Existence en temps grand pour des équations de Klein-Gordon à petite donnée initiale sur une structure de Toeplitz

Rafik Imekraz

Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de Mathématiques AGM

2, avenue Adolphe Chauvin 95302 Cergy-Pontoise Cedex France

url : http://perso.crans.org/imekraz

mél : rafik.imekraz@univ-nantes.fr

Résumé. Pour des non-linéarités qui rendent hamiltonienne l'équation de Klein-Gordon, nous obtenons un temps d'existence de l'ordre de $C(r)\varepsilon^{-r}$, pour tout $r \geq 3$, lorsque la condition initiale est de norme $\varepsilon \ll 1$ dans un espace de Sobolev de grand indice. Les variétés étudiées sont munies de structures de Toeplitz au sens de Boutet de Monvel et Guillemin, nous ferons une hypothèse de nature géométrique sur la périodicité du flot hamiltonien des opérateurs pseudo-différentiels de Toeplitz sous-jacents, cela permettra d'avoir une localisation spectrale utile dans notre démarche. La méthode employée suit les travaux de Delort-Szeftel et de Bambusi-Delort-Grebert-Szeftel sur les sphères et les variétés de Zoll et consiste à effectuer des formes normales de Birkhoff à tout ordre. Le cadre des structures de Toeplitz nous permet de couvrir tous les cas précédemment étudiés (cercle, sphères et variétés de Zoll) mais aussi de nouvelles non-linéarités qui font intervenir des projecteurs de Szegö.

Abstract. We prove a long time existence, of order $C(r)\varepsilon^{-r}$ for all $r \geq 3$, for small solutions, of order $\varepsilon \ll 1$, in high Sobolev norms of Klein-Gordon equation with Hamiltonian nonlinearities. Manifolds studied are endowed with Toeplitz structures in the sense of Boutet de Monvel and Guillemin. We also make a geometric assumption about periodicity of the Toeplitz pseudo-differential operator Hamiltonian flow. This ensures a useful spectral localization. Our approach follows Delort-Szeftel and Bambusi-Delort-Grebert-Szeftel's works on the spheres and Zoll manifolds and uses Birkhoff normal forms at any order. The context of Toeplitz structures allows us to generalize all the previous case (torus, spheres and Zoll manifolds) and to deal with new linearities involving Szegö projectors.

Table des matières

1 Introduction **2**

1.1 Enoncé des résultats . . . 2
1.2 Exemples . . . 4
1.3 Contexte du théorème . . . 6

2 Analyse spectrale **8**

2.1 Rappels sur les opérateurs pseudo-différentiels de Toeplitz . . . 8
2.2 Opérateur pseudo-différentiel de Toeplitz auto-conjugué . . . 10
2.3 Contrôle des intégrales-produits des modes propres . . . 11
2.4 Propriété de Delort-Szeftel . . . 12

3 Mise sous forme normale **12**

3.1 Formalisme hamiltonien . . . 12
3.2 Modèle abstrait . . . 15
3.3 Conclusion à partir de la mise en forme normale . . . 17

4 Démonstration du théorème principal **20**

4.1 Régularité des formes multilinéaires . . . 20
4.2 Inversion des petits diviseurs . . . 23
4.3 Résolution de l'équation homologique . . . 29
4.4 Considérations sur les crochets de Poisson . . . 34
4.5 Démonstration du théorème 3.2.10 de forme normale . . . 36

1 Introduction

1.1 Enoncé des résultats

Soit X une variété compacte, on la munit d'une mesure Lebesguienne dx, on considère un sous-cône symplectique fermé Σ de $T^\star X\backslash\{0\}$, c'est-à-dire de $T^\star X$ privé de sa section nulle, autrement dit

- si $(x,\xi^\star)\in\Sigma$ alors $(x,t\xi^\star)\in\Sigma$ pour tout $t>0$
- la forme symplectique canonique de $T^\star X\backslash\{0\}$ induit une forme symplectique sur Σ

Nous noterons $\pi : L^2(X,\mathbb{C})\to L^2(X,\mathbb{C})$ un projecteur orthogonal de Szegö associé à Σ au sens de Boutet de Monvel et Guillemin [BdMG81, paragraphe 2], nous rappellerons les définitions précises à la partie 2 mais signalons d'ores et déjà les deux exemples les plus simples :

i) pour X quelconque et $\Sigma=T^\star X\backslash\{0\}$, le choix $\pi=\mathrm{Id}$ convient

ii) pour $X=S^{2d-1}$ la sphère unité de $\mathbb{C}^d$ il existe $\Sigma\subset T^\star X\backslash\{0\}$ de sorte que π puisse être choisi comme l'usuel projecteur de Szegö d'analyse harmonique sur les fonctions prolongeables holomorphiquement sur la boule unité de $\mathbb{C}^d$

L'opérateur π envoie l'espace $\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C})$ dans lui-même. Le triplet (X,Σ,π) sera appelé une structure de Toeplitz. Un opérateur pseudo-différentiel de Toeplitz sur (X,Σ,π) est un opérateur de la forme $\pi\circ Q\circ\pi$ où Q est un opérateur pseudo-différentiel classique sur X. Ainsi, $\pi\circ Q\circ\pi$ envoie $\pi(\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C}))$ dans lui-même. Le symbole principal de $T=\pi\circ Q\circ\pi$, noté $\sigma(T)$, est la restriction du symbole principal de Q à Σ, il s'avère indépendant du représentant Q. Dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels de Toeplitz le cône symplectique Σ joue le même rôle que le fibré cotangent $T^\star X$ dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels classiques sur X. La structure symplectique de Σ héritée de $T^\star X$ permet de considérer les bicaractéristiques de T, c'est-à-dire les trajectoires du flot du gradient symplectique de $\sigma(T)$. La chaîne d'espaces de Sobolev naturellement associée à la structure de Toeplitz (X,Σ,π) est $(H^s(X,\mathbb{C})\cap \mathrm{Im}\pi)_{s\in\mathbb{R}}$, on notera $H^s_\pi(X,\mathbb{C})=H^s(X,\mathbb{C})\cap\mathrm{Im}\pi\subset H^s(X,\mathbb{C})$. Dans ce qui suit, l'opérateur $\partial_{\overline{v}}$: $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C},\mathbb{C})\to\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C},\mathbb{C})$ est l'usuel opérateur de dérivation sur la partie anti-holomorphe :

$$\forall f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C},\mathbb{C})\quad \forall v,h\in\mathbb{C}\quad d_vf(h)=h\partial_vf+\overline{h}\partial_{\overline{v}}f \tag{1}$$

Notre principal résultat est le théorème d'existence presque globale suivant

Théorème 1.1.1. *Sur la structure de Toeplitz (X,Σ,π), nous considérons un opérateur pseudo-différentiel de Toeplitz T d'ordre 1, auto-adjoint et elliptique. Nous ferons en outre les hypothèses suivantes :*

i) les bicaractéristiques du symbole principal de T sur Σ sont simplement périodiques de même période

ii) la fonction qui à une bicaractéristique $\mathcal{C}\subset\Sigma$ de T associe la moyenne sur $\mathcal{C}$ du sous-symbole principal de T est constante

iii) T est auto-conjugué (voir la définition 2.2.1)

Fixons $f:(x,v)\in X\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui admet l'origine $v=0$ comme zéro d'ordre ≥ 3 uniformément en x. L'équation de Klein-Gordon sur la structure de Toeplitz (X,Σ,π) est l'équation non linéaire suivante :

$$(\partial_t^2+T^2+m^2)v(t,x)=\pi(\partial_{\overline{v}}f(x,v(t,x))),\qquad (t,x)\in\mathbb{R}\times X \tag{2}$$

avec condition initiale

$$(v(0,\cdot),\partial_tv(0,\cdot))=(\varepsilon v_0,\varepsilon v_1)\in H^s_\pi(X,\mathbb{C})\oplus H^{s-1}_\pi(X,\mathbb{C}),\qquad ||v_0||_{H^s}+||v_1||_{H^{s-1}}=1$$

Pour presque tout paramètre $m>0$ (au sens de Lebesgue), pour tout entier $r\geq 1$, pour tout entier s assez grand, il existe $C>0,K\geq 1$ tels que si $0<\varepsilon\ll 1$ alors l'équation (2) admet une unique solution

$$v\in\mathcal{C}^0([-C\varepsilon^{-r},C\varepsilon^{-r}],H^s_\pi(X,\mathbb{C}))\cap\mathcal{C}^1([-C\varepsilon^{-r},C\varepsilon^{-r}],H^{s-1}_\pi(X,\mathbb{C}))$$

vérifiant $||v(t,\cdot)||_{H^s}+||\partial_tv(t,\cdot)||_{H^{s-1}}\leq K\varepsilon$ pour tout temps $|t|\leq C\varepsilon^{-r}$.

Remarque 1.1.2. *L'hypothèse ii) est automatiquement satisfaite si le sous-symbole principal de T est constant. Nous ignorons si l'hypothèse d'auto-conjugaison iii) est vraiment nécessaire, nous l'avons introduite car il nous est apparu qu'elle est vérifiée dans les exemples qui vont suivre et intervient dans notre preuve du contrôle multilinéaire des modes propres de T (voir partie 2.3).*

Remarque 1.1.3. *Comme nous le verrons à la proposition 3.3.3, la méthode de réduction par forme normale donne des informations dynamiques supplémentaires.*

1.2 Exemples

Pour simplifier, on choisira dans la non-linéarité de nos exemples la fonction $f(x,v) = \frac{1}{2}a(x)|v|^4$ avec $a \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$. Ainsi nous avons

$$\partial_{\overline{v}}\left(\frac{1}{2}a(x)|v|^4\right) = \partial_{\overline{v}}\left(\frac{1}{2}a(x)v^2\overline{v}^2\right) = a(x)v^2\overline{v} = a(x)|v|^2 v$$

a) Considérons une variété compacte X munie d'une métrique riemannienne g, un potentiel $V \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R}^+)$ et $T = \sqrt{-\Delta_g + V(x)}$ l'opérateur pseudo-différentiel racine carrée de $-\Delta_g + V(x)$. Le symbole principal de T est $\sqrt{-\Delta_g}$ et son sous-symbole principal est nul. Le triplet $(X, T^\star X \backslash \{0\}, \mathrm{Id})$ constitue une structure de Toeplitz dont les opérateurs pseudo-différentiels de Toeplitz associés sont les opérateurs pseudo-différentiels classiques de X. Dans le théorème 1.1.1, l'hypothèse ii) est automatique. Pour examiner l'hypothèse i), il s'agit de se rappeler que les bicaractéristiques de $\sqrt{-\Delta_g}$ correspondent précisément aux géodésiques de (X,g). Ainsi, l'hypothèse i) équivaut au fait que (X,g) appartient à la famille des variétés de Zoll, par exemple des sphères, des espaces projectifs ou encore des sphères munies de certaines métriques exotiques (voir [Bes78]). L'équation de Klein-Gordon (2) est alors l'équation de Klein-Gordon sur la variété riemannienne (X,g) avec potentiel V :

$$(\partial_t^2 - \Delta_g + V(x) + m^2)v = a(x)|v|^2 v$$

Remarquons que si les conditions initiales sont à valeurs réelles, alors $v(x,t)$ reste à valeurs réelles, et la non-linéarité est $a(x)v^3$. Dans ce cas, la conclusion du théorème 1.1.1 est celle de [BDGS07, Theorem 2.2]. Sur le tore $\mathbb{T}$, cela correspond au résultat [BG06, Theorem 3.16].

b) Décrivons à présent une équation de Klein-Gordon basée sur un exemple classique dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels de Toeplitz (voir [BdM78] ou [BdMG81], p4 et p108) et aussi en analyse harmonique (voir l'opérateur $\mathcal{R}$ de [Rud80], 6.4.4). Sur la sphère impaire $X = S^{2n-1}$, on définit la 1-forme différentielle α (qui s'avère être une forme de contact) et le sous-cône symplectique $\Sigma \subset T^\star S^{2n-1}$:

$$\forall x \in \partial S^{2n-1} \quad \forall h \in T_x S^{2n-1} \quad \alpha_x(h) = \mathrm{Im}\left(\sum_{i=1}^n \overline{x_i} h_i\right)$$

$$\Sigma = \{(x, t\alpha_x) \in T^\star S^{2n-1}, \quad (x,t) \in X \times]0, +\infty[\}, \quad \dim \Sigma = 2n - 1 + 1 = 2n$$

On définit le projecteur orthogonal $\pi : L^2(S^{2n-1}, \mathbb{C}) \to L^2(S^{2n-1}, \mathbb{C})$ dont l'image est le sous-espace fermé engendré par les fonctions qui se prolongent holomorphiquement sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire l'espace de Hardy de la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Le groupe S^1 agit naturellement sur S^{2n-1} par

$$(\theta, x) \in \mathbb{R} \times S^{2n-1} \mapsto e^{i\theta} x \in S^{2n-1}$$

On peut donc examiner le semi-groupe fortement continu sur $L^2(S^{2n-1}, \mathbb{C})$ donné par

$$U_\theta : f(x) \in L^2(S^{2n-1}, \mathbb{C}) \mapsto f(xe^{i\theta}) \in L^2(S^{2n-1}, \mathbb{C})$$

Le générateur infinitésimal du semi-groupe $(U_\theta)_\theta$, noté ∂_θ, est défini par

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(S^{2n-1}, \mathbb{C}) \quad \partial_\theta f = \lim_{\theta \to 0} \frac{U_\theta - \mathrm{Id}}{\theta} f$$

Comme $f(xe^{i\theta}) = f(x + i\theta x + o(\theta))$, on obtient la formule $\partial_\theta f(x) = d_x f(ix)$ (remarquons que $ix \in T_x S^{2n-1}$). On vérifie facilement que ∂_θ est anti-autoadjoint. Le comportement de ∂_θ est particulièrement simple sur $\mathrm{Im}(\pi)$:

$$\partial_\theta f = \sum_{j=1}^{n} i z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}$$

et il apparaît que π et ∂_θ commutent. L'opérateur différentiel $-i\partial_\theta$ admet pour symbole

$$\forall (x, \xi^\star) \in \Sigma \quad \sigma(-i\partial_\theta)(x, \xi^\star) = \xi^\star(ix)$$

La définition de Σ permet de vérifier que l'opérateur auto-adjoint $-i\partial_\theta$ est d'ordre 1 et elliptique :

$$\sigma(-i\partial_\theta)(x, t\alpha_x) = t\alpha_x(ix) = t\mathrm{Im}\left(i \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} x_j \right) = t > 0$$

L'équation de Klein-Gordon sur la structure de Toeplitz (X, Σ, π) est alors

$$(\partial_t^2 - \partial_\theta^2 + m^2) v = \pi(a(x)|v|^2 v)$$

On peut montrer que l'opérateur $-i\partial_\theta$ admet pour spectre $\mathbb{N}$ et que ses modes propres sont les restrictions sur la sphère S^{2n-1} des monômes homogènes :

$$-i\partial_\theta(z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}) = (k_1 + \cdots + k_n) z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \tag{3}$$

Les bicaractéristiques de $-i\partial_\theta$ sur la variété symplectique Σ sont périodiques.

