Soutenance de Thèse

Rafik Imekraz

Étude dynamique de quelques équations aux dérivées partielles hamiltoniennes non linéaires à potentiel confinant

Rafik Imekraz

Soutenance de thèse en vue d'obtenir le grade
de docteur de Mathématiques de l'Université de Nantes
sous la direction de Benoît Grébert

Sommaire

Les équations en jeu

- Étude des solutions des EDP de type Schrödinger :

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi(t,x) &= (-\Delta + V)\Psi(t,x) \pm \lambda |\Psi(t,x)|^3 \Psi(t,x) \\ (t,x) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \end{cases}$$

- origine : mécanique quantique, théorie des propagations d'un faisceau laser,...

Les problématiques

- Existence locale
- Temps d'existence en fonction de la condition initiale
- Estimations des normes des solutions

Perturbation et Hamiltonien

$$i\partial_t\Psi = (-\Delta + V)\Psi + \partial_2 g(\Psi, \overline{\Psi})$$

- $V \geq 0, \qquad \lim_{+\infty} V = +\infty$
- $g(z_1, z_2) = \sum_{k+\ell\geq 3} a_{k,\ell} z_1^k z_2^\ell, \qquad g(z, \overline{z}) \in \mathbb{R}$
- remarque : EDP hamiltonienne

$$H(\Psi) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\Psi|^2 + |\Psi\sqrt{V}|^2 + g(\Psi, \overline{\Psi})dx$$

Les espaces de Sobolev naturels

$$i\partial_t \Psi = (-\Delta + V)\Psi + \partial_2 g(\Psi, \overline{\Psi})$$

- $$\begin{aligned} \widehat{H}^s(\mathbb{R}^d) &= \mathrm{Dom}((-\Delta + V)^{s/2}) \\ &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^d), ||V^{s/2} f||_{L^2} + ||f||_{H^s} < +\infty\} \end{aligned}$$
- Valeurs, modes propres : $(-\Delta + V)\phi_j = \lambda_j \phi_j$

$$\sum_{j \geq 1} z_j \phi_j \in \widehat{H}^s(\mathbb{R}^d) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_j \lambda_j^s |z_j|^2 < +\infty$$

Les pseudo-actions

- $(\lambda_k^\star)_{k\geq 1}$ suite croissante des vp sans multiplicités
- $J_k\left(\sum_{j\geq 1} z_j\phi_j\right) = \displaystyle\sum_{\lambda_j=\lambda_k^\star} |z_j|^2$
- en dimension $d=1$, valeurs propres de $-\frac{d}{dx^2}+V(x)$ sont simples donc

$$J_k = |z_k|^2$$

La propriété de stabilité

$$i\partial_t \Psi = (-\Delta + V + M)\Psi + \partial_2 g(\Psi, \overline{\Psi})$$

- Propriété (S) : pour M perturbation typique, $r \geq 3$, $s \geq s_0(r)$ et $\epsilon = ||\psi_0||_{\widehat{H}^s} \ll 1$, l'EDP admet une unique solution dans l'espace $\mathcal{C}^0([-\epsilon^{-r}, \epsilon^{-r}], \widehat{H}^s)$

$$\sup_{|t| \leq \epsilon^{-r}} ||\Psi(t, \cdot)||_{\widehat{H}^s} \leq 2\epsilon$$

$$\Psi(t, x) = \sum_{j \geq 1} z_j(t)\phi_j(x)$$

$$\sup_{|t| \leq \epsilon^{-r}} \sum_{k \geq 1} \lambda_k^{\star s} |J_k(t) - J_k(0)| \leq C\epsilon^3$$

La propriété de stabilité, dimension 1

Si $d = 1$, alors on a

$$\sup_{|t| \leq \epsilon^{-r}} \sum_{k \geq 1} \lambda_k^s \left| |z_k(t)|^2 - |z_k(0)|^2 \right| \leq C\epsilon^3$$

Autrement dit, $\Psi(t, x)$ reste près du tore

$$\left\{ \sum_{j \geq 1} \xi_j \phi_j \in \widehat{H}^s, \quad \forall j \quad |\xi_j| = |z_j(0)| \right\}$$

quand $|t| \leq \epsilon^{-r}$.

