{I_\alpha} \mapsto \left(\frac{m_j}{j^k}\right)_j \in \mathbb{R}^{I_\alpha}$ on a

$$\phi(A'_{\alpha,b}) \subset \left\{ x \in [-1/2, 1/2]^{I_\alpha} \quad \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j (\lambda_j + x_j) - b \right| < \frac{\gamma}{N^\beta} \right\}$$

À l'aide du lemme 4.1.5, on obtient $C(r)\dfrac{\gamma}{N^\beta} \geq \det(\phi)\mathrm{Vol}_r(A'_{\alpha,b}) \geq \dfrac{\mathrm{Vol}_N(A_{\alpha,b})}{N^{kr}}$. Bien entendu, on identifie $A_{\alpha,b}$ à l'ensemble iso-mesure des $m \in \mathcal{W}$ tels que $(m_1, \ldots, m_N) \in A_{\alpha,b}$. On a ainsi $\mathbb{P}(A_{\alpha,b}) \leq \gamma C(r) N^{kr-\beta}$. L'idée est de considérer $F'_{r,\gamma}$ comme le complémentaire de l'union dénombrable des $A_{\alpha,b}$ quand $N, \alpha$ et $b \in \mathbb{Z}$ sont des paramètres. Déjà le lemme 4.1.6 nous dit qu'il y a au plus $C(r)N^r$ paramètres $\alpha$ à prendre en compte. Quant aux seules valeurs pertinentes de $b$, ce sont celles telles que $A_{\alpha,b} \neq \emptyset$ pour au moins un $\alpha$, et donc

$$|b| \leq \frac{\gamma}{N^\beta} + \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \omega_j \right| \leq 1 + r(1 + \Omega N^\theta)$$

Avec la propriété (C), pour le choix $\beta = k + 2 + (k+1)r + \theta\sigma \geq k$ on a

$$\mathbb{P}\left( \bigcup_{N,\alpha,b} A_{\alpha,b} \right) \leq \sum_{N,\alpha,b} \mathbb{P}(A_{\alpha,b}) \leq \gamma C(r) \sum_{N \geq 1} N^{kr-\beta} N^r (1 + r(1 + \Omega N^\theta))^\sigma \Omega \leq C(r,k)\gamma$$

$\square$

**Proposition 4.1.8.** *Pour tous $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \in \{0, 1, -1\}^2$, $r, k \in \mathbb{N}^\star$, $\gamma \in ]0,1[$, il existe $C_\epsilon(r,k) > 0$, $\beta'_\epsilon(r,\gamma,k) > 0$ et $\gamma'_\epsilon(r,\gamma,k) \in ]0,\gamma]$ et une partie mesurable $F_{\epsilon,r,\gamma} \subset \mathcal{W}$ de mesure $\geq 1 - C_\epsilon \gamma$ tels que*

$$\forall m \in F_{\epsilon,r,\gamma} \quad \forall N \in \mathbb{N}^\star \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^N \quad \forall l_1 > l_2 > N \quad (\alpha, \epsilon) \neq (0, \ldots, 0)$$

$$\sum_{j=1}^N |\alpha_j| \leq r \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \omega_j + \epsilon_1 \omega_{l_1} + \epsilon_2 \omega_{l_2} \right| \geq \frac{\gamma'_\epsilon}{N^{\beta'_\epsilon}}$$

Preuve.

♦ Le cas $\epsilon = (0,0)$ est une reformulation de la proposition 4.1.7.

♦ Traitons les cas $\epsilon = \{\pm 1, 0\}$ ou $\epsilon = \{0, \pm 1\}$. On pose

$$C_\epsilon(r) = C(r+1), \qquad \beta'_\epsilon = \beta(r+1,\gamma,k), \qquad \gamma'_\epsilon = \frac{\gamma}{(4C^2 r)^{\beta'_\epsilon/\theta}} \in ]0,\gamma]$$

$$F_{\epsilon,r,\gamma} = F'_{r+1,\gamma}$$

Pour tout $m \in F_{\epsilon,r,\gamma}$ et pour tous $N \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha \in \mathbb{Z}^N$, et $l_1 > (4\Omega^2 r)^{1/\theta} N$ alors on a

$$\left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \omega_j \pm \omega_{l_1} \right| \geq |\omega_{l_1}| - \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \omega_j \right|$$

En se rappelant que $\Omega, r$ et $N \geq 1$, on peut minorer

$$\left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \omega_j \pm \omega_{l_1} \right| \geq \frac{1}{\Omega} l_1^\theta - 1 - (\Omega N^\theta + 1) r \geq 4\Omega r N^\theta - 1 - \Omega r N^\theta - r \geq 1 \geq \frac{\gamma'_\epsilon}{N^{\beta'_\epsilon}}$$

Par contre si $N \leq l_1 < (4\Omega^2 r)^{1/\theta} N$, alors l'appartenance de $m$ à $F'_{r+1,\gamma}$ amène à

$$\left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \omega_j \pm \omega_{l_1} \right| \geq \frac{\gamma}{(4C^2 r)^{\beta'/\theta} N^{\beta'}} = \frac{\gamma'_\epsilon}{N^{\beta'_\epsilon}}$$

♦ Le cas $\epsilon = (1,1)$ ou $\epsilon = (-1,-1)$ se traite comme le cas précédent en partant de l'inégalité

$$\left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \omega_j \pm (\omega_{l_1} + \omega_{l_2}) \right| \geq \frac{1}{\Omega}(l_1^\theta + l_2^\theta) - 2 - (\Omega N^\theta + 1) r$$