c) Voici un exemple obtenu en mélangeant les deux précédents. Considérons la sphère S^{2n-1} munie de sa structure riemannienne habituelle et notons a$\Delta_{S^{2n-1}}$ son opérateur de Laplace-Beltrami, nous conservons la structure de Toeplitz sur S^{2n-1} définie à l'exemple b). Les restrictions à S^{2n-1} des fonctions monômes $z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$, avec $(k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, constituent une base orthonormée de l'espace de Hardy $\mathrm{Im}(\pi)$, mais ils sont aussi propres pour $\Delta_{S^{2n-1}}$ car $\Delta_{\mathbb{R}^{2n}}(z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}) = 0$, nous avons précisément

$$\sqrt{-\Delta_{S^{2n-1}}}\, z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n} = \sqrt{\left(\sum_{\ell=1}^{n} k_\ell\right)\left(2n-2+\sum_{\ell=1}^{n} k_\ell\right)}\, z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n} \tag{4}$$

Les espaces de Sobolev de la structure de Toeplitz de S^{2n-1} apparaissent :

$$\begin{aligned} H^s_\pi(S^{2n-1}) &= \mathrm{Im}(\pi)\cap H^s(S^{2n-1}) = \mathrm{Im}(\pi)\cap \mathrm{Dom}((-\Delta_{S^{2n-1}})^{s/2}) \\ &= \left\{ \sum_{k_1,\dots,k_n\geq 0} c_k z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}, \qquad \sum_{k_1,\dots,k_n\geq 0} (k_1+\cdots+k_n)^s |c_k|^2 < +\infty \right\} \end{aligned}$$

La formule (4) assure que l'opérateur pseudo-différentiel de Toeplitz $\pi\circ\sqrt{-\Delta_{S^{2n-1}}}\circ\pi$ égale $\sqrt{-\Delta_{S^{2n-1}}}\circ\pi$ et cela nous conduit à l'équation de Klein-Gordon :

$$(\partial_t^2 - \Delta_{S^{2n-1}} + m^2)v = \pi(a(x)|v|^2 v)$$

1.3 Contexte du théorème

Le théorème 1.1.1 s'inscrit dans une lignée de travaux précédents qui étudient la même question : étant donnée une certaine équation aux dérivées partielles non-linéaire (ondes ou Schrödinger par exemple), est-il possible d'obtenir des informations sur de long temps des normes de Sobolev H^s des solutions avec $s \gg 1$? Bien entendu, on cherche à aller plus loin que le temps d'existence locale obtenu par un argument de point fixe avec la formule de Duhamel. Permettons-nous de rappeler certains de ces travaux.

Les travaux de Bambusi et Grébert (notamment [BG06], [Bam03],[Bam07] et [Gré07]) montrent depuis une décennie que l'on peut sensiblement augmenter le temps d'existence dans un cadre hamiltonien pour des équations de Schrödinger ou des ondes (sur des tores) grâce à une méthode de forme normale à tout ordre (c'est-à-dire que l'on peut éliminer un nombre arbitrairement grand de termes non-linéaires). Présentons heuristiquement la méthode dans le cas de l'équation de Klein-Gordon uni-dimensionnelle

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)v = NL(v)$$

On interprète l'équation aux dérivées partielles précédente comme une équation d'évolution hamiltonienne de la forme

$$u' = X_{H_0+P}(u)$$

où u appartient à un espace symplectique de dimension infinie, H_0 est un oscillateur dont les fréquences sont les valeurs propres de $\sqrt{-\partial_x^2+m^2}$ et P est la perturbation, cette dernière découle exclusivement de la non-linéarité $NL(v)$ et fait naturellement intervenir les intégrales-produits des modes propres de l'opérateur $\sqrt{-\partial_x^2+m^2}$. Sous une hypothèse de non-résonance des valeurs propres et grâce à des estimations appropriées des intégrales-produits des modes propres, le hamiltonien H_0+P est transformé canoniquement, au voisinage de l'origine, en un hamiltonien plus simple. Cela permet d'obtenir un temps d'existence de l'ordre $C(r)\varepsilon^{-r}$ pour des conditions initiales de norme $\varepsilon \ll 1$. On parle alors d'existence presque globale. Lorsque les fréquences sont bien séparées deux à deux, on vérifie que l'hypothèse de non-résonance est génériquement vérifiée.

Delort et Szeftel étudient des équations non hamiltoniennes de Klein-Gordon sur des surfaces compactes de révolution [DS06a], sur les sphères et les tores [DS04] et plus généralement sur des variétés de Zoll [DS06b], de longs temps d'existence sont obtenus en fonction du degré d'annulation de la non-linéarité. L'apport crucial de l'article [DS06b], par rapport à [DS04], est qu'une connaissance exacte du spectre et des modes propres de l'opérateur pseudo-différentiel sous-jacent (en l'occurrence $\sqrt{-\Delta}$) n'est pas nécessaire, précisément nous avons juste besoin d'une certaine propriété de séparation, automatiquement réalisée sur les variétés de Zoll, qui énonce que le spectre est comparable à une suite arithmétique. Dans l'article [BDGS07], les auteurs combinent les arguments de [DS04], [DS06b] et [BG06] dans un cadre hamiltonien pour obtenir l'existence presque globale.

En ce qui concerne l'opérateur de Szegö, il apparaît dans les non-linéarités des travaux de Gérard-Grellier [GG10, GG11] et Pocovnicu [Poc11a, Poc11b, Poc11c]. La motivation des travaux de Gérard-Grellier provient, en partie, de l'étude de l'équation de Schrödinger sur le groupe de Heisenberg. Dans [Poc11a], il est prouvé que l'équation de Szegö $i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u)$ sur $\mathbb{R}$ admet des solutions qui explosent en l'infini : $\lim\limits_{\pm\infty} ||u(\cdot,t)||_{H^s} = +\infty$ si $s > \frac{1}{2}$.

Permettons-nous à présent de rappeler dans les grandes lignes un principe classique en analyse semi-classique. Si un opérateur pseudo-différentiel $p(x, iD_x)$ d'ordre 1, auto-adjoint et elliptique a un symbole principal à flot hamiltonien simplement périodique, alors le spectre de $p(x, iD_x)$ est bien séparé. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, les deux exemples de symboles les plus simples sont sans doute $||x||^2 + ||\xi||^2$ sur $\mathbb{R}^{2n}$ et $x^2 + \xi^{2p}$ sur $\mathbb{R}^2$ qui correspondent respectivement à l'oscillateur harmonique et à un oscillateur surquadratique (voir l'article [HR82] dans un cadre beaucoup plus général). Dans le cas des variétés compactes, ce sont entre autres les travaux de Guillemin et Colin de Verdière qui apparaissent dans la littérature [dV79, Gui77]. En fait la condition de périodicité est nécessaire (voir [Gui77], théorème 1 ou [HR82], théorème 7-20 et appendice C). Il se trouve que ce principe qui relie géométrie et spectre a été étendu aux opérateurs pseudo-différentiels de Toeplitz, ces derniers ont été étudiés de manière très générale par Boutet de Monvel et Guillemin dans [BdMG81].

Suite aux travaux précédents, notre idée a été d'appliquer des méthodes de formes normales à tout ordre sur des équations aux dérivées partielles dont les non-linéarités font intervenir des projecteurs de Szegö. Le cadre général naturel est donc celui des structures de Toeplitz. Il est à noter que l'on retrouve dans le cadre des opérateurs pseudo-différentiels de Toeplitz la théorie usuelle des opérateurs de Laplace-Beltrami sur une variété riemannienne. En exploitant les résultats spectraux de Boutet de Monvel et Guillemin et les méthodes de Delort-Szeftel [DS04, DS06b], nous arrivons à généraliser les résultats de l'article [BDGS07]. Notre cadre diffère essentiellement par son coté algébrique : l'opérateur de Szegö π, qui intervient dans la non-linéarité, est à valeurs complexes et ne commute pas en général avec la conjugaison, d'où l'impossibilité de séparer parties réelles et imaginaires des solutions. En réduisant l'équation (2) d'ordre 2, nous obtenons une équation d'ordre 1 à valeurs dans $\mathbb{C}^2$. Dans notre cadre formel, il nous est apparu pertinent de munir $\mathbb{C}^2$ d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre, à savoir $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (en abrégé $\mathbb{C}^{\otimes 2}$) en faisant les identifications $(i, 0) \to i \otimes 1$ et $(0, 1) \to 1 \otimes i$. L'élément $j := 1 \otimes i$ est une racine carrée de -1 qui va jouer un rôle simplificateur dans le calcul des crochets de Poisson et des applications $\mathbb{R}[j]$-multilinéaires sont utilisées pour modéliser les non-linéarités. Dans son esprit, notre preuve est essentiellement algébrique.

2 Analyse spectrale

2.1 Rappels sur les opérateurs pseudo-différentiels de Toeplitz

Nous rappelons les définitions et les propriétés des opérateurs pseudo-différentiels de Toeplitz présentes dans [BdMG81] (essentiellement les chapitres 1,2 et 13) qui nous seront utiles. Commençons par définir le projecteur de Szegö $\pi_{n,q}$ de référence. Dans $\mathbb{R}^n$, on note $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-q} \oplus \mathbb{R}^q$ le point générique et $D_j = \partial_{y_j} + y_j |D_x|$ pour tout $j \in [[1, q]]$ où $|D_x|$ est défini par transformée de Fourier

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{n-q} \oplus \mathbb{R}^q) \quad \widehat{|D_x| f}(\xi, \eta) = |\eta| \widehat{f}(\xi, \eta)$$

Le projecteur $\pi_{n,q}$ est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur l'adhérence de

$$\{f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \forall j \in [[1, q]] \quad D_j f = 0\}$$

On peut montrer que $\pi_{n,q}$ est un opérateur intégral de Fourier à phases complexes [Hor85b]. Le triplet (X, Σ, π) désignera une structure de Toeplitz au sens de la définition suivante :

Définition 2.1.1. *Une structure de Toeplitz (X, Σ, π) est la donnée d'une variété compacte X munie d'une mesure Lebesguienne, d'un cône symplectique fermé $\Sigma \subset T^\star X \backslash \{0\}$ et d'un projecteur orthogonal $\pi : L^2(X, \mathbb{C}) \to L^2(X, \mathbb{C})$, appelé projecteur de Szegö, tel que*

i) le front d'onde de $\pi : \mathcal{C}^\infty(X) \to \mathcal{D}'(X)$, c'est-à-dire le front d'onde de son noyau distribution $\in \mathcal{D}'(X^2)$, est

$$WF(\pi) = \{(x, \xi^\star, x, -\xi^\star) \in T^\star(X^2) \backslash \{0\}, (x, \xi^\star) \in \Sigma\}$$

ii) π est microlocalement conjugué à $\pi_{n,q}$, avec $(n, 2q) = (\dim X, \dim \Sigma)$ en ce sens que pour tout $(x, \xi) \in \Sigma$ il existe une transformation symplectique homogène $\mathcal{T}$ sur un voisinage conique de (x, ξ) à valeurs dans $T^\star \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et un opérateur intégral de Fourier F de X dans $\mathbb{R}^n$, associé à $\mathcal{T}$, tels que $F^\star F - I$ soit $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de (x, ξ) et $F \pi F^\star - \pi_{n,q}$ soit $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\mathcal{T}(x, \xi)$

Si X et Σ sont comme dans la définition précédente, alors il existe toujours au moins un projecteur de Szegö $\pi : L^2(X) \to L^2(X)$ tel que (X, Σ, π) soit une structure de Toeplitz, voir [BdM97] ou [BdMG81, annexe 4]. L'exemple trivial $(X, \Sigma, \pi) = (X, T^\star X \backslash \{0\}, \mathrm{Id})$ correspond au cas microlocal $\pi_{n,0} = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ (voir l'exemple a) dans la partie 1.2). Un autre exemple important étudié dans [BdMG81] est le suivant : on considère X le bord d'un ouvert $\mathcal{U}$ strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$, et l'on peut définir Σ à l'aide d'une forme de contact sur X (comme dans l'exemple b)) de sorte que le projecteur orthogonal $\pi : L^2(X) \to L^2(X)$ sur les fonctions prolongeables holomorphiquement sur $\mathcal{U}$ soit convenable.

Remarquons que d'après le point i), si $u \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ alors $\pi u \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$. En effet, il est bien connu que l'on a l'inclusion suivante (théorème 8.2.12 de [Hor85a]) :

$$WF(\pi u) \subset \{(x, \xi^\star) \in T^\star X \backslash \{0\}, \quad (x, \xi^\star, y, 0^\star) \in WF(\pi), \quad y \in \mathrm{supp}(u)\} = \emptyset$$

Ainsi, $\pi(\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})) = \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}) \cap \mathrm{Im}(\pi)$. Un opérateur pseudo-différentiel de Toeplitz, en abrégé o.p.d.T., sur la structure de Toeplitz (X, Σ, π) est un opérateur linéaire T de l'espace $\pi(\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}))$ dans lui-même de la forme $\pi \circ Q \circ \pi$ où Q est un o.p.d. classique sur X. La proposition suivante permet de définir le symbole d'un o.p.d.T.

Proposition 2.1.2. *Soient Q_1 et Q_2 deux o.p.d. classiques sur X tels que $\pi Q_1 \pi = \pi Q_2 \pi$ alors les restrictions des symboles $\sigma(Q_i) : T^\star X \to \mathbb{C}$ coïncident sur Σ. On dira que $\sigma(Q_i)_{|\Sigma}$ est le symbole de l'o.p.d.T. $\pi Q_i \pi$, et l'on note $\sigma(\pi Q_i \pi) : \Sigma \to \mathbb{C}$.*

Lorsque l'o.p.d. Q est respectivement d'ordre $k \in \mathbb{N}$, auto-adjoint, elliptique, on dira que l'o.p.d.T. $\pi Q \pi$ est respectivement d'ordre $k \in \mathbb{N}$, auto-adjoint, elliptique. Une méthode utilisée plusieurs fois dans [BdMG81] permet de montrer que l'on peut choisir un o.p.d. Q qui commute avec π, cela permet notamment de voir que l'ensemble des o.p.d.T. est stable par composition. Nous écrivons cette proposition avec toutes les hypothèses qui nous seront nécessaires.

Proposition 2.1.3. *Soit T un o.p.d.T d'ordre 1, auto-adjoint et elliptique alors il existe Q un o.p.d. classique sur X, d'ordre 1, auto-adjoint et elliptique, tel que*

$$T = \pi Q \pi, \qquad [Q, \pi] = 0$$

Autrement dit, T est la restriction de Q à $\pi(\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}))$.