Résultats de la thèse

$$i\partial_t \Psi = (-\Delta + V + M)\Psi + \partial_2 g(\Psi, \overline{\Psi})$$

Théorème (Grébert-Imekraz-Paturel)

(1) La propriété (S) est vraie pour $V(x) = ||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_d^2$.

Théorème (Imekraz)

(2) La propriété (S) est vraie pour $d = 1$ *et* $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est un polynôme positif de degré* ≥ 2, *typiquement* $V(x) = x^{2p}$.

Contexte des formes normales de Birkhoff

- NLS sur le tore $\mathbb{T}^d$ (2004, Bambusi-Grébert)

$$-i\partial_t u = -\Delta u + V \star u + g(u, \overline{u})$$

- Cadre unique pour NLS et NLW sur S^1 (2006, Bambusi-Grébert)
- Équation de Klein-Gordon sur une variété de Zoll (2007, Bambusi-Delort-Grébert-Szeftel)

$$(\partial_t^2 - \Delta + V + m^2)v = -\partial_2 f(x, v)$$

- Approche numérique et théorique (2009, Faou-Grébert-Paturel)

Forme hamiltonienne discrète

Idée : transférer l'EDP de $\Psi = \sum_j z_j \phi_j$ en un système hamiltonien discret sur les coordonnées z_j
Dimension $d = 1$ pour alléger les notations.

$$\begin{aligned}
\ell_s(\mathbb{Z}^\star) &= \left\{ (z_j)_{j\neq 0}, ||z|||_s := \sum_j |z_j|^2 |j|^s < +\infty \right\} \\
H_0(z) &= \sum_{j\geq 1} (\lambda_j + m_j) z_j z_{-j} \\
P(z) &= \int_{\mathbb{R}} g\left(\sum_{j\geq 1} z_j \phi_j, \sum_{j\leq -1} z_j \phi_j \right) dx
\end{aligned}$$

$\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ est un espace symplectique pour

$$\omega(z,\xi) = i \sum_{j\geq} z_j \xi_{-j} - z_{-j}\xi_j$$

$$i\partial_t \Psi = (-\Delta + V + M)\Psi + \partial_2 g(\Psi, \overline{\Psi})$$

M est un opérateur compact typique simultanément diagonalisable avec $-\Delta + V$:

$$M\phi_j = m_j \phi_j$$

On pose $\Psi(t) = \sum_{j\geq 1} z_j \phi_j$ et $z_{-j} = \overline{z_j}$, l'EDP devient

$$z'(t) = iX_{H_0+P}(z(t))$$

Hamiltonien $H = H_0 + P$

Existence locale

$$z'(t) = iX_{H_0+P}(z(t)) = iX_{H_0}(z(t)) + iX_P(z(t))$$

H_0 quadratique $\Rightarrow X_{H_0}$ linéaire
Reformulation de Duhamel

$$z(t) = \exp(itX_{H_0})z(0) + \int_0^t \exp(i(t-t')X_{H_0})iX_P(z(t'))dt'$$

Théorème du point fixe dans $\mathcal{C}^0([-\delta,\delta], B_f(z(0),\epsilon))$
Point crucial : X_P est à valeurs dans $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$

Polynôme en forme normale

Définition

Une fonction analytique $f : \ell_s(\mathbb{Z}^\star) \to \mathbb{C}$ est en forme normale si ses polynômes de Taylor sont pairs et de la forme

$$f_{2m}(z) = \sum_{j_1, \cdots, j_m} a_j I_{j_1} \cdots I_{j_m}$$

avec l'action $I_j = z_j z_{-j}$

Intérêt : si f, g sont en forme normale alors $\{f, g\} = 0$, en particulier $\{f, H_0\} = 0$.

Forme normale de Birkhoff d'ordre r

Idée maîtresse pour prouver la propriété (S) :
si $r \geq 3$, on construit ψ une transformation symplectique d'un voisinage de $0 \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ telle que

- $\psi(0) = 0$
- $||\psi(z) - z||_s + ||\psi^{-1}(z) - z||_s \leq C_s ||z||_s^2$ pour $s \gg 1$
- $(H_0 + P)(\psi(z)) = (H_0 + Z + R)(z)$
- Z est en forme normale
- R vérifie $||X_R(z)||_s \leq C_s ||z||_s^{r+2}$

Forme normale et propriété (S)