♦ Il reste à considérer $\epsilon = (1,-1)$. Pour $r \in \mathbb{N}^\star$, on considère une constante $\mu = \mu(r,\Omega) \geq 1$ telle que

$$-2 - r - r\Omega + \frac{\mu}{\Omega} - \Omega \geq 1$$

La pertinence de ce choix apparaît plus loin. L'idée est d'appliquer la proposition 4.1.7 en posant

$$F_{\epsilon,r,\gamma} := F'_{r,\gamma} \cap F'_{r+2,\gamma}, \qquad C_{\epsilon,r} := C(r) + C(r+2)$$

$$\beta'_\epsilon(r,\gamma,k) = \frac{1}{k}\beta(r,k,\gamma)\beta(r+2,k,\gamma), \qquad \gamma'_\epsilon(r,\gamma,k) = \min\left\{\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{(2\gamma^{-1}\mu^k)^{\beta(r+2)/k}}\right\} \in ]0,\gamma[$$

Vérifions que cela convient. Déjà on a bien $\mathbb{P}(F_{\epsilon,r,\gamma}) \geq 1 - (C(r) + C(r+2))\gamma$.

Fixons $m \in F_{\epsilon,r,\gamma}$ ainsi que $(N, \alpha)$ comme dans l'énoncé. On distingue plusieurs cas

- Si $l_1 \geq l_2 \geq (2N^\beta\gamma^{-1})^{1/k}$

$$|\omega_{l_1} - \omega_{l_2} - \lambda_{l_1} + \lambda_{l_2}| = \left|\frac{m_{l_1}}{l_1^k} - \frac{m_{l_2}}{l_2^k}\right| \leq \frac{\gamma}{2N^\beta}$$

D'après la proposition 4.1.7, l'appartenance de $m$ à $F'_{r,\gamma}$ donne

$$\left|\sum_{j=1}^N \alpha_j\omega_j + \omega_{l_1} - \omega_{l_2}\right| \geq \left|\sum_{j=1}^N \alpha_j\omega_j + \lambda_{l_1} - \lambda_{l_2}\right| - |\omega_{l_1} - \omega_{l_2} - \lambda_{l_1} + \lambda_{l_2}| \geq \frac{\gamma}{N^\beta} - \frac{\gamma}{2N^\beta} = \frac{\gamma}{2N^\beta}$$

Et l'on peut minorer par $\gamma'_\epsilon N^{-\beta'_\epsilon}$ puisque $\beta \geq k$.

- Si $l_1 \geq (N^\beta 2\gamma^{-1})^{1/k}\mu \geq (N^\beta 2\gamma^{-1})^{1/k} \geq l_2$. Comme $\min\{\theta, \Omega, \gamma^{-1}, N\} \geq 1$ et $\beta \geq k$, on peut minorer

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^N \alpha_j\omega_j + \omega_{l_1} - \omega_{l_2}\right| &\geq \omega_{l_1} - \omega_{l_2} - \left|\sum_{j=1}^N \alpha_j\omega_j\right| \\
&\geq -1 + \frac{l_1^\theta}{\Omega} - 1 - \Omega l_2^\theta - r(1 + \Omega N^\theta) \\
&\geq -1 + \frac{1}{\Omega}(N^\beta\gamma^{-1}2)^{\theta/k}\mu^\theta - 1 - \Omega(N^\beta\gamma^{-1}2)^{\theta/k} - r(1 + \Omega N^\theta) \\
&\geq -2 + \left(\frac{\mu^\theta}{\Omega} - \Omega\right)(N^\beta\gamma^{-1}2)^{\theta/k} - r(1 + \Omega N^\theta) \\
&\geq -2 - r + \left(\frac{\mu}{\Omega} - \Omega\right)N^\theta - r\Omega N^\theta \\
&\geq -2 - r + N^\theta\left(\frac{\mu}{\Omega} - \Omega - r\Omega\right) \\
&\geq -2 - r + \frac{\mu}{\Omega} - \Omega - r\Omega \\
&\geq -2 - r - r\Omega + \frac{\mu}{\Omega} - \Omega \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

- $(N^\beta 2\gamma^{-1})^{1/k}\mu \geq l_2 \geq l_1$ alors l'appartenance $m \in F'_{r+2,\gamma}$ s'exprime

$$\left|\sum_{j=1}^N \alpha_j\omega_j + \omega_{l_1} - \omega_{l_2}\right| \geq \frac{\gamma}{(N^\beta 2\gamma^{-1})^{\beta(r+2,k,\gamma)/k}\mu^{\beta(r+2,\gamma,k)}} \geq \frac{\gamma'_\epsilon}{N^{\beta'_\epsilon}}$$

□

Enfin, on a la proposition suivante.