L'espace de Hilbert de base naturellement associé à la structure de Toeplitz (X, Σ, π) est $L^2_\pi(X, \mathbb{C}) := \pi(L^2(X, \mathbb{C}))$. Si T est un o.p.d.T. d'ordre 1, auto-adjoint et elliptique, alors les modes propres de T constituent une base hilbertienne de $L^2_\pi(X, \mathbb{C})$. En ce qui concerne le spectre, nous avons le théorème de localisation spectrale [BdMG81, théorème 13.9 et proposition 13.10]:

Théorème 2.1.4. *Soit T un opérateur pseudo-différentiel de Toeplitz sur la structure de Toeplitz (X, Σ, π), d'ordre 1, auto-adjoint, elliptique et qui vérifie les propriétés i) et ii) du théorème 1.1.1, alors*

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad sp(T) \subset \bigcup_{k \geq 1} \left[\frac{2\pi}{\tau} k + \alpha - \frac{\beta}{k}, \frac{2\pi}{\tau} k + \alpha + \frac{\beta}{k} \right] \tag{5}$$

où τ est la période commune des bicaratéristiques de $\sigma(T)$ En outre il existe un polynôme $p_T \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\frac{\dim(\Sigma)-2}{2}$ tel que le nombre de valeurs propres de T comptées avec multiplicité dans l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{\tau}k + \alpha - \frac{\beta}{k}, \frac{2\pi}{\tau}k + \alpha + \frac{\beta}{k}\right]$ soit exactement $p_T(k)$ pour $k \gg 1$.

Remarque 2.1.5. *Il s'agit d'une généralisation aux o.p.d.T. d'une propriété bien connue pour les o.p.d. classiques sur une variété compacte (voir par exemple [dV79] et ses références) ou au sens de Helffer-Robert sur $\mathbb{R}^n$ [HR82]. En particulier, l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ d'une variété de Zoll vérifie la propriété de localisation (5).*

Remarquons que les intervalles $\left[\frac{2\pi}{\tau}k+\alpha-\frac{\beta}{k},\frac{2\pi}{\tau}k+\alpha+\frac{\beta}{k}\right]$ sont disjoints deux à deux pour k assez grand, disons $k \geq k_0$. Si $k \geq k_0$ on note $I_k \subset]0,+\infty[$ l'ensemble fini des valeurs propres de T dans $\left[\frac{2\pi}{\tau}k+\alpha-\frac{\beta}{k},\frac{2\pi}{\tau}k+\alpha+\frac{\beta}{k}\right]$, si $k \in [[1,k_0]]$ alors on désigne par I_k un sous-ensemble des valeurs propres de T incluses dans $\left[\frac{2\pi}{\tau}k+\alpha-\frac{\beta}{k},\frac{2\pi}{\tau}k+\alpha+\frac{\beta}{k}\right]$ de sorte que le spectre de T soit égale à l'union disjointe des ensembles I_k

$$\mathrm{sp}(T) = \bigsqcup_{k\geq 1} I_k \tag{6}$$

On définit en outre les projecteurs spectraux

$$\forall u \in L^2_\pi(X,\mathbb{C}) \qquad \Pi_k(u) := \mathbf{1}_{I_k}(T)(u)$$

2.2 Opérateur pseudo-différentiel de Toeplitz auto-conjugué

Nous introduisons une définition absente du livre [BdMG81] mais qui va jouer un rôle technique important dans notre contexte.

Définition 2.2.1. *Un opérateur pseudo-différentiel de Toeplitz T est auto-conjugué s'il se prolonge en un opérateur pseudo-différentiel classique Q sur X, auto-adjoint, elliptique et tel que*

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C}) \quad Q\overline{f} = \overline{Qf}$$

Cette définition nous servira grâce au fait que les sous-espaces propres d'un opérateur pseudo-différentiel auto-conjugué classique sont stables par conjugaison, donc un tel opérateur admet une base de modes propres à valeurs réelles. Associée à la propriété de prolongement, cela palliera le fait que $\pi(\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C}))$ n'est pas stable par conjugaison et que les modes propres d'un opérateur pseudo-différentiel de Toeplitz ne peuvent généralement pas être choisis à valeurs réelles.

Dans la partie 1.2, l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ est bien entendu auto-conjugué (exemples a) et c)). Quant à l'opérateur $-i\partial_\theta$ de l'exemple b) sur S^{2n-1}, son symbole est positif sur Σ. En outre, les formules (3) et (4) montrent que $-i\partial_\theta$ est trivialement la restriction de l'opérateur pseudo-différentiel Q sur S^{2n-1} donné par :

$$\begin{aligned} -\Delta &= Q(2n-2+Q) \\ Q &= -(n-1)\mathrm{Id} + \sqrt{(n-1)^2-\Delta} \end{aligned}$$

L'opérateur pseudo-différentiel Q est bien entendu auto-conjugué au sens de la définition 2.2.1. Le cas $n=1$ est plus simple à visualiser, l'opérateur $-i\partial_\theta$ vérifie

$$-i\partial_\theta\left(\sum_{k\geq 0} a_k e^{ik\bullet}\right) = \sum_{k\geq 0} k a_k e^{ik\bullet} \tag{7}$$

et se prolonge sur $\mathcal{C}^\infty(S^1,\mathbb{C})$ en l'opérateur suivant qui commute avec la conjugaison

$$Q : \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\bullet} \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k |k| e^{ik\bullet}$$

2.3 Contrôle des intégrales-produits des modes propres

La propriété d'auto-conjugaison permet d'obtenir les mêmes estimations multilinéaires que celles dans [DS06b].

Théorème 2.3.1. *Pour tous entiers $n \geq 3$, $\alpha \in [[0,n]]$, $F \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C})$, il existe $\nu > 0$ tel que pour tous $N > 0$, $u_1,\cdots,u_n \in \bigoplus_{k\geq 1} Im(\Pi_k)$*

$$\left|\int_X \Pi_{k_1}(u_1)\cdots\Pi_{k_\alpha}(u_\alpha)\overline{\Pi_{k_{\alpha+1}}(u_{\alpha+1})}\cdots\overline{\Pi_{k_n}(u_n)}F(x)dx\right| \leq C\frac{(k_3^\star)^{\nu+N}||u_1||_{L^2}\cdots||u_n||_{L^2}}{(k_3^\star+k_1^\star-k_2^\star)^N}$$

où $k_1^\star \geq k_2^\star \geq k_3^\star$ sont les trois plus grands entiers parmi $k_1,\ldots,k_n$.

L'idée naturelle est de faire passer la conjugaison dans les projecteurs. Malheureusement, les modes propres de T sont à valeurs complexes, et a priori les espaces $\bigoplus\limits_{k\geq 1} \mathrm{Im}(\Pi_k)$, $\pi(\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C}))$ et $H^s_\pi(X,\mathbb{C})$ ne sont généralement pas stables par conjugaison. Un des exemples le plus simple est sans doute l'opérateur $-i\partial_\theta$ (voir la ligne (7)). C'est pour cela que nous avons ajouté l'hypothèse d'auto-conjugaison. Comme T est auto-conjugué, il se prolonge en un o.p.d. Q d'ordre 1, auto-adjoint, elliptique sur X qui en outre commute avec la conjugaison. Si bien que l'on a pour tout $u \in \pi(\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C}))$

$$\mathbf{1}_{I_k}(T)(u) = \mathbf{1}_{I_k}(Q)(u) \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{1}_{I_k}(Q)(u)} = \mathbf{1}_{I_k}(Q)(\overline{u})$$

Dans ce cas, si on note encore $\Pi_k(u) = \mathbf{1}_{I_k}(Q)(u)$ alors, il s'agit de prouver les estimations suivantes pour tous $u_1,\ldots,u_n \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{C})$

$$\left|\int_X \Pi_{k_1}(u_1)\cdots\Pi_{k_\alpha}(u_\alpha)\Pi_{k_{\alpha+1}}(\overline{u_{\alpha+1}})\cdots\Pi_{k_n}(\overline{u_n})F(x)dx\right| \leq C\frac{(k_3^\star)^{\nu+N}||u_1||_{L^2}\cdots||u_n||_{L^2}}{(k_3^\star+k_1^\star-k_2^\star)^N}$$

Ce qui nous ramène au cas de [DS06b] (proposition 1.2.1).

Remarque 2.3.2. *Il peut paraître surprenant à prime abord que l'on n'ait utilisé aucune propriété des modes propres. En fait, la preuve de la proposition 1.2.1 de [DS06b] utilise explicitement l'estimation suivante*

$$||\Pi_k(u)||_{L^\infty} \leq Ck^a||u||_{L^2}$$

où $C, a > 0$ sont indépendants de u. Or une telle estimation est toujours valide. En effet, il suffit de se rappeler qu'une norme équivalente de $H^s(X,\mathbb{C})$ est $||u||_s = ||u||_{L^2} + ||Q^s u||_{L^2}$. Et par suite, l'injection de Sobolev $H^{\dim X}(X,\mathbb{C}) \to L^\infty(X,\mathbb{C})$ amène à

$$||\Pi_k(u)||_{L^\infty} \leq C||\Pi_k(u)||_{H^{\dim X}} \leq Ck^{\dim X}||u||_{L^2}$$

2.4 Propriété de Delort-Szeftel

Voici la condition de non-résonance sur les valeurs propres que nous allons utiliser

Définition 2.4.1. *Soit T un o.p.d.T. qui vérifie la propriété de localisation (6), nous dirons que le spectre de T est non-résonant si pour tous entiers $n \geq 3$, $\alpha \in [[1, n-1]]$ et pour toutes valeurs propres $\lambda_{k_1}, \cdots, \lambda_{k_n}$ de T avec $\lambda_{k_i} \in I_{k_i}$ il existe $C(n)$ et $\delta(n) > 0$ tels que*

$$\{k_1, \ldots, k_\alpha\} \neq \{k_{\alpha+1}, \ldots, k_n\} \quad \Rightarrow \quad |\lambda_{k_1} + \cdots + \lambda_{k_\alpha} - \lambda_{k_{\alpha+1}} - \cdots - \lambda_{k_n}| \geq \frac{C(n)}{(k_3^\star)^{\delta(n)}}$$

Cette condition de non-résonance apparaît notamment dans les travaux [GIP09, Ime12, Ime11, DS04, DS06b, BDGS07] et dans une version un peu différente dans [BG06] et [FG10]. La propriété de Delort-Szeftel [DS06b, proposition 2.2.1] s'énonce alors

Proposition 2.4.2. *(Delort-Szeftel) Soit T un o.p.d.T. qui vérifie la conclusion du théorème 2.1.4, le spectre de l'o.p.d.T. $\sqrt{T^2 + m^2}$ est non-résonant pour presque tout réel $m > 0$ au sens de Lebesgue. Nous dirons qu'un tel m est générique.*

Dans toute la suite, le paramètre m est supposé générique. Si bien que l'on a

$$\{k_1, \ldots, k_\alpha\} \neq \{k_{\alpha+1}, \ldots, k_n\} \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{\beta=1}^{n} (\mathbf{1}_{\beta \leq \alpha} - \mathbf{1}_{\beta > \alpha}) \sqrt{\lambda_{k_\beta}^2 + m^2}\right| \geq \frac{C(n)}{(k_3^\star)^{\delta(n)}} \qquad (8)$$

Remarque 2.4.3. *Dans la preuve de la proposition 2.4.2, la croissance polynomiale du nombre de valeurs propres du paquet spectral I_k, à savoir $\ln p_T(k) \leq C + k\left(\frac{\dim(\Sigma)-2}{2}\right)$, intervient de manière cruciale (voir la preuve du lemme 2.2.2 de [DS06b]). Cette croissance polynomiale sera de nouveau utilisée plus loin dans la preuve de la proposition 4.2.7.*

Remarque 2.4.4. *Comme tout o.p.d.T. sur (X, Σ, π) se prolonge en un opérateur pseudo-différentiel classique (proposition 2.1.3), il s'ensuit immédiatement que $\Lambda = \sqrt{T^2 + m^2}$ est un opérateur pseudo-différentiel de Toeplitz sur (X, Σ, π).*

3 Mise sous forme normale

3.1 Formalisme hamiltonien

Nous décrivons dans cette partie le formalisme hamiltonien (voir [Kuk93], partie 1). Comme l'équation de Klein-Gordon est d'ordre 2 en temps, l'espace des phases sera naturellement $H^s_\pi(X, \mathbb{C})^2$ que l'on identifie à $H^s_\pi(X, \mathbb{C}^2)$. Avant de définir la structure hamiltonienne sur $H^s_\pi(X, \mathbb{C}^2)$, nous allons munir $\mathbb{C}^2$ d'une structure d'algèbre normée en vue de simplifier notre formalisme. Nous définissons la norme euclidienne :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{C}^2 \qquad |(p, q)| = \sqrt{|p|^2 + |q|^2}$$

De plus, nous identifions $\mathbb{C}^2$ à la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, c'est-à-dire que la multiplication est définie par

$$\forall (p_1, q_1), (p_2, q_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad (p_1, q_1)(p_2, q_2) = (p_1 p_2 - q_1 q_2, p_1 q_2 + p_2 q_1)$$

Nous noterons $j = (0, 1)$ qu'on prendra garde à ne pas confondre avec l'usuelle racine cubique de l'unité qui d'ailleurs n'intervient jamais dans notre contexte. Ainsi, tout élément de $\mathbb{C}^2$ s'écrit de manière unique $p + jq$ avec $(p, q) \in \mathbb{C}^2$. Enfin nous définissons deux opérateurs de conjugaison sur $\mathbb{C}^2$:

$$\overline{p + jq} = \overline{p} + j\overline{q}, \qquad \widetilde{p + jq} = p - jq$$

L'espace $\mathbb{C}^2$ muni de cette structure d'algèbre[1] commutative normée sera noté $\mathbb{C}^{\otimes 2}$, nous noterons ainsi $H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ au lieu de $H^s_\pi(X, \mathbb{C}^2)$. Nous identifions les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ comme des sous-algèbres de $\mathbb{C}^{\otimes 2}$, ce qui permet d'identifier $H^s_\pi(X, \mathbb{R})$ et $H^s_\pi(X, \mathbb{C})$ comme des sous-espaces de $H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$. Ainsi, $H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ est une algèbre si $2s > \dim X$ ce qui sera toujours notre cas puisque nous nous intéressons aux très grandes régularités. On munit maintenant l'espace $H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ de la forme symplectique

$$\omega(p_1 + jq_1, p_2 + jq_2) = \mathrm{Re}\left(\int_X q_1\overline{p_2} - p_1\overline{q_2}dx\right) = \mathrm{Re}(\langle q_1, p_2\rangle - \langle p_1, q_2\rangle)$$

Une fonction $H \in \mathcal{C}^1(U_s, \mathbb{R})$ définie sur un ouvert de $H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ a un hamiltonien $X_H : U_s \to L^2_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ si pour tous $p + jq \in U_s$ et $h + jk \in H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ on a

$$H(p + h + j(q + k)) - H(p + jq) = \omega\left(X_H(p + jq), (h + jk)\right) + o(||h + jk||_{H^s})$$

Si une fonction $u : I \to H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ dérivable vérifie l'équation hamiltonienne $u'(t) = X_H(u(t))$, alors on a la loi de conservation formelle $H(u(t)) = H(u(0))$ sur l'intervalle I. Lorsque $X_H \in \mathcal{C}^\infty(U_s, H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ alors pour tout t assez proche de 0 le flot ϕ^t de l'équation $u'(t) = X_H(u(t))$ est une transformation canonique d'un voisinage de l'origine sur un voisinage de l'origine, i.e. conserve la structure symplectique de $H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ (voir [Kuk93]).