On pose $\xi(t) = \psi^{-1}(z(t)) \in \ell_s(\mathbb{Z}^\star)$

$$z'(t) = iX_{H_0+P}(z(t)) \quad \Rightarrow \quad \xi'(t) = iX_{H_0+Z+R}(\xi(t))$$

Puis $N(\xi(t)) = ||\xi(t)||_s^2 = \sum_{j\geq 1} \lambda_j^s I_j(\xi(t))$
N est en forme normale, donc

$$\frac{d}{dt}N(\xi(t)) = \{N, H_0 + Z + R\}(\xi(t)) = \{N, R\}(\xi(t))$$

Intérêt du symplectisme : le terme Z n'influence pas la variation des quantités observées

Forme normale et propriété (S)

$$\left|\frac{d}{dt}N(\xi(t))\right| \leq C_s||\xi(t)||_s^{r+3}$$

Argument de type Bootstrap $||\xi(t)||_s \leq 2||\xi(0)||_s$ pour $|t| \leq C\epsilon^{-r}$.

On revient à $z(t)$ car ψ est proche de Id.

Le modèle abstrait

Pour tout k, $\mathcal{T}_k^+ \subset \mathcal{T}_k$ sont des espaces de polynômes de degré k sur $\ell_s(\mathbb{Z}^\star)$ tels que

i) le k-ième polynôme de Taylor de P appartient à $\mathcal{T}_k$
ii) $\mathcal{P} \in \mathcal{T}_k \quad \Rightarrow \quad ||\mathcal{P}(z)||_s \leq C||z||_s^k$ pour $1 \ll s$
iii) $\mathcal{P} \in \mathcal{T}_k^+ \quad \Rightarrow \quad ||X_{\mathcal{P}}(z)||_s \leq C||z||_s^{k-1}$ pour $1 \ll s$
iv) $\mathcal{P} \in \mathcal{T}_k$ en forme normale $\Rightarrow \quad ||X_{\mathcal{P}}(z)||_s \leq C||z||_s^{k-1}$ pour $1 \ll s$
v) $\{\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_\ell^+\} \subset \mathcal{T}_{k+\ell-2}$
vi) $\mathcal{P} \in \mathcal{T}_k \quad \Rightarrow \quad \exists \chi \in \mathcal{T}_k^+ \quad \{H_0, \chi\} + \mathcal{P}$ est en forme normale

Construction de la forme normale 1/3

$$i\partial_t \Psi = (-\Delta + V + M)\Psi \pm |\Psi|^2 \Psi$$

$$g(w_1, w_2) = \pm 2 w_1^2 w_2^2$$

$$P(z) = \int_{\mathbb{R}} g\left(\sum_{j\geq 1} z_j \phi_j, \sum_{j \geq -1} z_j \phi_j\right) dx \in \mathcal{T}^4$$

$H_0 + P = H_0 + Z + R$ est déjà une forme normale d'ordre 4

$$Z = 0, \quad R = P, \qquad ||X_R(z)||_s \leq C||z||_s^3$$

Pour augmenter l'ordre, on construit $\chi \in \mathcal{T}_4^+$ tel que

$$\boxed{Z = \{H_0, \chi\} + P}$$

Construction de la forme normale 2/3

Puis on considère le flot symplectique

$$\frac{d}{dt}\Phi^t(z) = X_\chi(\Phi^t)(z), \qquad \Phi^0(z) = z$$

Comme χ homogène de degré ≥ 2, si $||z||_s \ll 1$ alors $\psi = \Phi^1$ est défini. En outre ψ est une transformation symplectique et Φ^1 proche de l'identité.

Construction de la forme normale 3/3

Comme $Z = \{H_0, \chi\} + P$, on obtient

$$(H_0+P)\circ\psi = [H_0+Z] + \underbrace{[H_0\circ\psi - \{H_0,\chi\} - H_0] + [P\circ\psi - P]}_{R}$$

La formule de Taylor à $H_0 \circ \Phi^t(z)$ entre $t = 0$ et $t = 1$:

$$H_0\circ\psi(z) =$$
$$H_0(z) + \{H_0,\chi\}(z) + \int_0^1 (1-t')\{\{H_0,\chi\},\chi\}\circ\Phi^{t'}(z)dt'$$
$$H_0(z) + \{H_0,\chi\}(z) + \int_0^1 (1-t')\{Z-P,\chi\}\circ\Phi^{t'}(z)dt'$$