**Proposition 4.1.9.** *Pour tous $r, k \in \mathbb{N}^\star$, $\gamma \in ]0,1[$, il existe $C(r) > 0$, $\beta'(r,\gamma) > 0$ et $\gamma'(r,\gamma) \in ]0,\gamma[$ et une partie mesurable $F_{r,\gamma} \subset \mathcal{W}$ de mesure $\geq 1 - C(r)\gamma$ tels que*

$$\forall m \in F_{r,\gamma} \quad \forall\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \in \{0,1,-1\}^2 \quad \forall N \in \mathbb{N}^\star$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}^N \quad \forall l_1, l_2 \in \mathbb{N} \cap [N+1, +\infty[ \quad (\alpha, \epsilon) \neq (0, \ldots, 0)$$

$$\sum_{j=1}^N |\alpha_j| \leq r \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{j=1}^N \alpha_j\omega_j + \epsilon_1\omega_{l_1} + \epsilon_2\omega_{l_2}\right| \geq \frac{\gamma'}{N^{\beta'}}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition 4.1.8 en optimisant en $\epsilon \in \{0, 1, -1\}^2$

$$C(r) = \sum_{\epsilon} C_{\epsilon}(r) > 0 \qquad \beta'(r, \gamma) = \max_{\epsilon} \beta'_{\epsilon}(r, \gamma) > 0$$

$$\gamma'(r) = \min_{\epsilon} \gamma'_{\epsilon}(r) \in ]0, \gamma[ \qquad F_{r,\gamma} = \cap_{\epsilon} F_{\epsilon,r,\gamma} \subset \mathcal{W}$$

En effet

$$\frac{\gamma'_{\epsilon}}{N^{\beta'_{\epsilon}}} \geq \frac{\gamma'}{N^{\beta'}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(F^c_{r,\gamma}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\epsilon} F^c_{\epsilon,r,\gamma}\right) \leq \sum_{\epsilon} (1 - \mathbb{P}(F_{\epsilon,r,\gamma})) \leq \gamma C(r)$$

$\square$

Comme dans [Gré07] (proposition 5.9), la démonstration du théorème 4.1.2 est achevée en choisissant une union-intersection dénombrable :

$$F_k = \bigcap_{r>0} \bigcup_{\gamma>0} F_{r,\gamma}$$

## 4.2 Intégrales-produits des fonctions d'Hermite

On définit les polynômes d'Hermite $H_n$ par la série génératrice (voir [Sze75] page 105) :

$$\exp(2zx - z^2) = \sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n \tag{4.3}$$

Ce qui équivaut à la formule habituelle :

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-(z-x)^2} \Big|_{z=0} = e^{x^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \Big|_{z=-x} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{4.4}$$

Les formules précédentes montrent que $\deg H_n = n$. On définit les fonctions d'Hermite par

$$\phi_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} \tag{4.5}$$

La proposition suivante montre l'intérêt des fonctions d'Hermite :

**Proposition 4.2.1.** *La famille $(\phi_n)_{n \geq 0}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour l'oscillateur harmonique $-\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left( -\frac{d}{dx^2} + x^2 \right) \phi_n = (2n+1)\phi_n$$

L'objet de cette note est de montrer que le calcul des intégrales-produits $\int_{\mathbb{R}} \phi_{n_1}(x) \cdots \phi_{n_K}(x) dx$ se ramène algorithmiquement au calcul des coefficients d'une puissance d'une forme quadratique bien déterminée.

Dans [Wan09], on trouvera une autre approche avec la série génératrice (4.3), le calcul des intégrales est fait lorsque $K = 4$ et la méthode s'adapte pour tout $K$.

La série génératrice (4.3) permet de vérifier la relation $\phi_n(-x) = (-1)^n \phi_n(x)$, ainsi l'on a $\int_{\mathbb{R}} \phi_{n_1}(x) \cdots \phi_{n_K}(x) dx = 0$ si $n_1 + \cdots + n_K$ est impair. Nous retrouverons cela dans la démonstration de la proposition suivante.

**Proposition 4.2.2.** *Pour tout entier $K \geq 1$, on définit la forme quadratique sur $\mathbb{C}^K$*

$$Q_K(z_1, \ldots, z_K) := -\sum_{j=1}^{K} z_j^2 + \frac{2}{K} \left( \sum_{j=1}^{K} z_j \right)^2$$

*Dès lors, pour tout entier $N \geq 0$ on a la formule*

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K} \pi^{\frac{K}{4} - \frac{1}{2}}} \frac{Q_K(z_1, \cdots, z_k)^N}{N! 2^N} = \sum_{n_1 + \cdots + n_K = 2N} \left( \prod_{j=1}^{K} \frac{z_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \right) \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{K} \phi_{n_j}(x) dx$$

La démonstration de cette proposition se trouve à la fin de cette note. On peut bien entendu obtenir une formule explicite des intégrales-produits avec la formule du multinôme, néanmoins cette expression n'est ni maniable ni élégante. Voici quelques formules découlant de la proposition 4.2.2 (la deuxième formule est traitée dans [Wan09]).

**Proposition 4.2.3.** *On a les formules*

*1)* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi_{n_1}(x) \phi_{n_2}(x) dx = \delta_{n_1, n_2}$

*2)* $\int_{\mathbb{R}} \phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(x)\phi_0(x)^2 dx = \frac{(-1)^{\frac{n_1-n_2}{2}}(n_1+n_2)!}{\sqrt{2\pi n_1! n_2!}\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)! 2^{n_1+n_2}}$ *lorsque* $n_1+n_2$ *est pair*

*3)* *pour tous* $N, K \geq 1$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{2N}(x)\phi_0(x)^{K-1} dx = \frac{(-1)^N\sqrt{2}}{\sqrt{K}\pi^{\frac{K}{4}-\frac{1}{2}}} \times \frac{\sqrt{(2N)!}(1-\frac{2}{K})^N}{N! 2^N}$$

*En outre lorsque* $N \to +\infty$ *on a l'équivalent*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{2N}(x)\phi_0(x)^{K-1} dx \simeq \frac{(-1)^N\sqrt{2}}{\sqrt{K}\pi^{\frac{1}{4}(K-1)}} \times \frac{(1-\frac{2}{K})^N}{N^{\frac{1}{4}}}$$

Preuve.