À présent, nous allons mettre l'équation de Klein-Gordon sous forme hamiltonienne

$$(\partial_t^2 + T^2 + m^2)v = \pi(\partial_{\overline{v}} f(x, v))$$

Nous notons $\Lambda := \sqrt{T^2 + m^2}$ et introduisons les nouvelles variables (p, q) en vue de simplifier l'équation de Klein-Gordon :

$$u(t) = p(j) + jq(t) \in H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}), \quad (p(t), q(t)) = (\Lambda^{-1/2}\partial_t v, \Lambda^{1/2} v)$$

$$\begin{pmatrix} p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda^{-1/2}\pi\left(\partial_{\overline{v}} f(x, \Lambda^{-1/2} q)\right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

[1]L'algèbre $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ obtenue par extension des scalaires de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ est bien entendu isomorphe à $\mathbb{C}[X]/(X^2 + 1)$. Dans ce cas, l'élément j correspond à la classe de X dans $\mathbb{C}[X]/(X^2 + 1)$, les deux opérateurs de conjugaison, $\mathbb{R}$-linéaires, sont alors parfaitement définis par $(\overline{1}, \overline{i}, \overline{X}, \overline{iX}) = (1, -i, X, -iX)$ et $(\widetilde{1}, \widetilde{i}, \widetilde{X}, \widetilde{iX}) = (1, i, -X, -iX)$.

$$H_0(p,q)=\frac{1}{2}\int|\Lambda^{1/2}p|^2+|\Lambda^{1/2}q|^2dx, \qquad H_{NL}(p,q)=-\int f(x,\Lambda^{-1/2}q)\frac{dx}{2}$$

Le gradient symplectique de H_0 est facile à calculer en invoquant le caractère auto-adjoint de $\Lambda^{1/2}$:

$$\omega(X_{H_0}(p+jq),(h+jk))=\mathrm{Re}(\langle\Lambda p,h\rangle+\langle\Lambda q,k\rangle)=\omega\left(-\Lambda q+j\Lambda p,h+jk\right)$$

Comme $j^2=-1$, on peut écrire $X_{H_0}(p+jq)=-\Lambda q+j\Lambda p=j\Lambda(p+jq)$ ou encore

$$X_{H_0}(u)=j\Lambda u \tag{10}$$

De même, on a

$$\omega(X_{H_{NL}}(p+jq),(h+jk))=-\int_X(\Lambda^{-1/2}k)\partial_v f(x,\Lambda^{-1/2}q)+(\overline{\Lambda^{-1/2}k})\partial_{\overline{v}}f(x,\Lambda^{-1/2}q)\frac{dx}{2}$$

Comme f est à valeurs réelles, on a $\overline{\partial_v f}=\partial_{\overline{v}}f$ (voir la définition (1)), donc

$$\omega(X_{H_{NL}}(p+jq),(h+jk))=-\mathrm{Re}\langle\Lambda^{-1/2}k,\partial_{\overline{v}}f(\cdot,\Lambda^{-1/2}q)\rangle$$

En introduisant le projecteur orthogonal π, cela donne

$$\omega\left(X_{H_{NL}}(p+jq),(h+jk)\right)=-\mathrm{Re}\langle\Lambda^{-1/2}k,\pi(\partial_{\overline{v}}f(\cdot,\Lambda^{-1/2}q))\rangle$$

Le caractère auto-adjoint de $\Lambda^{-1/2}$ amène à

$$X_{H_{NL}}(p+jq)=\Lambda^{-1/2}\pi\left(\partial_{\overline{v}}f(\cdot,\Lambda^{-1/2}q)\right)+j0\in H^{s+1}(X,\mathbb{C})\subset H^s(X,\mathbb{C})$$

En revenant à la notation $u=p+jq$, l'équation (2), qui équivaut au système (9), prend la forme simplifiée

$$u'=X_{H_0+H_{NL}}(u)=X_{H_0}(u)+X_{H_{NL}}(u)$$

Le gradient symplectique de H_0 n'est pas à valeurs dans H^s, par contre son flot conserve H^s pour tout $s>0$. Le gradient symplectique de H_{NL} est à valeurs dans H^s. La formule de Duhamel s'écrit

$$\begin{aligned}u(t)&=\exp(tX_{H_0})u(0,t)+\int_0^t\exp((t-\tau)X_{H_0})X_{H_{NL}}(u(\tau))d\tau\\u(t)&=\exp(tj\Lambda)u(0,t)+\int_0^t\exp((t-\tau)j\Lambda)X_{H_{NL}}(u(\tau))d\tau\end{aligned}\tag{11}$$

Ce qui donne l'estimation a priori

$$||u(t)||_{H^s}\leq||u(0,\cdot)||_{H^s}+Ct\sup_{\tau\in[0,t]}||u(\tau)||_{H^s}^2$$

et donc un temps d'existence a priori de l'ordre de ε^{-1} quand $||u_0||_{H^s}=\varepsilon$. Un argument de point fixe avec le membre droit de (11) permet de rendre rigoureuses ces estimations a priori.

3.2 Modèle abstrait

Il s'agit d'une version du modèle développé dans [BDGS07] adaptée à l'algèbre $\mathbb{C}^{\otimes 2}$ en vue d'écrire un théorème de forme normale. Les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{C}^{\otimes 2}$ et $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ sont naturellement des $\mathbb{R}[j]$-espaces vectoriels, ainsi une application $\mathbb{R}[j]$-linéaire $L : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}) \to \mathbb{C}^{\otimes 2}$ est tout simplement une application $\mathbb{R}$-linéaire telle que $L(ju) = jL(u)$ pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$. La $\mathbb{R}[j]$-linéarité intervient dans l'une des définitions suivantes et jouera un rôle important dans le calcul des crochets de Poisson avec H_0 (voir les calculs (28)).

Définition 3.2.1. *Pour tous entier $k \geq 1$ et élément $u = p + jq \in H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$, nous notons*

$$J_k(u) = \frac{1}{2}||\mathbf{1}_{I_k}(T)(u)||^2_{L^2} = \frac{1}{2}||\mathbf{1}_{I_k}(T)(p)||^2_{L^2} + \frac{1}{2}||\mathbf{1}_{I_k}(T)(q)||^2_{L^2} \tag{12}$$

où I_k est défini à la ligne (6).

Définition 3.2.2. *Soient $n, N \in \mathbb{N}^\star$ et $\nu > 0$, on note $\mathcal{L}^{\nu,N}_n$ l'espace des applications $\mathbb{R}[j]$-multilinéaires $L : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})^n \to \mathbb{C}^{\otimes 2}$ telles que pour tous $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^\star$ et $u_1, \ldots, u_n \in L^2_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ on a*

$$|L(\Pi_{k_1}(u_1), \cdots, \Pi_{k_n}(u_n))| \leq C \frac{(k^\star_3)^{\nu+N}}{(k^\star_3 + k^\star_1 - k^\star_2)^N} \prod_{i=1}^n ||u_i||_{L^2} \tag{13}$$

On notera de plus $\mathcal{L}^{\nu,\infty}_n = \bigcap_{N'>0} \bigcup_{N>N'} \mathcal{L}^{\nu,N}_n$.

Définition 3.2.3. *On note $\mathcal{C}^\infty_s(H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}), \mathbb{R})$ l'espace des germes de fonctions $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ sur un voisinage de l'origine de $H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ et telles que $X_P \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}))$.*

Définition 3.2.4. *Pour tous $L \in \mathcal{L}^{\nu,N}_n$ et $\alpha \in [[0, n]]$, on introduit les fonctions polynomiales suivantes définies pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ par*

$$\begin{aligned} A_{\alpha,n-\alpha}(L)(u) &:= L(\underbrace{u, \ldots, u}_{\alpha}, \underbrace{\widetilde{u}, \ldots, \widetilde{u}}_{n-\alpha}) \\ \widetilde{A_{\alpha,n-\alpha}}(L)(u) &:= \widetilde{L}(\underbrace{u, \ldots, u}_{\alpha}, \underbrace{\widetilde{u}, \ldots, \widetilde{u}}_{n-\alpha}) \end{aligned}$$

Remarque 3.2.5. *En notant l'application $\mathbb{R}[j]$-multilinéaire*

$$L_1(u_1, \ldots, u_n) = \widetilde{L}(\underbrace{\widetilde{u_{n-\alpha+1}}, \ldots, \widetilde{u_n}}_{\alpha}, \underbrace{\widetilde{u_1}, \ldots, \widetilde{u_{n-\alpha}}}_{n-\alpha})$$

alors nous avons $\widetilde{A_{\alpha,n-\alpha}}(L)(u) = A_{n-\alpha,\alpha}(L_1)(u)$.

Définition 3.2.6. *Soient un réel $\nu > 0$ et un entier $n \geq 3$, on note $\mathcal{H}^\nu_n$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes à valeurs réelles de degré n de la forme*

$$\sum_{\alpha=0}^n A_{\alpha,n-\alpha}(L_{\alpha,n-\alpha} + \overline{L_{\alpha,n-\alpha}}) \tag{14}$$

avec $L_{\alpha,n-\alpha} \in \mathcal{L}^{\nu,\infty}_n$. On notera de plus $\mathcal{H}^\nu_{\leq n} = \mathcal{H}^\nu_3 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}^\nu_n$.

Remarque 3.2.7. *Selon la définition 3.2.2, pour tout $L \in \mathcal{L}_n^{\nu,\infty}$ l'application multilinéaire $L + \overline{L}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}[j]$.*

Avant d'énoncer le théorème de forme normale, il est important de signaler l'intérêt des estimations de la définition 3.2.2.

Proposition 3.2.8. *Pour tout $L \in \mathcal{L}_n^{\nu,+\infty}$ avec $n \geq 3$, si $s \gg 1$ alors L se prolonge en une application multilinéaire continue sur $\underbrace{H^s \times \cdots \times H^s}_{n-1} \times H^{-s}$.*

Il est à noter que la régularité précédente est plus forte que la régularité sur $H^s(X)^n$. La proposition précédente sera démontrée à la partie 4.1. Le corollaire suivant en découle immédiatement.

Corollaire 3.2.9. *Tout élément $P \in \mathcal{H}_n^\nu$ induit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ telle que $X_P \in \mathcal{C}^\infty(H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}), H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}))$ pour $s \gg 1$.*

Preuve. Soit P de la forme (14), la proposition 3.2.8 assure que pour $s \gg 1$ nous avons pour tous $\beta \in [[1, n]]$ et $\alpha \in [0, n]$

$$\forall u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}) \quad |L_{\alpha,n-\alpha}(u_1, \ldots, u_n)| \leq C||u_\beta||_{H^{-s}} \prod_{k \neq \beta} ||u_k||_{H^s}$$

Pour tout $h \in H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$, $d_u A_{\alpha,n-\alpha}(L_{\alpha,n-\alpha})(h)$ se décompose par multilinéarité en

$$\sum_{\beta=1}^{\alpha} L_{\alpha,n-\alpha}(\underbrace{\overbrace{u, \ldots, h}^{\beta}, \ldots, u}_{\alpha}, \widetilde{u}, \ldots, \widetilde{u}) + \sum_{\beta=\alpha+1}^{n} L_{\alpha,n-\alpha}(\overbrace{\underbrace{u, \ldots, u}_{\alpha}, \widetilde{u}, \ldots, \widetilde{h}}^{\beta}, \ldots, \widetilde{u})$$

Comme $||u||_{H^s} = ||\widetilde{u}||_{H^s}$, en sommant sur α nous obtenons

$$\forall u, h \in H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}) \quad |\omega(X_P(u), h)| = |d_u P(h)| \leq C||h||_{H^{-s}} ||u||_{H^s}^{n-1}$$

Cela implique que $||X_P(u)||_{H^s} \leq C||u||_{H^s}^{n-1}$. Puisque X_P est une fonction polynomiale, la majoration précédente implique que $X_P \in \mathcal{C}^\infty(H^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}), H^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}))$. $\square$

Le théorème de forme normale est le suivant

Théorème 3.2.10. *Soit $m > 0$ un réel générique (voir la proposition 2.4.2), nous considérons $P \in \mathcal{C}_s^\infty(H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}), \mathbb{R})$ tel que la série formelle de Taylor de P en 0 est de la forme $\sum_{n \geq 3} P_n$ avec $P_n \in \mathcal{H}_n^\nu$. Pour tout entier naturel $r \geq 3$ et pour tout $s \gg 1$, il existe*

a) un symplectomorphisme $\mathcal{T}$ sur un voisinage de l'origine $0 \in H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$ tel que

$$\max\left(||\mathcal{T}(u) - u||_{H^s}, ||\mathcal{T}^{-1}(u) - u||_{H^s}\right) \leq C||u||_{H^s}^2$$

b) $Z \in \mathcal{H}_{\leq r}^{\nu'}$ avec $\nu' > \nu$ et $\{Z, J_k\} = 0$ pour tout $k \geq 1$

c) $R \in \mathcal{C}_s^\infty(H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}), \mathbb{R})$ avec $||X_R(u)||_{H^s} \leq C||u||_{H^s}^r$

tels que $(H_0 + P) \circ \mathcal{T} = H_0 + Z + R$. Les constantes C dépendent de m, r et de s.

Le théorème précédent est démontré à la partie 4.5 grâce à la résolution d'une équation homologique (voir la partie 4.3) et à une propriété d'invariance des crochets de Poisson (voir l'inclusion (29)).

3.3 Conclusion à partir de la mise en forme normale

Dans cette partie, nous montrons comment déduire le théorème principal 1.1.1 à partir du théorème 3.2.10. Commençons par vérifier que la la série formelle de Taylor en 0 de la non-linéarité $P = H_{NL}$ vérifie les hypothèses du théorème 3.2.10. Pour cela, nous commençons par remarquer que par extension des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{C}^{\otimes 2}$, le théorème 2.3.1 devient

Théorème 3.3.1. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in [[0, n]]$ et $F \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$, considérons l'application*

$$\begin{array}{rcl} L : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})^n & \to & \mathbb{C}^{\otimes 2} \\ (u_1, \cdots, u_n) & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_1(x) \cdots u_a(x) \overline{u_{a+1}(x) \cdots u_n(x)} F(x) dx \end{array}$$

Alors il existe $\nu > 0$ tel que $L \in \mathcal{L}_n^{\nu,\infty}$.