Or

$$\deg\{Z-P,\chi\} = \deg(Z-P)+\deg(\chi)-2 = 4+4-2 = 6 \geq 5$$

Résumé de la méthode

i) $i\partial_t \Psi = (-\Delta + V + M)\Psi + \partial_2 g(\Psi, \overline{\Psi})$

ii) $\Psi(t,x) = \sum_j z_j(t)\phi_j(x)$

iii) $z'(t) = iX_{H_0+P}(z(t))$

iv) $H_0 + P \longrightarrow H_0 + Z + R$

Classes de polynômes $\mathcal{T}^k, \mathcal{T}^{k+}$

\+ Opérateur typique $M \Rightarrow$ Résolution de l'équation homologique

$$\{H_0, \chi\} + P = Z$$

Classe de perturbations

$$g(z_1, z_2) = \sum_{k\geq 3} \sum_{\ell=0}^{k} a_{\ell,\ell-k} z_1^{\ell} z_2^{k-\ell}$$

$$P(z) = \int_{\mathbb{R}} g\left(\sum_{j\geq 1} z_j \phi_j(x), \sum_{j\geq 1} z_{-j}\phi_j(x)\right) = \sum_{k\geq 3} P_k(z)$$

$$P_k = \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{j\in\mathbb{N}^{\star k}} z_{j_1}\cdots z_{j_\ell} z_{-j_{\ell+1}} \cdots z_{-j_k} a_{\ell,k-\ell} \int_{\mathbb{R}} \phi_{|j_1|}\cdots\phi_{|j_\ell|} dx \in \mathcal{T}^k$$

Les classes de perturbations $\mathcal{T}^k$ et $\mathcal{T}^{k+}$ se définissent à partir d'estimations des intégrale-produits des modes propres !

Estimations des intégrale-produits

exemple de l'oscillateur harmonique, $\forall N \geq 1$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \phi_{j_1}(x) \cdots \phi_{j_k}(x) dx \right| \leq C_N \frac{j_3^{\star \nu}}{j_1^{\star \beta}} \left(\frac{\sqrt{j_2^\star j_3^\star}}{\sqrt{j_2^\star j_3^\star} + j_1^\star - j_2^\star} \right)^N$$

$$j_1^\star \geq \cdots \geq j_k^\star$$

Comparaison spectrale

	$-d^2/dx^2 + x^2$	$-d^2/dx^2 + x^{2p}$
$\lambda_j =$	$2j-1$ Classique	$j^{2p/(p+1)} + \cdots + j^{1/(p+1)} + o(1)$ (Helffer-Robert,1982)
$\lvert\lvert\phi_j\rvert\rvert_\infty$	$\leq \frac{C}{j^{1/12}}$	$\lim_j = +\infty$

Remarques :

- $1 < \frac{2p}{p+1} < 2$
- le théorème de Helffer-Robert précise la formule de Weyl

Théorème (Yajima-Zhang,2001)

Pour $V(x) = x^{2p}$ avec $p \geq 2$, soit $r \in [2, \infty]$, $\exists \sigma(r,p) \geq \frac{-1}{8p}$ tel que

$$||\phi_j||_{L^r} \simeq j^{\sigma(r,p)}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} 2 \leq r \leq \frac{4p-2}{p-2} & \Rightarrow & \sigma(r,p) \leq 0 \\ \frac{4p-2}{p-2} \leq r \leq +\infty & \Rightarrow & \sigma(r,p) \geq 0 \end{array}$$

Un détail technique, mais quand même

Compensation technique dans la stabilité par crochet de Poisson

$$\{\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_{\ell+}\} \subset \mathcal{T}_{k+\ell-2}$$

Dans le cas harmonique, on a

$$(\lambda_j)_j \text{ croît lentement} \qquad \sum \frac{1}{j^{1/12}\lambda_j} < +\infty$$

Dans le cas $V(x) = x^{2p}$, $p \geq 2$, on a

$$(\lambda_j)_j \text{ croît rapidement} \qquad \sum \frac{1}{\lambda_j} < +\infty$$