1) Le contraire serait surprenant ! On le vérifie pour la forme avec $K = 2$

$$\frac{(z_1 z_2)^N}{N!} = \frac{Q_2(z_1, z_2)^N}{N! 2^N} = \sum_{n_1+n_2=2N} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} \int_{\mathbb{R}} \phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(x) dx$$

2) Pour $K = 4$, on évalue en $z_3 = z_4 = 0$ pour obtenir

$$\frac{Q_4(z_1, z_2, 0, 0)^N}{N! 2^N \sqrt{2\pi}} = \sum_{n_1+n_2=2N} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} \int_{\mathbb{R}} \phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(x)\phi_0(x)^2 dx$$

Or

$$\begin{aligned} Q_4(z_1, z_2, 0, 0)^N &= \left(-z_1^2 - z_2^2 + \frac{1}{2}(z_1+z_2)^2\right)^N = \frac{(-1)^N (z_1 - z_2)^{2N}}{2^N} \\ &= \frac{(-1)^N (2N)!}{2^N} \sum_{n_1+n_2=2N} \frac{(-1)^{n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{n_1! n_2!} \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(x)\phi_0(x)^4 dx = \frac{\sqrt{n_1!}\sqrt{n_2!}(-1)^N(2N)!(-1)^{n_2}}{N! 2^N \sqrt{2\pi} 2^N n_1! n_2!} = \frac{(-1)^{N-n_2}(2N)!}{\sqrt{2\pi n_1! n_2!} N! 4^N}$$

et l'on conclut à l'aide de l'égalité $N = \frac{1}{2}(n_1+n_2)$.

3) Il s'agit de constater que l'on a $Q_K(z_1, 0, \ldots, 0)^N = \left(\frac{2}{K} - 1\right)^N z_1^{2N}$. On constatera que la nullité pour $K = 2$ n'est pas surprenante car $\int \phi_{2N}\phi_0 = 0$. L'équivalent découle de la formule de Stirling :

$$\frac{\sqrt{(2N)!}}{N! 2^N} \simeq \frac{\sqrt{\sqrt{4\pi N}}}{\sqrt{2\pi N}} = \frac{1}{(N\pi)^{\frac{1}{4}}}$$

□

Montrons à présent le lemme suivant :

**Lemme 4.2.4.** *Soit* $F : \mathbb{C}^K \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction partiellement holomorphe, i.e. pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $(z_1, \ldots, z_K) \mapsto F(z_1, \ldots, z_K, x)$ *est holomorphe. On effectue le développement en série entière suivant*

$$F(z, x) = \sum_{n_1, \ldots, n_K} a_{n_1, \ldots, n_K}(x) z_1^{n_1} \cdots z_K^{n_K}$$

*i) Si pour tout compact $A \subset \mathbb{C}^K$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sup_{z \in A} |F(z,x)|$ est intégrable, alors $z \mapsto \int F(z,x)dx$ est entière, chaque fonction-coefficient $x \mapsto a_{n_1,\dots,n_K}(x)$ est intégrable et l'on a le développement en série entière :*

$$\int_{\mathbb{R}} F(z,x)dx = \sum_{n_1,\dots,n_K} \int_{\mathbb{R}} a_{n_1,\dots,n_K}(x)dx z_1^{n_1} \cdots z_K^{n_K} \tag{4.6}$$

*ii) Si l'on a les conditions suivantes*

- *pour tout $z \in \mathbb{C}^K$, $x \mapsto F(z,x)$ est dérivable*
- *pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $z \mapsto \partial_x F(z,x)$ est entière*
- *pour tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$ la fonction $z \mapsto \sup_{x \in I} |\partial_x F(z,x)|$ est intégrable sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^K$*

*alors chaque fonction-coefficient $x \mapsto a_{n_1,\dots,n_K}(x)$ est dérivable et l'on a*

$$\partial_x F(z,x) = \sum_{n_1,\dots,n_K} \frac{d}{dx} a_{n_1,\dots,n_K}(x) z_1^{n_1} \cdots z_K^{n_K} \tag{4.7}$$

Preuve. i) l'holomorphie de $z \mapsto \int F(z,x)dx$ est classique. Pour tout $r > 0$, la formule de Cauchy se formule

$$a_{n_1,\dots,n_K}(x) = \int_{[-\pi,\pi]^K} e^{-in_1\theta_1 - \cdots - in_K\theta_K} F(re^{i\theta_1}, \dots, re^{i\theta_K}, x) \frac{d\theta_1 \cdots d\theta_K}{(2\pi)^K r^{n_1 + \cdots n_K}} \tag{4.8}$$

L'intégrabilité de $a_{n_1,\dots,n_K}$ se constate en faisant $r = 1$ et en invoquant le théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}} a_{n_1,\dots,n_K}(x)dx = \int_{[-\pi,\pi]^K} e^{-in_1\theta_1 - \cdots - in_K\theta_K} \left[\int_{\mathbb{R}} F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_K}, x)dx\right] \frac{d\theta_1 \cdots d\theta_K}{(2\pi)^K}$$