La formule de Taylor fournit alors l'expression suivante

$$f(x, v) = \sum_{3 \leq a+b \leq n} \frac{\partial^{a+b} f}{\partial v^a \partial \overline{v}^b}(x, 0) \frac{v^a \overline{v}^b}{(a+b)!} + \mathcal{O}(|v|^{n+1})$$

où le reste est uniforme en x sur la variété compacte X. Par conséquent, le n-ième polynôme homogène de Taylor de $H_{NL}(p, q)$ est

$$P_n(p, q) = \sum_{a+b=n} \int_X \frac{-\partial^{a+b} f(x, 0)}{(a+b)! \partial v^a \partial \overline{v}^b} (\Lambda^{-1/2} q)^a \overline{(\Lambda^{-1/2} q)}^b dx$$

Pour tout $u = p + jq \in H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$, on décompose, pour alléger les notations, $P_n(\Lambda^{1/2} u)$ au lieu de $P_n(u)$:

$$\begin{aligned} P_n(\Lambda^{1/2} u) &= \sum_{a+b=n} \int_X \frac{-\partial^{a+b} f(x, 0)}{(a+b)! \partial v^a \partial \overline{v}^b} (u - \widetilde{u})^a \, \overline{(u - \widetilde{u})}^b \frac{dx}{2^n} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{n} \int_X \sum_{a+b=n} \sum_{\substack{a'+b'=\alpha \\ 0 \leq a' \leq a \\ 0 \leq b' \leq n}} u(x)^{a'} \overline{u(x)}^{b'} \widetilde{u(x)}^{a-a'} \overline{\widetilde{u(x)}}^{b-b'} f_{a,a',b,b'}(x) dx \end{aligned}$$

avec

$$f_{a,a',b,b'} = j^n \frac{-a! b! (-1)^{a'+b'}}{a'!(a-a')! b'!(b-b')!(a+b)! 2^n} \frac{\partial^{a+b} f(\cdot, 0)}{\partial v^a \partial \overline{v}^b} \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$$

À titre exceptionnel nous notons $s^0(z) = z$ et $s^1(z) = \overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^{\otimes 2}$, cela permet de définir rigoureusement l'application $\mathbb{R}[j]$-multilinéaire $L_{\alpha, n-\alpha}$:

$$L_{\alpha, n-\alpha}(u_1, \cdots, u_n) = \sum_{a+b=n} \sum_{\substack{a'+b'=\alpha \\ 0 \leq a' \leq a \\ 0 \leq b' \leq n}} \int_X \frac{b'! a'!}{\alpha!} \left(\sum_{\substack{\sum \varepsilon_i = b' \\ \varepsilon_i \in \{0,1\}}} s^{\varepsilon_1}(u_1(x)) \ldots s^{\varepsilon_\alpha}(u_\alpha(x)) \right)$$

$$\frac{(b-b')!(a-a')!}{(n-\alpha)!}\left(\sum_{\substack{\sum\varepsilon_i=b-b'\\ \varepsilon_i\in\{0,1\}}} s^{\varepsilon_{\alpha+1}}(u_{\alpha+1}(x))\dots s^{\varepsilon_n}(u_n(x))\right) f_{a,a',b,b'}(x)dx$$

La formule $\overline{f_{a,a',b,b'}} = f_{b,b',a,a'}$ prouve que $L_{\alpha,n-\alpha} = \overline{L_{\alpha,n-\alpha}}$. Par construction, nous avons

$$P_n(\Lambda^{1/2}u) = \sum_{\alpha=0}^{n} A_{\alpha,n-\alpha}(L_{\alpha,n-\alpha})(u)$$

Le théorème 3.3.1 assure que L appartient à $\mathcal{L}_n^{\nu,\infty}$ pour un certain $\nu > 0$. Comme les projecteurs spectraux Π_k commutent avec Λ et que $\Lambda^{-1/2}$ est un opérateur borné de $L^2_\pi(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})$, les estimations (13) sont aussi vérifiées pour $L_{\alpha,n-\alpha}(\Lambda^{-1/2}\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Lambda^{-1/2}\Pi_{k_n}u_n)$ (en multipliant C par le facteur $||\Lambda^{-1/2}||^n_{L^2\to L^2}$). Ensuite, la relation $L_{\alpha,n-\alpha} = \overline{L_{\alpha,n-\alpha}}$ se reformule $L_{\alpha,n-\alpha} = 2^{-1}L_{\alpha,n-\alpha} + 2^{-1}\overline{L_{\alpha,n-\alpha}}$. De même comme H_{NL} est à valeurs réelles, il en est de même de P_n. Enfin, $P_n \in \mathcal{H}_n^\nu$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.2.10 pour l'entier $r+2$ et prouver le théorème 1.1.1. Pour cela, on commence par le lemme élémentaire.

Lemme 3.3.2. *Pour tout entier $k \geq 1$ on a $X_{J_k}(u) = j\Pi_k(u)$ et $\{J_k, H_0\} = 0$.*

PREUVE. Il est immédiat que pour tous $u = p_1 + jq_1 \in H^s_\pi(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})$ et $h = p_2 + jp_2 \in H^s_\pi(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})$ on a

$$d_uJ_k(h) = \mathrm{Re}\langle\Pi_k(p_1),\Pi_k(p_2)\rangle + \mathrm{Re}\langle\Pi_k(q_1),\Pi_k(q_2)\rangle = \mathrm{Re}\langle\Pi_k(p_1),p_2\rangle + \mathrm{Re}\langle\Pi_k(q_1),q_2\rangle$$

Donc

$$d_uJ_k(h) = \omega(-\Pi_k(q_1) + j\Pi_k(p_1), p_2 + jq_2) = \omega(j\Pi_k(u), p_2 + jq_2)$$

En utilisant la formule (10), il vient

$$\{J_k, H_0\}(u) = d_uJ_k(X_{H_0}(u)) = \mathrm{Re}\langle\mathbf{1}_{I_k}(T)p, -\Lambda(q)\rangle + \mathrm{Re}\langle\mathbf{1}_{I_k}(T)q, \Lambda(p)\rangle$$

Or les opérateurs $\Lambda = \sqrt{T^2+m^2}$ et $\mathbf{1}_{I_k}(T)$ sont définis par calcul fonctionnel sur T, donc commutent. De plus, Λ et $\mathbf{1}_{I_j}(T)$ sont auto-adjoints, il vient

$$\langle\mathbf{1}_{I_k}(T)p, \Lambda(q)\rangle = \overline{\langle\mathbf{1}_{I_k}(T)q, \Lambda(p)\rangle}$$

Et donc $\{J_k, H_0\}(u) = 0$. □

Dans la partie 3.1, nous avons mis l'équation (2) sous forme hamiltonienne

$$u'(t) = X_{H_0+H_{NL}}(u(t))$$

Rappelons que

$$||u(t)||^2_{H^s} = ||\Lambda^{-1/2}\partial_t v||^2_{H^s} + ||\Lambda^{1/2}v(t)||^2_{H^s}$$

Ainsi,

$$||u(t)||_{H^s} \simeq ||\partial_t v||_{H^{s-1/2}} + ||v||_{H^{s+1/2}}$$

En considérant la condition initiale $(\partial_t v(0,\cdot), v(0,\cdot)) = (\varepsilon v_0, \varepsilon v_1)$ avec $(v_0, v_1) \in H^{s+1/2}(X, \mathbb{C})^2$, nous avons

$$||u(0)||_{H^s} \leq C_s \varepsilon$$

Lorsque $\varepsilon \ll 1$, nous pouvons effectuer le changement de variables $w(t) = \mathcal{T}^{-1}(u(t))$ au voisinage de l'origine de $H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$. Comme $\mathcal{T}$ est symplectique, $w(t)$ vérifie l'équation hamiltonienne

$$w'(t) = X_{H_0+Z+R}(w(t))$$

On se rappellera de la loi de conservation $(H_0 + H_{NL})(u(t)) = (H_0 + Z + R)(w(t))$. Le point a) du théorème 3.2.10 assure que $||w(0)||_{H^s} \leq C_{s,r}\varepsilon$. Considérons alors

$$E(w(t)) = \sum_{k \geq 1} k^{2s} J_k(w(t))$$

D'après la définition (12), quitte à considérer des voisinages assez restreints autour de l'origine, nous avons

$$\frac{1}{2}||w(t)||^2_{H^s} \leq E(w(t)) \leq 2||w(t)||^2_{H^s} \tag{15}$$

Il vient

$$\frac{dE(w(t))}{dt} = \{E, H_0 + Z + R\}(w(t)) = \sum_{k \geq 1} k^{2s}\{J_k, H_0 + Z + R\}(w(t))$$

D'après le point b) du théorème 3.2.10, appliqué à $r+2$ au lieu de r, et le lemme 3.3.2, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{dE(w(t))}{dt} &= \{E, H_0 + Z + R\}(w(t)) = \sum_{k \geq 1} k^{2s}\{J_k, R\}(w(t)) = \sum_{k \geq 1} k^{2s} d_{w(t)} J_k(X_R(w(t))) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{k \geq 1} k^{2s} \langle \mathbf{1}_{I_k}(T) w(t), \mathbf{1}_{I_k}(T) X_R(w(t))\rangle\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et le point c) du théorème 3.2.10 amènent à

$$\left|\frac{dE(w(t))}{dt}\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{k \geq 1} k^{2s}||\mathbf{1}_{I_k}(T) w(t)||^2_{H^s}}\sqrt{\sum_{k \geq 1} k^{2s}||\mathbf{1}_{I_k}(T) X_R(w(t))||^2_{H^s}} \leq C_{s,r}||w(t)||^{r+3}_{H^s}$$

Soit $t_{max} > 0$ le plus grand temps tel que $w(t)$ est définie et vérifie $||w(t)||_{H^s} \leq \sqrt{6}||w(0)||_{H^s}$ sur $[0, t_{max}]$. Par intégration et grâce à l'encadrement (15), nous obtenons

$$\frac{1}{2}||w(t_{max})||^2_{H^s} - 2||w(0)||^2_{H^s} \leq E(w(t_{max})) - E(w(0)) \leq C_{s,r} t_{max}||w(0)||^{r+3}_{H^s}$$

Or $||w(t_{max})||_{H^s} = \sqrt{6}||w(0)||_{H^s}$ donc $t_{max} \geq C_{s,r}||w(0)||^{-r-1}_{H^s} = C_{s,r}\varepsilon^{-r-1} \geq C_{s,r}\varepsilon^{-r}$. En utilisant que $\mathcal{T}$ est proche de l'identité, c'est-à-dire le point a) de 3.2.10, nous avons sur le temps $[0, t_{max}]$ l'inégalité

$$||u(t)||_{H^s} \leq K_{s,r}||u(0)||_{H^s}$$

Une démarche analogue est valable pour les temps négatifs. En fait la méthode de mise sous forme normale montre un résultat plus précis que celui du théorème 1.1.1 :

Proposition 3.3.3. *Sous les hypothèses du théorème 1.1.1, l'inégalité suivante précise sa conclusion :*

$$k^{2s}|J_k(u(t)) - J_k(u(0))| \leq C\varepsilon^3, \qquad |t| \leq C\varepsilon^{-r} \tag{16}$$

Preuve. Avant de commencer la preuve, on remarque que l'inégalité (16) apporte bien une information qui n'était pas prévisible car a priori la majoration triviale du membre gauche de (16) pour une solution u d'ordre ε est d'ordre ε^2. De manière évidente, nous avons

$$\left|\frac{d}{dt}J_k(w(t))\right| = |\{J_k, H_0 + Z + R\}w(t)| = |\{J_k, R\}w(t)| =$$

$$|\omega(j\Pi_k(w(t)), X_R(w(t)))| \leq ||\Pi_k(w(t))||_{H^{-s}}||X_R(w(t))||_{H^s} \leq C\frac{\varepsilon^{r+3}}{k^{2s}}$$

On a donc

$$k^{2s}|J_k(w(t)) - J_k(w(0))| \leq C\varepsilon^3$$

Enfin, le point a) du théorème 3.2.10 donne $||u(t) - w(t)||_{H^s} \leq C||u(t)||^2_{H^s} \leq C\varepsilon^2$ et par suite

$$\begin{aligned}
|J_k(u(t)) - J_k(w(t))| &= \left|||\mathbf{1}_{I_k}(T)u(t)||^2_{L^2} - ||\mathbf{1}_{I_k}(T)w(t)||^2_{L^2}\right| \\
&= |\langle \mathbf{1}_{I_k}(T)u(t) - \mathbf{1}_{I_k}(T)w(t), \mathbf{1}_{I_k}(T)u(t) + \mathbf{1}_{I_k}(T)w(t)\rangle_{L^2}| \\
&\leq k^{-2s}||u(t) - w(t)||_{H^s}(||u(t)||_{H^s} + ||w(t)||_{H^s}) \\
&\leq C\varepsilon^3
\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure. □

4 Démonstration du théorème principal

4.1 Régularité des formes multilinéaires

L'objet de cette partie est de montrer la proposition 3.2.8. Pour des paramètres N et s dont on fixe plus tard les bornes minimales, on majore $|L(u_1, \dots, u_n)|$ par

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1,\cdots,k_n\geq 1} |L(\Pi_{k_1}u_1, \dots, \Pi_{k_n}u_n)| \\
\leq\ & C\sum_{k_1,\cdots,k_n\geq 1} \frac{k_3^{\star\nu+N}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^N}\prod_{\ell=1}^n ||\Pi_{k_\ell}u_\ell||_{L^2} \\
\leq\ & C\left(\sum_{k_n\geq 1} k_n^{-2s}||\Pi_{k_n}u_n||^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k_n\geq 1}\left(\sum_{k_1,\cdots,k_{n-1}\geq 1}\frac{k_3^{\star\nu+N}k_n^s}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^N}\prod_{\ell=1}^{n-1}||\Pi_{k_\ell}u_\ell||_{L^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & C||u_n||_{H^{-s}}\left(\sum_{k_n\geq 1}\left(\sum_{k_1,\cdots,k_{n-1}\geq 1}\frac{k_3^{\star\nu+N}k_n^s}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^N}\prod_{\ell=1}^{n-1}||\Pi_{k_\ell}u_\ell||_{L^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Nous voulons majorer l'expression précédente par $C||u_n||_{H^{-s}} \prod_{\ell=1}^{n-1} ||u_\ell||_{H^s}$. Notons $\Upsilon = \{(k_1, \dots, k_{n-1}) \in \mathbb{N}^{\star n-1}, k_1 \le \dots \le k_{n-1}\}$. Par symétrie, il suffit de prouver que l'on a

$$\sum_{k_n \ge 1} \left(\sum_{\Upsilon} \frac{k_3^{\star \nu+N} k_n^s}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^N} \prod_{\ell=1}^{n-1} ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2} \right)^2 \le C \prod_{\ell=1}^{n-1} ||u_\ell||_{H^s}^2 \tag{17}$$

Le membre gauche est majoré par $\sum_{k_n} A(k_n)B(k_n)$ avec

$$\begin{aligned} A(k_n) &= \sum_{\Upsilon} \frac{k_3^{\star \nu+2}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2} \prod_{\ell=1}^{n-2} ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2} \\ B(k_n) &= \sum_{\Upsilon} \frac{k_3^{\star \nu+2N-2}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^{2N-2}} k_n^{2s} ||\Pi_{k_{n-1}} u_n||_{L^2}^2 \prod_{\ell=1}^{n-2} ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2} \end{aligned}$$

En choisissant $s \ge \nu + 3$ et en majorant grossièrement $k_3^{\star \nu+2} \le k_{n-2}^{\nu+2} \le (k_1 \dots k_{n-2})^{s-1}$, nous obtenons

$$A(k_n) \le \left(\sup_{\substack{k_1 \le \dots \le k_{n-2} \\ 1 \le k_n}} \sum_{k_{n-1}=k_{n-2}}^{+\infty} \frac{1}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2} \right) \sum_{k_1, \cdots, k_{n-2}} \prod_{\ell=1}^{n-2} \frac{k_\ell^s ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2}}{k_\ell}$$

Il s'avère que

$$\sup_{\substack{k_1 \le \dots \le k_{n-2} \\ 1 \le k_n}} \sum_{k_{n-1}=k_{n-2}}^{+\infty} \frac{1}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2} \le \sum_{a \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+1} < +\infty$$