Résolution de l'équation homologique 1/5

$$\boxed{\forall P \in \mathcal{T}^k \quad \exists \chi \in \mathcal{T}^{k+} \qquad \{H_0, \chi\} + P = Z}$$

$$H_0 = \sum_{j \geq 1} \omega_j z_j z_{-j}, \qquad \omega_j = \lambda_j + m_j$$

$$P = \sum_{j_1, \cdots, j_k \in \mathbb{Z}^\star} p(j_1, \cdots, j_k) z_{j_1} \cdots z_{j_k}$$

$$\chi = \sum_{j_1, \cdots, j_k \in \mathbb{Z}^\star} c(j_1, \cdots, j_k) z_{j_1} \cdots z_{j_k}$$

$$\{H_0, \chi\} = \sum_{j_1, \cdots, j_k} \left[\sum_{\ell=1}^{k} sg(j_\ell) \omega_{|j_\ell|} \right] c(j_1, \cdots, j_k) z_{j_1} \cdots z_{j_k}$$

Résolution de l'équation homologique 2/5

On va choisir $(m_j)_{j\geq 1}$ générique de sorte que

$$\sum_{\ell=1}^{k} sg(j_\ell)\omega_{|j_\ell|} = 0 \Rightarrow (j_1, \cdots, j_k) \quad \text{trivial}$$

$$k = 2K, \quad (j_1, \cdots, j_k) \simeq (N_1, -N_1, \cdots, N_K, -N_K)$$

Par suite, on peut poser

$$\begin{aligned} \sum sg(j_\ell)\omega_{|j_\ell|} \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad c(j_1, \cdots, j_k) = \frac{-p(j_1, \cdots, j_k)}{\sum sg(\ell)\omega_{j_l}} \\ \sum sg(j_\ell)\omega_{|j_\ell|} = 0 \quad &\Rightarrow \quad c(j_1, \cdots, j_k) = 0 \end{aligned}$$

χ est déterminé, il reste Z :

$$Z = \sum_{\sum sg(j_\ell)\omega_{|j_\ell|} = 0} -p(j_1, \cdots, j_k) z_{j_1} \cdots z_{j_k}$$

Résolution de l'équation homologique 3/5

Analogie avec les nombres diophantiens

Définition

La suite $(\omega_j)_{j\geq 1}$ *est non résonante si* $\forall k \geq 3$ *il existe* $\gamma(k), \delta(k) > 0$

$$|\omega_{j_1} + \cdots + \omega_{j_r} - \omega_{j_{r+1}} - \cdots - \omega_{j_k}| \geq \frac{1 + \lambda_{j_1^\star} - \lambda_{j_2^\star}}{\gamma |j_3^\star|^\delta}$$

sauf si $\{j_1, \cdots, j_r\} = \{j_{r+1}, \cdots, j_k\}$.

Résolution de l'équation homologique 4/5

Proposition

Pour presque toute suite (m'_j) à valeurs dans $[-1/2, 1/2]$ et pour tout $k \geq 1$, la suite de terme général $\omega_j = \lambda_j + \frac{m'_j}{j^k}$ est non résonante

Démonstration technique, points importants :

- $C^{-1} j^e \leq \lambda_j \leq C j^e$
- l'ensemble $\Delta = \{\lambda_j - \lambda_k ; j, k \geq 1\}$ vérifie

$$\exists \sigma > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad \mathrm{Card}(\Delta \cap [0, t]) \leq C t^\sigma$$

Résolution de l'équation homologique 5/5

$$\chi = \sum_{\sum sg(j_\ell)\omega_{|j_\ell|} \neq 0} \frac{-p(j_1, \cdots, j_k)}{\sum sg(j_\ell)\omega_{|j_\ell|}} z_{j_1} \cdots z_{j_k}$$

On a

$$\left| \frac{-p(j_1, \cdots, j_k)}{\sum sg(j_\ell)\omega_{|j_\ell|}} \right| \leq \frac{\gamma |j_3^\star|^\delta |p(j_1, \cdots, j_k)|}{1 + \lambda_{|j_1^\star|} - \lambda_{|j_2^\star|}}$$

Gain de l'équation homologique

Dimension supérieure

- Oscillateur harmonique

$$-\Delta + ||x||^2 = \sum_{i=1}^{d} -\frac{d}{dx_i} + x_i^2$$

Spectre inclus dans $\mathbb{N}$.

- Pour $-\Delta + V(x_1, \cdots, x_d)$. Obstruction car mauvaise connaissance du comportement asymptotique du spectre, valeur propres multiples, a priori aucune séparation des valeurs propres.

Je vous remercie de votre attention.