Comme $z \mapsto F(z,x)$ est développable en série entière, la formule précédente s'interprète comme une formule de Cauchy associée au développement en série entière (4.6).

ii) Fixons un intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto \sup_{x \in I} |\partial_x F(z,x)|$ est intégrable sur un voisinage de 0, donc sur $(r\mathbb{T})^k$ pour au moins un $r > 0$, où l'on note $\mathbb{T}$ le cercle unité. Par conséquent, on peut dériver par rapport à $x \in I$ le membre droit de (4.8) et l'on conclut comme au point i) en remarquant que l'on a obtenu une formule de Cauchy pour la fonction développable en série entière $z \mapsto \partial_x F(z,x)$. □

Démontrons la proposition 4.2.1

Preuve. Comme les fonctions $\phi_n$ sont réelles, le point 1) de la proposition 4.2.3 montre que la famille $(\phi_n)_{n \geq 0}$ est orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$. Vérifions que le sous-espace $\mathbb{C}[x]e^{-x^2/2}$ engendré par $(\phi_n)_{n \geq 0}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. On considère $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ orthogonale à $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$. On vérifie que la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} e^{-ixz - x^2/2} dx$ est entière et que toutes ses dérivées s'annulent en $z = 0$, par conséquent elle est nulle. L'injectivité de la transformée de Fourier prouve alors que $x \mapsto \overline{\psi(x)} e^{-x^2/2}$ s'annule presque partout, i.e. $\psi = 0$.

Prouvons maintenant les formules aux valeurs propres. La série génératrice (4.3) donne immédiatement

$$\exp\left(2zx - z^2 - \frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n \geq 0} H_n(x) e^{-x^2/2} \frac{z^n}{n!}$$

Le point ii) du lemme 4.2.4 permet de dériver deux fois en $x$ et d'obtenir la formule

$$\left[-x^2+(2z-x)^2-1\right]\exp\left(2zx-z^2-\frac{x^2}{2}\right)=\sum_{n\geq 0}\left(-x^2+\frac{d^2}{dx^2}\right)H_n(x)e^{-x^2/2}\frac{z^n}{n!}$$

Par ailleurs, par application de l'opérateur $2z\frac{d}{dz}$, il vient

$$4z(x-z)\exp\left(2zx-z^2-\frac{x^2}{2}\right)=\sum_{n\geq 0}2nH_n(x)e^{-x^2/2}\frac{z^n}{n!}$$

La conclusion découle de l'unicité des coefficients des deux développements suivants

$$\sum_{n\geq 0}\left(x^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)H_n(x)e^{-x^2/2}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}(2n+1)H_n(x)e^{-x^2/2}\frac{z^n}{n!}$$

□

Finissons par la preuve de la proposition 4.2.2.
PREUVE. En multipliant $K$ séries génératrices (4.3), il vient

$$\exp\left(2x\sum_{j=1}^{K}z_j-\sum_{j=1}^{K}z_j^2-\frac{K}{2}x^2\right)=\sum_{n_1,\cdots,n_K=0}^{+\infty}\prod_{j=1}^{K}\frac{H_{n_j}(x)e^{-x^2/2}z_j^{n_j}}{n_j!}$$

Le point i) du lemme 4.2.4 amène à

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{K}z_j^2\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(2x\sum_{j=1}^{K}z_j-\frac{K}{2}x^2\right)dx=\sum_{n_1,\cdots,n_K}\left[\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{K}\frac{H_{n_j}(x)e^{-x^2/2}}{n_j!}dx\right]z_1^{n_1}\dots z_K^{n_K}$$

L'intégrale à gauche se calcule aisément :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}e^{\left(2x\sum_{j=1}^{K}z_j-\frac{K}{2}x^2\right)}dx&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}\int_{\mathbb{R}}e^{\left(2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}x\sum_{j=1}^{K}z_j-x^2\right)}dx\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}e^{\frac{2}{K}\left(\sum_{j=1}^{K}z_j\right)^2}\int_{\mathbb{R}}e^{-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}\sum_{j=1}^{K}z_j\right)^2}dx\end{aligned}$$

Comme $\alpha\in\mathbb{C}\mapsto\int_{\mathbb{R}}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ est une fonction entière valant $\sqrt{\pi}$ sur $\mathbb{R}$, elle vaut $\sqrt{\pi}$ sur tout $\mathbb{C}$. Par suite il vient

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{K}}\exp\left(\frac{2}{K}\left(\sum_{j=1}^{K}z_j\right)^2-\sum_{j=1}^{K}z_j^2\right)=\sum_{n_1,\cdots,n_K}\left[\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{K}\frac{H_{n_j}(x)e^{-x^2/2}}{n_j!}dx\right]z_1^{n_1}\dots z_K^{n_K}$$

La forme quadratique $Q_K$ apparaît enfin. On revient alors aux fonctions $\phi_n$ (voir (4.5)) et l'on développe l'exponentielle :

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{K}}\sum_{N\in\mathbb{N}}\frac{Q_K(z_1,\cdots,z_k)^N}{N!}=\pi^{K/4}\sum_{n_1,\cdots,n_K=0}^{\infty}2^{\frac{1}{2}(\sum n_j)}\left(\prod_{j=1}^{K}\frac{z_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right)\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{K}\phi_{n_j}(x)dx$$