En effet, si $k_n > k_{n-2}$ alors $(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2 \ge (k_{n-1} - k_n)^2 + 1$. Par contre, si $k_n \le k_{n-2}$ alors $(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2 \ge (k_{n-1} - k_{n-2})^2 + 1$. Par suite

$$\begin{aligned} A(k_n) &\le C \prod_{\ell=1}^{n-2} \left(\sum_{k_\ell \ge 1} \frac{1}{k_\ell^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k_\ell \ge 1} {k_\ell}^{2s} ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2}^2 \right)^{1/2} \\ &\le C \prod_{\ell=1}^{n-2} ||u_\ell||_{H^s} \end{aligned} \tag{18}$$

Pour traiter $B(k_n)$, on décompose $B(k_n) = B_0(k_n) + [B(k_n) - B_0(k_n)]$ avec

$$\begin{aligned} \Upsilon_0 &:= \{(k_1, \dots, k_{n-1}) \in \Upsilon, \quad 2k_{n-1} \le k_n\} \\ B_0(k_n) &= \sum_{\Upsilon_0} \frac{k_3^{\star \nu+2N-2}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^{2N-2}} k_n^{2s} ||\Pi_{k_{n-1}} u_n||_{L^2}^2 \prod_{\ell=1}^{n-2} ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2} \end{aligned}$$

Le terme sous la somme se factorise sous la forme

$$\frac{k_3^{\star \nu+2}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2} \times \left(\frac{k_3^\star}{k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star} \right)^{2N-4} \left(\frac{k_n}{k_{n-1}} \right)^{2s} \times k_{n-1}^{2s} ||\Pi_{k_{n-1}} u_{n-1}||_{L^2}^2 \prod_{\ell=1}^{n-2} ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2}$$

Dans l'ensemble Υ_0, nous avons $k_3^\star = k_{n-2} \leq k_{n-1}$ et $k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star \geq \max\left(k_3^\star, \frac{1}{2}k_n\right)$. Par conséquent si $N \geq s+2$, il vient

$$\left(\frac{k_3^\star}{k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star}\right)^{2N-4}\left(\frac{k_n}{k_{n-1}}\right)^{2s} \leq \left(\frac{k_3^\star k_n}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)k_{n-1}}\right)^{2s} \leq 4^s$$

$$B_0(k_n) \leq 4^s \sum_{\Upsilon_0} \frac{k_3^{\star\nu+2}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2} k_{n-1}^{2s} ||\Pi_{k_{n-1}} u_{n-1}||_{L^2}^2 \prod_{\ell=1}^{n-2} ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2}$$

Une estimation similaire est valable pour $B(k_n) - B_0(k_n)$ car l'on a $k_n \leq 2k_{n-1}$ sur $\Upsilon \backslash \Upsilon_0$

$$\begin{aligned} B(k_n) - B_0(k_n) &\leq 4^s \sum_{\Upsilon\backslash\Upsilon_0} \frac{k_3^{\star\nu+2+(2N-4)}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^{2+(2N-4)}} k_{n-1}^{2s} ||\Pi_{k_{n-1}} u_{n-1}||_{L^2}^2 \prod_{\ell=1}^{n-2} ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2} \\ &\leq 4^s \sum_{\Upsilon\backslash\Upsilon_0} \frac{k_3^{\star\nu+2}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2} k_{n-1}^{2s} ||\Pi_{k_{n-1}} u_{n-1}||_{L^2}^2 \prod_{\ell=1}^{n-2} ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2} \end{aligned}$$

En combinant (18) avec ce qui précède, nous prouvons (17) en majorant $\sum A(k_n)B(k_n)$ par :

$$\begin{aligned} & C \prod_{\ell=1}^{n-2} ||u_\ell||_{H^s} \sum_{k\geq 1} B(k_n) \\ \leq\ & C \prod_{\ell=1}^{n-2} ||u_\ell||_{H^s} \sum_{\substack{(k_1,\cdots,k_{n-1})\in\Upsilon \\ 1\leq k_n}} \frac{k_3^{\star\nu+2}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2} k_{n-1}^{2s} ||\Pi_{k_{n-1}} u_{n-1}||_{L^2}^2 \prod_{\ell=1}^{n-2} ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2} \end{aligned}$$

De nouveau, en majorant grossièrement $k_3^{\star\nu+2} \leq k_{n-2}^{s-1} \leq (k_1 \dots k_{n-2})^{s-1}$, l'expression précédente est majorée par

$$\begin{aligned} & C \left(\prod_{\ell=1}^{n-2} ||u_\ell||_{H^s}\right) \left(\sup_{\Upsilon} \sum_{k_n=1}^{+\infty} \frac{1}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2}\right) \sum_{\Upsilon} \left(k_{n-1}^{2s} ||\Pi_{k_{n-1}} u_{n-1}||_{L^2}^2 \prod_{\ell=1}^{n-2} \frac{k_\ell^s ||\Pi_{k_\ell} u_\ell||_{L^2}}{k_\ell}\right) \\ \leq\ & C \left(\prod_{\ell=1}^{n-1} ||u_\ell||_{H^s}^2\right) \sup_{\Upsilon} \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2} \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $(k_1, \dots, k_{n-1}) \in \Upsilon$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k_n=1}^{+\infty} \frac{1}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^2} &\leq \sum_{k_n=1}^{k_{n-3}-1} \frac{1}{(k_{n-1} - k_{n-2} + k_{n-3})^2} + \sum_{k_n=k_{n-3}}^{k_{n-2}-1} \frac{1}{(k_{n-1} - k_{n-2} + k_n)^2} \\ &\quad + \sum_{k_n=k_{n-2}}^{+\infty} \frac{1}{(k_{n-1} - k_n)^2 + k_{n-2}^2} \\ &\leq 1 + \sum_{a\geq 1} \frac{1}{a^2} + \sum_{a\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+a^2} \\ &\leq 2 + 3 \times \tfrac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

L'inégalité (17) est prouvée.

4.2 Inversion des petits diviseurs

Le paramètre m sera supposé générique au sens de la définition 2.4.1, nous allons utiliser cette généricité pour éliminer les termes non-résonants des non-linéarités. Commençons par poser quelques définitions.

Définition 4.2.1. *Soit $L \in \mathcal{L}_n^{\nu,N}$, on appelle support de L l'ensemble*

$$Supp(L) = \left\{ (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^{\star n}, \quad \exists (u_1, \ldots, u_n) \in \prod_{\ell=1}^{n} Im(\Pi_{k_\ell}) \quad L(u_1, \ldots, u_n) \neq 0 \right\}$$

Soit $\alpha \in [[0, n]]$, nous noterons $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}$ le sous-espace de $\mathcal{L}_n^{\nu,N}$ constitué des applications non-résonantes au sens suivant

$$L \in \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N} \quad \Leftrightarrow \quad Supp(L) \subset \Upsilon_{n,\alpha}$$

$$\Upsilon_{n,\alpha} \quad := \quad \{ (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^{\star n}, \quad \{k_1, \ldots, k_\alpha\} \neq \{k_{1+\alpha}, \cdots, k_n\} \}$$

Par exemple si n est impair alors $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N} = \mathcal{L}_n^{\nu,N}$.

Définition 4.2.2. *Soit $\alpha \in [[0, n]]$, pour tous $L \in \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}$ et $u_1, \ldots, u_n \in \bigoplus_{k=1} Im(\Pi_k)$ nous posons*

$$\Theta_\alpha(L)(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\beta=1}^{n} (\mathbf{1}_{\beta \leq \alpha} - \mathbf{1}_{\beta > \alpha}) L(u_1, \ldots, u_{\beta-1}, \Lambda u_\beta, u_{\beta+1}, \ldots, u_n)$$

A priori, l'opérateur Θ_α n'envoie pas $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}$ dans $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}$ à cause de l'opérateur Λ, néanmoins on vérifie formellement que Θ_α conserve les supports, i.e. $\text{Supp}(\Theta_\alpha)(L) \subset \text{Supp}(L)$, en particulier l'image d'une application non-résonante est non-résonante. Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant, qui traduit en réalité le contrôle des petits diviseurs lorsque m est générique.

Théorème 4.2.3. *Il existe $\nu' > \nu$ et un opérateur $\Theta_\alpha^{-1} : \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N} \to \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu',N}$ tel que $\Theta_\alpha \circ \Theta_\alpha^{-1}(L) = L$ pour tout $L \in \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}$.*

Pour clarifier les idées et faire apparaître les petits diviseurs, nous commençons par démontrer le théorème 4.2.3 dans le cas particulier où chaque paquet spectral ne contient qu'une seule valeur propre. Autrement dit, $I_k = \{\lambda_k\}$ est un singleton et l'on a $\Lambda \Pi_k = \sqrt{\lambda_k^2 + m^2} \Pi_k$. Pour tout $L \in \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}$, on définit l'opérateur linéaire Θ_α^{-1} par

$$\Theta_\alpha^{-1} L(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\Upsilon_{n,\alpha}} \frac{L(\Pi_{k_1} u_1, \ldots, \Pi_{k_n} u_n)}{\sum_{\delta=1}^{n} (\mathbf{1}_{\delta \leq \alpha} - \mathbf{1}_{\delta > \alpha}) \sqrt{\lambda_{k_\delta}^2 + m^2}} \tag{19}$$

Comme m est générique, si $\delta(n) > 0$ est le nombre apparaissant à la ligne (8) alors on a pour tous entiers $k_1, \ldots, k_n \geq 1$

$$|\Theta_\alpha^{-1} L(\Pi_{k_1} u_1, \ldots, \Pi_{k_n} u_n)| \leq C \frac{(k_3^\star)^{\nu + \delta(n) + N}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^N} \prod_{\ell=1}^{n} ||u_\ell||_{L^2}$$

Le membre gauche est nul si $(k_1,\dots,k_n)\notin\Upsilon_{n,\alpha}$. Cela signifie que $\Theta_\alpha^{-1}L\in\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu+\delta(n),N}$. L'opérateur Θ_α^{-1} convient bien car en appliquant Θ_α au membre droit de (19) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta=1}^{n}(\mathbf{1}_{\beta\le\alpha}-\mathbf{1}_{\beta>\alpha})\sum_{\Upsilon_{NR}}\frac{L(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_{\beta-1}}u_{\beta-1},\Lambda\Pi_{k_\beta}u_\beta,\Pi_{k_{\beta+1}}u_{\beta+1},\dots,\Pi_{k_n}u_n)}{\sum_{\delta=1}^{n}(\mathbf{1}_{\delta\le\alpha}-\mathbf{1}_{\delta>\alpha})\sqrt{\lambda_{k_\delta}^2+m^2}}\\
=\;&\sum_{\Upsilon_{NR}}\left[\sum_{\beta=1}^{n}\frac{(\mathbf{1}_{\beta\le\alpha}-\mathbf{1}_{\beta>\alpha})\sqrt{\lambda_{k_\beta}^2+m^2}}{\sum_{\delta=1}^{n}(\mathbf{1}_{\delta\le\alpha}-\mathbf{1}_{\delta>\alpha})\sqrt{\lambda_{k_\delta}^2+m^2}}\right]L(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_n}u_n)\\
=\;&\sum_{\Upsilon_{NR}}L(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_n}u_n)\\
=\;&L(u_1,\dots,u_n)
\end{aligned}$$

Le cas général, sensiblement plus difficile, est obtenu par des arguments topologiques. Commençons par le lemme élémentaire.

Lemme 4.2.4. *Pour tout $L\in\mathcal{L}_n^{\nu,N}$, on note*

$$||L||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}}=\sup\frac{|L(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_n}u_n)|}{||u_1||_{L^2}\cdots||u_n||_{L^2}}\times\frac{(k_1^\star-k_2^\star+k_3^\star)^N}{(k_3^\star)^{\nu+N}}$$

avec $(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^{\star n}$ et $u_1,\dots,u_n\in\bigoplus_{k\ge1}Im(\Pi_k)$. L'espace $\mathcal{L}_n^{\nu,N}$ est un espace de Banach pour la norme $||\cdot||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}}$. En outre, pour tout ensemble $\Upsilon\subset\mathbb{N}^{\star n}$, le sous-espace suivant est fermé

$$\{L\in\mathcal{L}_n^{\nu,N},\quad Supp(L)\subset\Upsilon\}\tag{20}$$

Preuve. La complétude est facile car la norme est adaptée à l'espace. Les nombres ν et N sont fixés et n'interviennent pas dans la preuve. À tout $L\in\mathcal{L}_n^{\nu,N}$ on a associe l'application multilinéaire $L^\bullet$ définie par

$$L^\bullet(u_1,\dots,u_n)=\sum_{\mathbb{N}^{\star n}}\frac{(k_1^\star-k_2^\star+k_3^\star)^N}{k_3^{\star\nu+N}}L(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_n}u_n)$$

De plus on munit $\mathcal{M}:=\mathrm{Mul}\left(\underbrace{\bigoplus_{k\ge1}\mathrm{Im}(\Pi_k),\dots,\bigoplus_{k\ge1}\mathrm{Im}(\Pi_k)}_{n}\right)$ de la norme

$$||L^\bullet||:=\sup_{(k_1,\dots,k_n)}\sup_{(u_1,\dots,u_n)}\frac{L^\bullet(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_n}u_n)}{||u_1||_{L^2}\cdots||u_n||_{L^2}}$$

L'espace $\mathcal{M}$ est canoniquement isomorphe à l'espace de Banach

$$\prod_{k_1,\dots,k_n}\mathrm{Mul}\left(\mathrm{Im}(\Pi_{k_1}),\dots,\mathrm{Im}(\Pi_{k_n})\right)$$

Il s'ensuit que $(\mathcal{M}, ||\cdot||)$ est un espace de Banach. Par ailleurs, l'application $L \mapsto L^\bullet$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés entre $\mathcal{L}_n^{\nu,N}$ et $\mathcal{M}$. Cela prouve la complétude de $\mathcal{L}_n^{\nu,N}$. Enfin, la fermeture du sous-espace (20) est évidente en vertu de l'inégalité

$$\forall (k_1,\dots,k_n) \notin \Upsilon \quad \forall L \in \mathcal{L}_n^{\nu,N} \qquad \sup_{u_1,\dots,u_n} \frac{|L(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_n}u_n)|}{||u_1||_{L^2}\cdots||u_n||_{L^2}} \le C_{N,\nu}(k_1,\dots,k_n)||L||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}}$$

□

Définissons maintenant certains sous-espaces de $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}$.

Définition 4.2.5. *Fixons des nombres $n \in \mathbb{N}^\star, \alpha \in [[0,n]], A_0, A_1, A_2 > 0$ et définissons les trois ensembles suivants*

$$\begin{array}{rcl} S_1 &:=& \{(k_1,\dots,k_n) \in \Upsilon_{n,\alpha}, \quad A_0 k_2^\star < k_1^\star\} \\ S_2 &:=& \{(k_1,\dots,k_n) \in \Upsilon_{n,\alpha}, \quad A_0 k_2^\star \ge k_1^\star > A_1 (k_3^\star)^{A_2}\} \\ S_3 &:=& \{(k_1,\dots,k_n) \in \Upsilon_{n,\alpha}, \quad A_0 k_2^\star \ge k_1^\star \quad et \quad k_1^\star \le A_1 (k_3^\star)^{A_2}\} \end{array}$$

On rappelle que les entiers $k_1^\star \ge \dots \ge k_n^\star$ sont obtenus en ordonnant $k_1,\dots,k_n$. Par suite, on définit $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_\ell]$ le sous-espace des applications $L \in \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}$ telles que Supp$(L) \subset S_\ell$.