On voit immédiatement que l'on a affaire à une série entière paire, donc le coefficient de $z_1^{n_1}\cdots z_K^{n_K}$ est nul dès lors que $\sum n_j$ est impair. Cela se retrouve d'ailleurs car $\phi_{n_1}\cdots\phi_{n_K}$ est une fonction intégrable impaire. En examinant les contributions des degrés, on obtient pour tout entier naturel $N$ :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}\pi^{\frac{K}{4}-\frac{1}{2}}}\frac{Q_K(z_1,\cdots,z_k)^N}{N!} = 2^N \sum_{n_1+\cdots+n_K=2N}\left(\prod_{j=1}^{K}\frac{z_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right)\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{K}\phi_{n_j}(x)dx$$

□

Même preuve sans le lemme 4.2.4. Preuve. En multipliant $K$ séries génératrices (4.3), il vient

$$\exp\left(2x\sum_{j=1}^{K}z_j - \sum_{j=1}^{K}z_j^2 - \frac{K}{2}x^2\right) = \sum_{n_1,\cdots,n_K=0}^{+\infty}\prod_{j=1}^{k}\frac{H_{n_j}(x)e^{-x^2/2}z_j^{n_j}}{n_j!}$$

L'idée est d'intégrer $x$ sur $\mathbb{R}$ et d'intervertir $\sum\int=\int\sum$ dans le membre droit. A priori, je ne vois pas de raison immédiate qui permette cette opération. Mon argument le plus simple est l'utilisation des formules de Cauchy, pour tous $(n_1,\ldots,n_K)\in\mathbb{N}^K$ et $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\int_{[-\pi,\pi]^K}\exp\left(2x\sum_{j=1}^{K}e^{i\theta_j} - \sum_{j=1}^{K}e^{2i\theta_j} - \frac{K}{2}x^2 - i\sum_{j=1}^{K}n_j\theta_j\right)\frac{d\theta_1\cdots d\theta_K}{(2\pi)^K} = \prod_{j=1}^{k}\frac{H_{n_j}(x)e^{-x^2/2}}{n_j!}$$

On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue en intégrant sur $x\in\mathbb{R}$. En effet on a une domination immédiate :

$$\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{[-\pi,\pi]^K}\left|\exp\left(2x\sum_{j=1}^{K}e^{i\theta_j} - \sum_{j=1}^{K}e^{2i\theta_j} - \frac{K}{2}x^2 - i\sum_{j=1}^{K}n_j\theta_j\right)\right|\frac{dxd\theta_1\cdots d\theta_K}{(2\pi)^K}\leq$$

$$\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{[-\pi,\pi]^K}\exp\left(K\left(2x+1-\frac{1}{2}x^2\right)\right)\frac{dxd\theta_1\cdots d\theta_K}{(2\pi)^K} < +\infty$$

Il vient

$$\int_{[-\pi,\pi]^K}\left[\int_{\mathbb{R}}e^{\left(2x\sum_{j=1}^{K}e^{i\theta_j}-\frac{K}{2}x^2\right)}dx\right]e^{\left(-\sum_{j=1}^{K}e^{2i\theta_j}+in_j\theta_j\right)}\frac{d\theta_1\cdots d\theta_K}{(2\pi)^K} = \int_{x\in\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{k}\frac{H_{n_j}(x)e^{-x^2/2}}{n_j!}dx$$

L'intégrale apparaissant sous l'intégrale de gauche se calcule avec la théorie des fonctions holomorphes :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}e^{\left(2x\sum_{j=1}^{K}e^{i\theta_j}-\frac{K}{2}x^2\right)}dx &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}\int_{\mathbb{R}}e^{\left(2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}\sum_{j=1}^{K}e^{i\theta_j}-x^2\right)}dx\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}e^{\frac{2}{K}\left(\sum_{j=1}^{K}e^{i\theta_j}\right)^2}\int_{\mathbb{R}}e^{-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}\sum_{j=1}^{K}e^{i\theta_j}\right)^2}dx\end{aligned}$$

Comme $z\mapsto\int_{\mathbb{R}}e^{-(x-z)^2}dx$ est une fonction entière valant $\sqrt{\pi}$ sur $\mathbb{R}$, elle vaut $\sqrt{\pi}$ sur tout $\mathbb{C}$. Par suite,

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{K}}\int_{[-\pi,\pi]^K}e^{\left(\frac{2}{K}\left(\sum_{j=1}^{K}e^{i\theta_j}\right)^2-\sum_{j=1}^{K}e^{2i\theta_j}+in_j\theta_j\right)}\frac{d\theta_1\cdots d\theta_K}{(2\pi)^K} = \int_{x\in\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{k}\frac{H_{n_j}(x)e^{-x^2/2}}{n_j!}dx$$

La forme quadratique $Q_K$ apparaît. On interprète la formule précédente comme une formule de Cauchy :

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{K}}\exp(Q_K(z_1,\ldots,z_K)) = \sum_{n_1,\ldots,n_K=0}^{+\infty} z_1^{n_1}\cdots z_K^{n_K}\int_{x\in\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{k}\frac{H_{n_j}(x)e^{-x^2/2}}{n_j!}dx$$

On revient alors aux fonctions $\phi_n$ (voir (4.5)) et l'on développe l'exponentielle :

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{K}}\sum_{N\in\mathbb{N}}\frac{Q_K(z_1,\cdots,z_k)^N}{N!} = \pi^{K/4}\sum_{n_1,\cdots,n_K=0}^{\infty} 2^{\frac{1}{2}(\sum n_j)}\left(\prod_{j=1}^{K}\frac{z_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right)\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{K}\phi_{n_j}(x)dx$$

On voit immédiatement que l'on a affaire à une série entière paire, donc le coefficient de $z_1^{n_1}\cdots z_K^{n_K}$ est nul dès lors que $\sum n_j$ est impair. Cela se retrouve d'ailleurs car $\phi_{n_1}\cdots\phi_{n_K}$ est une fonction intégrable impaire. En examinant les contributions des degrés, on obtient pour tout entier naturel $N$ :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}\pi^{\frac{K}{4}-\frac{1}{2}}}\frac{Q_K(z_1,\cdots,z_k)^N}{N!} = 2^N\sum_{n_1+\cdots+n_K=2N}\left(\prod_{j=1}^{K}\frac{z_j^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right)\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{K}\phi_{n_j}(x)dx$$

□

# Bibliographie


[AG91] S. Alinhac and P. Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théoreme de Nash-Moser*, L'Editeur : EDP Sciences, 1991.

[Bam03] Dario Bambusi, *Birkhoff normal form for some nonlinear PDEs*, Comm. Math. Physics **234** (2003), 253–283.

[Bam07] D. Bambusi, *A birkhoff normal form theorem for some semilinear pdes*, Hamiltonian Dynamical Systems and Applications, Springer, 2007, pp. 213–247.

[Bam08] Dario Bambusi, *A Birkhoff normal form theorem for some semilinear pdes*, NATO Sci. Peace Secur. Ser. B Phys. Biophys., Springer, Dordrecht (2008), 213–247.

[BDGS07] Bambusi, Delort, Grébert, and Szeftel, *Almost global existence for Hamiltonian semilinear Klein-Gordon equations with small Cauchy date on Zoll manifolds*, Comm. Pure Appl. Math **60 no 11** (2007), pages 1665–1690.

[BG04] Bambusi and Grébert, *Forme normale pour NLS en dimension quelconque*, Compt. Rendu. Acad. Sciences Paris (2004).

[BG06] D. Bambusi and B. Grébert, *Birkhoff normal form for PDEs with tame modulus*, Duke Math. J. **135** (2006), 507–567.

[BM88] G. Bourdaud and Y. Meyer, *Inégalités l2 précisées pour la classe s0 0 0*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), 401–412.

[Bou96a] J. Bourgain, *Construction of approximative and almost-periodic solutions of perturbed linear Schrödinger and wave equations*, Geometric and Functional Analysis **6** (1996), 201–230.

[Bou96b] Jean Bourgain, *On the growth in time of higher Ssobolev norms of smooth solutions of Hamiltonian PDE*, Internat. Math. Res. Notices (1996), 277–304.

[Bou05] J. Bourgain, *Green's function estimates for lattice Schrödinger operators and applications*, Annals of Mathematics Studies, vol. 158, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[BS] Berezin and Shubin, *The Schrödinger equation.*

[Car67] H.P. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, 1967.

[Car02] R. Carles, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential*, Annales Henri Poincaré, vol. 3, Springer, 2002, pp. 757–772.

[CKS+] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao, *Weakly turbulent solutions for the cubic defocusing nonlinear schrödinger equation*, to appear in Inventiones Math.

[Cra00] W. Craig, *Problèmes de petits diviseurs dans les équations aux dérivées partielles*, Panoramas et Synthéses, no. 9, Société Mathématique de France, 2000.

[DS04] J. M. Delort and J. Szeftel, *Long–time existence for small data nonlinear Klein–Gordon equations on tori and spheres*, Internat. Math. Res. Notices **37** (2004), 1897–1966.

[FG10] Erwan Faou and Benoît Grébert, *Quasi-invariant modified sobolev norms for semi linear reversible pdes*, Nonlinearity **23** (2010), pages 429–443.

[FPG10a] Faou, Paturel, and Grébert, *Birkhoff normal form for splitting methods applied to semi linear hamiltonian PDEs. part I : Finite dimensional discretization.*, Numer.Math. **114** (2010), 459–490.

[FPG10b] ———, *Birkhoff normal form for splitting methods applied to semi linear hamiltonian PDEs. part II : Abstract splitting*, Numer.Math. **114** (2010), 459–490.

[GIP09] Benoît Grébert, Rafik Imekraz, and Eric Paturel, *Normal forms for semilinear quantum harmonic oscillators*, Comm. Math. Phys. **vol 291-3** (2009), pages 763–798.

[Gré07] Benoît Grébert, *Birkhoff normal form and Hamiltonian PDEs*, Partial differential equations and applications, Sémin. Congr., vol. 15, Soc. Math. France, Paris, 2007, pp. 1–46. MR MR2352816

[GT10] B. Grébert and L. Thomann, *Kam for the quantum harmonic oscillator*, arXiv :1003.2793 (2010).

[GVB] B Grébert and C Villegas-Blas, *On the energy exchange between resonant modes in nonlinear schrödinger equations*, preprint.

[Hel84] Bernard Helffer, *Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques*, Astérisque, vol. 112, Société Mathématique de France, Paris, 1984, With an English summary.