Les sous-espaces $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_\ell]$ sont fermés dans $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}$ et $\mathcal{L}_n^{\nu,N}$ (d'après le lemme 4.2.4). De plus nous avons trivialement la somme directe

$$\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N} = \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_1] \oplus \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_2] \oplus \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_3]$$

Dans la suite, nous allons montrer qu'il est possible de choisir des paramètres A_0, A_1, A_2 assez grands de sorte que l'on puisse construire l'opérateur Θ_α^{-1} par ses trois restrictions $\Theta_\alpha^{-1} : \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_\ell] \to \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu',N}[S_\ell]$ (avec $\ell \in [[1,3]]$). Cela est justifié après coup car l'opérateur Θ_α conserve formellement les supports : Supp$(\Theta_\alpha(L)) \subset$ Supp(L). Pour chaque $\ell \in \{1,2,3\}$, l'opérateur $\Theta_\alpha^{-1} : \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_\ell] \to \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu',N}[S_\ell]$ sera construit grâce à l'ouverture de l'ensemble des isomorphismes de Banach de l'algèbre de Banach des opérateurs bornés de l'espace de Banach $(\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_\ell], ||\cdot||_{\mathcal{L}_n^{\nu,\alpha}})$. Commençons par le support S_1. Son cas ne fait pas augmenter le paramètre ν.

Proposition 4.2.6. *Si $A_0 \gg 1$ alors l'opérateur Θ_α est inversible à droite sur $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_1]$.*

Preuve. On décompose $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_1] = \bigoplus_{a=1}^{n} \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_{1,a}]$ avec

$$S_{1,a} := \{(k_1,\dots,k_n) \in \Upsilon_{n,\alpha}, \quad A_0 k_2^\star < k_1^\star, \quad \text{et} \quad k_1^\star = k_a\}$$

Par commodité, on ne traite que le cas $a=1$, on décompose alors $\Theta_\alpha = U + \mathcal{E}$ où

$$\begin{array}{rcl} U(L) &=& (\mathbf{1}_{1\le\alpha} - \mathbf{1}_{1>\alpha}) L(\Lambda u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \mathcal{E}(L) &=& \displaystyle\sum_{\beta=2}^{n} (\mathbf{1}_{\beta\le\alpha} - \mathbf{1}_{\beta>\alpha}) L(u_1,\dots,u_{\beta-1},\Lambda u_\beta, u_{\beta+1},\dots,u_n) \end{array}$$

A priori l'opérateur U n'est même pas défini sur l'espace $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_{1,1}]$, par contre son inverse y est défini et même borné :

$$\begin{aligned} U^{-1}(L)(u_1,\ldots,u_n) &= (\mathbf{1}_{1\leq\alpha} - \mathbf{1}_{1>\alpha})L(\Lambda^{-1}u_1,u_2,\ldots,u_n) \\ ||U^{-1}(L)|| &\leq ||\Lambda^{-1}||_{L^2\to L^2}||L|| \\ ||U^{-1}|| &\leq ||\Lambda^{-1}||_{L^2\to L^2} \end{aligned}$$

Des estimations faciles donnent

$$\forall L \in \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_{1,1}], \quad \forall u_1,\ldots,u_n \in \bigoplus_{k\geq 1}\mathrm{Im}(\Pi_k), \quad \forall (k_1,\ldots,k_n)\in S_{1,1}$$

$$\begin{aligned} & |\mathcal{E}\circ U^{-1}(L)(\Pi_{k_1}u_1,\ldots,\Pi_{k_n}u_n)| \\ \leq & \sum_{\beta=2}^{n} |L(\Pi_{k_1}\Lambda^{-1}u_1,\Pi_{k_2}u_2,\ldots,\Pi_{k_{\beta-1}}u_{\beta-1},\Lambda\Pi_{k_\beta}u_\beta,\Pi_{k_{\beta+1}}u_{\beta+1},\ldots,\Pi_{k_n}u_n)| \\ \leq & ||L||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}}\frac{k_3^{\star\nu+N}}{(k_1^\star-k_2^\star+k_3^\star)^N}||\Lambda^{-1}\Pi_{k_1}u_1||_{L^2}\prod_{\beta=2}^{n}||\Lambda\Pi_{k_\beta}u_\beta||_{L^2} \\ \leq & C||L||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}}\frac{k_3^{\star\nu+N}}{(k_1^\star-k_2^\star+k_3^\star)^N}\times\frac{\sum_{\beta=2}^n k_\beta}{k_1}\prod_{\beta=1}^{n}||\Pi_{k_\beta}u_\beta||_{L^2} \\ \leq & C||L||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}}\frac{k_3^{\star\nu+N}}{(k_1^\star-k_2^\star+k_3^\star)^N}\times\frac{(n-1)k_2^\star}{k_1}\prod_{\beta=1}^{n}||u_\beta||_{L^2} \\ \leq & C||L||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}}\frac{k_3^{\star\nu+N}}{(k_1^\star-k_2^\star+k_3^\star)^N}\times\frac{n}{A_0}\prod_{\beta=1}^{n}||u_\beta||_{L^2} \end{aligned}$$

La constante C est une constante "spectrale" et ne dépend que de n, m et de la localisation du spectre de $\Lambda=\sqrt{T^2+m^2}$ (voir l'inclusion (5)). Les estimations précédentes se reformulent

$$\begin{aligned} ||\mathcal{E}\circ U^{-1}(L)||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}} &\leq \frac{Cn}{A_0}||L||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}} \\ ||\mathcal{E}\circ U^{-1}||_{\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_{1,1}]\to\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_{1,1}]} &\leq \frac{Cn}{A_0} \end{aligned}$$

Pourvu que $A_0 \gg 1$, $\mathrm{Id}+\mathcal{E}\circ U^{-1}$ est un opérateur linéaire inversible de l'espace de Banach $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_{1,1}]$. Mais alors, l'opérateur $U^{-1}\circ(\mathrm{Id}+\mathcal{E}\circ U^{-1})^{-1}$ est un inverse à droite de $U+\mathcal{E}=\Theta_\alpha$ sur $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_{1,1}]$. La même démarche est valable sur $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_{1,\ell}]$ pour tout $\ell\in[[1,n]]$. Il s'ensuit que Θ_α est inversible à droite sur $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_1]$. $\square$

Pour tout entier $k\geq 1$ on indexe $\lambda_{k,\ell}$ les éléments de I_k et on note $\phi_{k,\ell}\in L^2_\pi(X,\mathbb{C})$ un mode propre associé. Ici $1\leq\ell\leq Ck^{\frac{\dim\Sigma-2}{2}}$. On définit maintenant l'unique opérateur d'inverse borné Λ_0 de $L^2(X,\mathbb{C})$ qui vérifie

$$\Lambda_0\phi_{k,\ell}=\sqrt{\lambda_{k,1}^2+m^2}\phi_{k,\ell}$$

L'opérateur Λ_0 a toutes ses valeurs propres simples et approxime Λ_0 en ce sens que nous avons pour tout entier $k \geq 1$:

$$||(\Lambda_0 - \Lambda) \circ \Pi_k||_{L^2} = \sup_{\ell} \left| \sqrt{\lambda_{k,1}^2 + m^2} - \sqrt{\lambda_{k,\ell}^2 + m^2} \right| \leq \sup_{\ell} |\lambda_{k,1} - \lambda_{k,\ell}| \leq \frac{C}{k} \tag{21}$$

Nous allons appliquer la même idée de démonstration que dans la proposition 4.2.6.

Proposition 4.2.7. *Si $A_1, A_2 \gg 1$ alors il existe $\nu' > \nu$ et un opérateur $\Theta_\alpha^{-1} : \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_2] \to \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu',N}[S_2]$ tels que $\Theta_\alpha \circ \Theta_\alpha^{-1} = Id$.*

Preuve. De nouveau, nous décomposons $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_2] = \bigoplus_{a \neq b} \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_{2,a,b}]$ avec

$$S_{2,a,b} = \{(k_1, \ldots, k_n) \in \Upsilon_{n,\alpha}, \quad A_0 k_2^\star \geq k_1^\star > A_1 k_3^{\star A_2}, \quad (k_1^\star, k_2^\star) = (k_a, k_b)\} \tag{22}$$

et nous allons inverser à droite l'opérateur Θ_α sur chaque sous-espace fermé $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_{2,a,b}]$. Pour alléger les notations, on considère le cas $(a, b) = (1, 2)$. Les autres cas se traitent de la même manière. Nous écrivons $\Theta_\alpha = U + \mathcal{E}$ avec

$$\begin{aligned}
U(L)(u_1, \ldots, u_n) &= (\mathbf{1}_{1\leq\alpha} - \mathbf{1}_{1>\alpha}) L(\Lambda_0 u_1, \ldots, u_n) + (\mathbf{1}_{2\leq\alpha} - \mathbf{1}_{2>\alpha}) L(u_1, \Lambda_0 u_2, \ldots, u_n) \\
&\quad + \sum_{\beta=3}^{n} (\mathbf{1}_{\beta\leq\alpha} - \mathbf{1}_{\beta>\alpha}) L(u_1, \ldots, u_{\beta-1}, \Lambda u_\beta, u_{\beta+1}, \ldots, u_n) \\
\mathcal{E}(L)(u_1, \ldots, u_n) &= (\mathbf{1}_{1\leq\alpha} - \mathbf{1}_{1>\alpha}) L((\Lambda - \Lambda_0) u_1, u_2, \ldots, u_n) \\
&\quad + (\mathbf{1}_{2\leq\alpha} - \mathbf{1}_{2>\alpha}) L(u_1, (\Lambda - \Lambda_0) u_2, \ldots, u_n)
\end{aligned}$$

Soit $L \in \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_{2,1,2}]$, en décomposant $u_1, \ldots, u_n \in \bigoplus_{k\geq1} \mathrm{Im}(\Pi_k)$ sur les modes propres $\phi_{k,\ell}$ nous obtenons la formule développée de $U(L)(u_1, \ldots, u_n)$

$$\sum_{S_{2,1,2}} \sum_{\ell_3} \cdots \sum_{\ell_n} \Big[(\mathbf{1}_{1\leq\alpha} - \mathbf{1}_{1>\alpha}) \sqrt{\lambda_{k_1,1}^2 + m^2} + (\mathbf{1}_{2\leq\alpha} - \mathbf{1}_{2>\alpha}) \sqrt{\lambda_{k_2,1}^2 + m^2} +$$

$$\sum_{\beta=3}^{n} (\mathbf{1}_{\beta\leq\alpha} - \mathbf{1}_{\beta>\alpha}) \sqrt{\lambda_{k_\beta,\ell_\beta}^2 + m^2} \Bigg] L\left(\Pi_{k_1} u_1, \Pi_{k_2} u_2, \langle u_3, \phi_{k_3,\ell_3}\rangle \phi_{k_3,\ell_3}, \cdots, \langle u_n, \phi_{k_n,\ell_n}\rangle \phi_{k_n,\ell_n}\right)$$

Comme m est générique, on peut directement définir $U^{-1}(L)(u_1, \ldots, u_n)$ par

$$\sum_{S_{2,1,2}} \sum_{\ell_3} \cdots \sum_{\ell_n} \Big[(\mathbf{1}_{1\leq\alpha} - \mathbf{1}_{1>\alpha}) \sqrt{\lambda_{k_1,1}^2 + m^2} + (\mathbf{1}_{2\leq\alpha} - \mathbf{1}_{2>\alpha}) \sqrt{\lambda_{k_2,1}^2 + m^2} +$$

$$\sum_{\beta=3}^{n} (\mathbf{1}_{\beta\leq\alpha} - \mathbf{1}_{\beta>\alpha}) \sqrt{\lambda_{k_\beta,\ell_\beta}^2 + m^2} \Bigg]^{-1} L\left(\Pi_{k_1} u_1, \Pi_{k_2} u_2, \langle u_3, \phi_{k_3,\ell_3}\rangle \phi_{k_3,\ell_3}, \cdots, \langle u_n, \phi_{k_n,\ell_n}\rangle \phi_{k_n,\ell_n}\right)$$

Vérifions qu'il existe $\nu' > \nu$ tel que $U^{-1}(L)$ appartient à $\mathcal{NR}^{\nu',N}_{n,\alpha}[S_{2,1,2}]$. Tout d'abord il est clair que $\mathrm{Supp}(U^{-1}(L)) \subset S_{2,1,2}$. Ensuite, d'après (8), nous avons

$$\begin{aligned}
& |U^{-1}(L)(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_n}u_n)| \\
\leq\ & C(n)\sum_{\ell_3,\cdots,\ell_n} k_3^{\star\delta(n)}|L\left(\Pi_{k_1}u_1,\Pi_{k_2}u_2,\langle u_3,\phi_{k_3,\ell_3}\rangle\phi_{k_3,\ell_3},\cdots,\langle u_n,\phi_{k_n,\ell_n}\rangle\phi_{k_n,\ell_n}\right)| \\
\leq\ & C(n)||L||_{\mathcal{L}^{\nu,N}_n}\sum_{\ell_3,\cdots,\ell_n}\frac{k_3^{\star\delta(n)+\nu+N}}{(k_1^\star-k_2^\star+k_3^\star)N}\prod_{\beta=1}^n||u_{k_\beta}||_{L^2}
\end{aligned}$$

Comme ℓ_β parcourt un ensemble de cardinal $\mathrm{Card}(I_{k_\beta}) \leq Ck_\beta^{\frac{\dim(\Sigma)-2}{2}}$, nous avons

$$\begin{aligned}
|U^{-1}(L)(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_n}u_n)| &\leq C(n)||L||_{\mathcal{L}^{\nu,N}_n}\frac{k_3^{\star\nu'+N}}{(k_1^\star-k_2^\star+k_3^\star)^N}\prod_{\beta=1}^n||u_{k_\beta}||_{L^2} \\
||U^{-1}(L)||_{\mathcal{L}^{\nu',N}_n} &\leq C(n)||L||_{\mathcal{L}^{\nu,N}_n} \\
||U^{-1}||_{\mathcal{NR}^{\nu,N}_{n,\alpha}[S_{2,1,2}]\to\mathcal{NR}^{\nu',N}_{n,\alpha}[S_{2,1,2}]} &\leq C(n)
\end{aligned}$$

avec $\nu' = \delta(n)+\nu+(n-2)\frac{\dim(\Sigma)-2}{2}$. Nous allons maintenant justifier l'inégalité

$$||\mathcal{E}||_{\mathcal{NR}^{\nu',N}_{n,\alpha}[S_{2,1,2}]\to\mathcal{NR}^{\nu'-A_2,N}_{n,\alpha}[S_{2,1,2}]} \leq \frac{C}{A_1} \tag{23}$$

Cela assurera que si $A_1, A_2 \gg 1$ alors $(\mathrm{Id}+\mathcal{E}\circ U^{-1})^{-1}$ est un opérateur inversible et borné de l'espace de Banach $\mathcal{NR}^{\nu,N}_{n,\alpha}[S_{2,1,2}]$ et donc l'opérateur

$$U^{-1}(I+\mathcal{E}\circ U^{-1})^{-1} : \mathcal{NR}^{\nu,N}_{n,\alpha}([S_{2,1,2}]) \to \mathcal{NR}^{\nu',N}_{n,\alpha}[S_{2,1,2}]$$

sera un inverse à droite de $U+\mathcal{E}$. Pour tout $L \in \mathcal{NR}^{\nu',N}_{n,\alpha}[S_{2,1,2}]$, nous avons

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}(L)(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_n}u_n)| &\leq |L((\Lambda-\Lambda_0)\Pi_{k_1}u_1,\Pi_{k_2}u_2,\dots,\Pi_{k_n}u_n|+ \\
&\quad\ |L(\Pi_{k_1}u_1,(\Lambda-\Lambda_0)\Pi_{k_2}u_2,\dots,\Pi_{k_n}u_n)| \\
&\leq C||L||_{\mathcal{L}^{\nu',N}_n}\frac{k_3^{\star\nu'+N}}{(k_1^\star-k_2^\star+k_3^\star)^N}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)\prod_{\beta=1}^n||u_\beta||_{L^2}
\end{aligned}$$

La dernière majoration découle de (21). Par suite, la définition (22) amène à

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}(L)(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_n}u_n)| &\leq C||L||_{\mathcal{L}^{\nu',N}_n}\frac{k_3^{\star\nu'-A_2+N}}{A_1(k_1^\star-k_2^\star+k_3^\star)^N}\prod_{\beta=1}^n||u_\beta||_{L^2} \\
||\mathcal{E}(L)||_{\mathcal{NR}^{\nu'-A_2,N}_{n,\alpha}[S_{2,1,2}]} &\leq \frac{C}{A_1}||L||_{\mathcal{NR}^{\nu',N}_{n,\alpha}[S_{2,1,2}]}
\end{aligned}$$

L'inégalité (23) est prouvée. La preuve est finie. $\square$

Il nous reste à traiter le support S_3.