[HR82] Bernard Helffer and Dider Robert, *Asymptotique des niveaux d'énergie pour des hamiltoniens à un degré de liberté*, Duke mathematical journal, vol 49 n4, (1982), 853–867.

[Kla83] Klainerman, *On almost global solutions to quasilinear wave equations in the three space dimensions*, Comm. Pure. Appl. Math. **36** (1983), 325–344.

[KP96] S. B. Kuksin and J. Pöschel, *Invariant Cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation*, Ann. Math. **143** (1996), 149–179.

[KP03] T. Kappeler and J. Pöschel, *KAM & KdV*, Springer, 2003.

[KT05] Herbert Koch and Daniel Tataru, *$L^p$ eigenfunction bounds for the Hermite operator*, Duke Math. J. **128** (2005), no. 2, 369–392.

[Kuk87] S.B. Kuksin, *Hamiltonian perturbations of infinite-dimensional linear systems with an imaginary spectrum*, Functional Analysis and Its Applications **21** (1987), no. 3, 192–205.

[Kuk93] S. B. Kuksin, *Nearly integrable infinite-dimensional Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Kuk00] ———, *Analysis of Hamiltonian PDEs*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[LY10] J. Liu and X. Yuan, *Spectrum for quantum duffing oscillator and small-divisor equation with large-variable coefficient*, Communications on Pure and Applied Mathematics **9999** (2010), no. 9999.

[Nac69] Leopoldo Nachbin, *Topology on spaces of holomorphic mappings*, New York, Springer-Verlag, 1969.

[Pös96] J. Pöschel, *A KAM-theorem for some nonlinear partial differential equations*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **23** (1996), 119–148.

[PS03] Lev Pitaevskii and Sandro Stringari, *Bose-Einstein condensation*, International Series of Monographs on Physics, vol. 116, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2003.

[PT87] Jürgen Pöschel and Eugene Trubowitz, *Inverse spectral theory*, Academic Press, 1987.

[RS] Reed-Simon, *Methods of modern mathematical physics, vol IV.*

[SS99] C.(Catherine) Sulem and P.L. Sulem, *The nonlinear Schrodinger equation*, Springer-Verlag, 1999.

[Sze75] Gabor Szego, *Orthogonal polynomials*, fourth ed., American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII.

[Tay91] Michael E. Taylor, *Pseudodifferential operators and nonlinear PDE*, Progress in Mathematics, vol. 100, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1991.

[Wan09] Wei-Min Wang, *Integrals of products of Hermite functions*, arXiv :0901.3970 (2009).

[WM08] Wang Wei-Min, *Pure point spectrum of the floquet hamiltonian for the quantum harmonic oscillator under time quasi-periodic perturbations*, Comm. Math. Physics **277** (2008), 459–496.

[YZ01] Yajima and Zhang, *Smoothing property for Schrödinger operator*, Communication in math.Phys, no.221 (2001), 573–590.

[YZ04] Kenji Yajima and Guoping Zhang, *local smoothing property and Strichartz inequality for Schrödinger operator with potentials superquadratic at infinity*, Journal of differential equations 202 (2004), 81–110.

[Zha05] Jian Zhang, *Sharp threshold for blowup and global existence in nonlinear Schrödinger equations under a harmonic potential*, Comm. Partial Differential Equations **30** (2005), no. 10-12, 1429–1443.

FIN

Français :

L'objet de la thèse est l'étude de la stabilité des solutions de certaines équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires de type Schrödinger à potentiel confinant sur $\mathbb{R}^n$ et à condition initiale régulière. Les deux potentiels étudiés sont l'oscillateur harmonique multidimensionnel et le potentiel polynomial confinant unidimensionnel. La stabilité en question peut se résumer ainsi : il existe un intervalle temporel d'existence de la solution telle que sa longueur dépend de façon polynomiale de la petitesse de la condition initiale (existence presque globale) et sur lequel la solution reste dynamiquement proche de la solution d'une équation explicite complètement intégrable (avec même condition initiale). Nous utilisons la théorie des formes normales de Birkhoff pour aborder notre problème. Le point clé est le caractère hamiltonien des EDP concernées. Nous créons un modèle différentiel abstrait (qui comprend l'EDP étudiée) et l'on y démontre l'existence de formes normales de Birkhoff à tout ordre, c'est-à-dire des renormalisations adéquates de l'hamiltonien qui en l'occurrence impliquent la stabilité.

Mots clés :

Equations aux dérivées partielles de type Schrödinger non linéaires, Système hamiltonien, Potentiel confinant, Forme normale de Birkhoff, Stabilité sur temps long

English : This thesis is concerned by stability of solutions of some non linear Schroedinger partial differential equations (PDE) on $\mathbb{R}^n$ with a confining potential and a regular initial condition. Two potentials are studied : the harmonic oscillator multidimensional and the polynomial confining potential unidimensional. In our context, the stability means roughly the following : the solution exists on a time-interval whose length depends polynomially on the smallness of the initial condition (almost global existence) and stays near the solution of an explicit completely integrable equation with the same initial condition. We use the Birkhoff's normal forms theory to handle our issue. The key point is the Hamiltonian structure of our PDE. We create an abstract differential model (which encompasses our PDE) and prove that it has a Birkhoff's normal form of all order, ie a proper renormalization of the Hamiltonian which ensures in particular the stability.

Keywords :

Nonlinear Schroedinger Partial differential equation, Confining potential, Hamiltonian system, Birkhoff's normal form, Stability on long time