Proposition 4.2.8. *Il existe $\nu' > \nu$ et un opérateur $\Theta_\alpha^{-1} : \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_3] \to \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu',N}[S_3]$ tels que $\Theta_\alpha \circ \Theta_\alpha^{-1} = Id$.*

Preuve. On raisonne de la même manière que la preuve de la proposition 4.2.7. L'inégalité $k_1^\star \leq A_1 k_3^{\star A_2}$ va nous permettre d'inverser Θ_α directement. Pour tout $L \in \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu',N}[S_3]$ où $\nu' > \nu$ sera défini plus loin, $\Theta_\alpha(L)(u_1, \ldots, u_n)$ est égal à

$$\sum_{S_3} \sum_{\ell_1} \cdots \sum_{\ell_n} L(\langle u_1, \phi_{k_1,\ell_1}\rangle \phi_{k_1,\ell_1}, \ldots, \langle u_n, \phi_{k_n,\ell_n}\rangle \phi_{k_n,\ell_n}) \sum_{\beta=1}^{n} (\mathbf{1}_{\beta\leq\alpha} - \mathbf{1}_{\beta>\alpha}) \sqrt{\lambda_{k_\beta,\ell_\beta}^2 + m^2}$$

Si $L \in \mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu,N}[S_3]$ alors nous définissons

$$\Theta_\alpha^{-1}(L)(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{S_3} \sum_{\ell_1} \cdots \sum_{\ell_n} \frac{L(\langle u_1, \phi_{k_1,\ell_1}\rangle \phi_{k_1,\ell_1}, \ldots, \langle u_n, \phi_{k_n,\ell_n}\rangle \phi_{k_n,\ell_n})}{\sum_{\beta=1}^{n} (\mathbf{1}_{\beta\leq\alpha} - \mathbf{1}_{\beta>\alpha}) \sqrt{\lambda_{k_\beta,\ell_\beta}^2 + m^2}}$$

De nouveau, en utilisant (8) et $1 \leq \ell_\beta \leq C k_\beta^{\frac{\dim(\Sigma)-2}{2}}$, il vient pour tout $(k_1, \ldots, k_n) \in S_3$

$$\begin{aligned}
|\Theta_\alpha^{-1}(L)(\Pi_{k_1}u_1, \ldots, \Pi_{k_n}u_n)| &\leq C(n)||L||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}} \frac{k_3^{\star\delta(n)+\nu+N}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^N} \prod_{\beta=1}^{n} k_\beta^{\frac{\dim(\Sigma)-2}{2}} ||u_\beta||_{L^2} \\
&\leq C(n)A_1^n||L||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}} \frac{k_3^{\star\nu'+N}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^N} \prod_{\beta=1}^{n} ||u_\beta||_{L^2} \\
||\Theta_\alpha^{-1}(L)||_{\mathcal{L}_n^{\nu',N}} &\leq C(n)A_1^n||L||_{\mathcal{L}_n^{\nu,N}}
\end{aligned}$$

avec $\nu' = \delta(n) + \nu + nA_2\frac{\dim(\Sigma)-2}{2}$. Par construction $\Theta_\alpha \Theta_\alpha^{-1} = \text{Id}$. □

En conclusion, pour des paramètres A_0, A_1 et A_2 assez grands dans les définitions des supports S_1, S_2 et S_3, il existe $\nu' > \nu$ tel que l'opérateur Θ_α est inversible à droite de $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu}$ à valeurs dans $\mathcal{NR}_{n,\alpha}^{\nu'}$. Le théorème 4.2.3 est démontré.

4.3 Résolution de l'équation homologique

Grâce au théorème 4.2.3, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Soient $n \geq 3$ et $\nu > 0$, pour tout $G \in \mathcal{H}_n^\nu$ il existe $\nu' > \nu$ et $F \in \mathcal{H}_n^{\nu'}$ tels que $\{H_0, F\} + G$ appartient à $\mathcal{H}_n^{\nu'}$ et commute, au sens des crochets de Poisson, avec les actions J_k pour tout $k \geq 1$.*

Nous commençons par décomposer G sous la forme

$$G(u) = \sum_{\alpha=0}^{n} A_{\alpha,n-\alpha}(L_{\alpha,n-\alpha} + \overline{L_{\alpha,n-\alpha}})(u)$$

Quitte à remplacer $L_{\alpha,n-\alpha}$ par l'application $\mathbb{R}[j]$-multilinéaire

$$(u_1,\dots,u_n)\mapsto \frac{1}{\alpha!(n-\alpha)!}\sum_{\substack{\sigma_1\in\mathfrak{S}_\alpha\\ \sigma_2\in\mathfrak{S}([[\alpha+1,n]])}} L_{\alpha,n-\alpha}(u_{\sigma_1(1)},\dots,u_{\sigma_1(\alpha)},u_{\sigma_2(\alpha+1)},\dots,u_{\sigma_2(n)})$$

nous pouvons supposer que $L_{\alpha,n-\alpha}$ est $(\alpha,n-\alpha)$-symétrique, c'est-à-dire symétrique par rapport à ses α premières variables et ses $n-\alpha$ dernières variables. Nous aurons besoin du lemme algébrique suivant :

Lemme 4.3.2. *Fixons $\alpha\in[[0,n]]$ et $L\in\mathcal{L}_n^{\nu,N}$ une application multilinéaire tels que*

i) pour tout $u\in\bigoplus_{k\geq 1} Im(\Pi_k)$ on a $L(\underbrace{u,\dots,u}_{\alpha},\underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{n-\alpha})=0$

ii) L est $(\alpha,n-\alpha)$-symétrique

alors $L=0$.

Preuve. Le corps $\mathbb{R}[j]$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, donc on peut considérer son cercle unité $\{e^{jt},t\in\mathbb{R}\}$. Si u est de la forme $ve^{jt}+\widetilde{e^{jt}w}=ve^{jt}+e^{-jt}\widetilde{w}$ alors le point i) donne

$$0=L(\underbrace{v,\dots,v}_{\alpha},\underbrace{\widetilde{w},\dots,\widetilde{w}}_{n-\alpha})=e^{njt}L(\underbrace{v,\dots,v}_{\alpha},\underbrace{w,\dots,w}_{n-\alpha})+\sum_{\ell=-n}^{n-2}e^{\ell jt}c_\ell(v,w)$$

L'unicité de la décomposition en série de Fourier assure que le coefficient de e^{njt} est nul. Ensuite, nous avons la formule de polarisation pour tous $u_1,\dots,u_n$:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\epsilon\in\{\pm\}^n}\varepsilon_1\dots\varepsilon_n L\left(\overbrace{\sum_{\ell=1}^{\alpha}\epsilon_\ell u_\ell,\cdots\sum_{\ell=1}^{\alpha}\epsilon_\ell u_\ell}^{\alpha},\overbrace{\sum_{\ell=\alpha+1}^{n}\epsilon_\ell u_\ell,\cdots\sum_{\ell=\alpha+2}^{n}\epsilon_\ell u_\ell}^{n-\alpha}\right)\\
&= \sum_{\substack{\varepsilon_1=\pm1\\ \dots\\ \varepsilon_n=\pm1}}\ \sum_{\substack{\ell_1\in[[1,\alpha]]\\ \dots\\ \ell_\alpha\in[[1,\alpha]]}}\ \sum_{\substack{\ell_{\alpha+1}\in[[\alpha+1,n]]\\ \dots\\ \ell_n\in[[\alpha+1,n]]}}\varepsilon_1\dots\varepsilon_n\varepsilon_{\ell_1}\dots\varepsilon_{\ell_n}L(u_{\ell_1},\dots,u_{\ell_n})\\
&= \sum_{\substack{\ell_1\in[[1,\alpha]]\\ \dots\\ \ell_\alpha\in[[1,\alpha]]}}\ \sum_{\substack{\ell_{\alpha+1}\in[[\alpha+1,n]]\\ \dots\\ \ell_n\in[[\alpha+1,n]]}}L(u_{\ell_1},\dots,u_{\ell_n})\sum_{\substack{\varepsilon_1=\pm1\\ \dots\\ \varepsilon_n=\pm1}}\varepsilon_1\dots\varepsilon_n\varepsilon_{\ell_1}\dots\varepsilon_{\ell_n}
\end{aligned}$$

Or on a

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1=\pm1\\ \dots\\ \varepsilon_n=\pm1}}\varepsilon_1\dots\varepsilon_n\varepsilon_{\ell_1}\dots\varepsilon_{\ell_n}=\begin{cases}2^n & \text{si}\quad \{1,\dots,\alpha\}=\{\ell_1,\dots,\ell_\alpha\}\\ 0 & \text{si}\quad \{1,\dots,\alpha\}\neq\{\ell_1,\dots,\ell_\alpha\}\end{cases}$$

Le point ii) donne alors la conclusion

$$0=\alpha!(n-\alpha)!2^nL(u_1,\dots,u_n)$$

$\square$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $u \in H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$, nous avons

$$G(e^{jt}u) = \sum_{\alpha=0}^{n} e^{jt(2\alpha-2n)} A_{\alpha,n-\alpha}(L_{\alpha,n-\alpha} + \overline{L_{\alpha,n-\alpha}})(u) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Comme G est à valeurs réelles, donc complexe, nous avons $\widetilde{G} = G$, ce qui implique par unicité des coefficients de Fourier les égalités

$$\widetilde{A_{n-\alpha,\alpha}}(L_{n-\alpha,\alpha} + \overline{L_{n-\alpha,\alpha}}) = A_{\alpha,n-\alpha}(L_{\alpha,n-\alpha} + \overline{L_{\alpha,n-\alpha}})$$

$$(\widetilde{L_{n-\alpha,\alpha}} + \widetilde{\overline{L_{n-\alpha,\alpha}}})(\underbrace{u, \dots, u}_{n-\alpha}, \underbrace{\widetilde{u}, \dots, \widetilde{u}}_{\alpha}) = (L_\alpha + \overline{L_\alpha})(\underbrace{u, \dots, u}_{\alpha}, \underbrace{\widetilde{u}, \dots, \widetilde{u}}_{n-\alpha})$$

Le lemme 4.3.2 amène à

$$(\widetilde{L_{n-\alpha,\alpha}} + \widetilde{\overline{L_{n-\alpha,\alpha}}})(\widetilde{u_{\alpha+1}}, \dots, \widetilde{u_n}, \widetilde{u_1}, \dots, \widetilde{u_\alpha}) = (L_{\alpha,n-\alpha} + \overline{L_{\alpha,n-\alpha}})(u_1, \dots, u_n) \tag{24}$$

Notons $L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}$ la partie non-résonante de $L_{\alpha,n-\alpha}$, c'est-à-dire

$$L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\Upsilon_{n,\alpha}} L_{\alpha,n-\alpha}(\Pi_{k_1} u_1, \dots, \Pi_{k_n} u_n)$$

où $\Upsilon_{n,\alpha}$ est donné dans la définition 4.2.1. Il est clair que $L^{NR}_{\alpha,n-\alpha} \in \mathcal{NR}^{\nu,N}_{n,\alpha}$, en outre on a

$$(\widetilde{L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}} + \widetilde{\overline{L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}}})(\widetilde{u_{\alpha+1}}, \dots, \widetilde{u_n}, \widetilde{u_1}, \dots, \widetilde{u_\alpha}) =$$

$$\sum_{\Upsilon_{n,\alpha}} (\widetilde{L_{n-\alpha,\alpha}} + \widetilde{\overline{L_{n-\alpha,\alpha}}})(\Pi_{k_1} \widetilde{u_{\alpha+1}}, \dots, \Pi_{k_{n-\alpha}} \widetilde{u_n}, \Pi_{k_{n-\alpha+1}} \widetilde{u_1}, \dots, \Pi_{k_n} \widetilde{u_\alpha}) \tag{25}$$

En remarquant que la permutation $(k_1, \dots, k_n) \mapsto (k_{\alpha+1}, \dots, k_n, k_1, \dots, k_\alpha)$ laisse invariant $\Upsilon_{n,\alpha}$, l'expression (25) devient

$$\sum_{\Upsilon_{n,\alpha}} (\widetilde{L_{n-\alpha,\alpha}} + \widetilde{\overline{L_{n-\alpha,\alpha}}})(\Pi_{k_{\alpha+1}} \widetilde{u_{\alpha+1}}, \dots, \Pi_{k_n} \widetilde{u_n}, \Pi_{k_1} \widetilde{u_1}, \dots, \Pi_{k_\alpha} \widetilde{u_\alpha})$$

Grâce à (24), on obtient

$$(\widetilde{L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}} + \widetilde{\overline{L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}}})(\widetilde{u_{\alpha+1}}, \dots, \widetilde{u_n}, \widetilde{u_1}, \dots, \widetilde{u_\alpha}) = (L^{NR}_{\alpha,n-\alpha} + \overline{L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})(u_1, \dots, u_\alpha, u_{\alpha+1}, \dots, u_n) \tag{26}$$

Pour continuer, nous aurons besoin de l'injectivité de l'opérateur Θ_α.

Lemme 4.3.3. *Soit $L \in \mathcal{NR}^{\nu',N}_{n,\alpha}$ tel que $\Theta_\alpha(L) = 0$ alors $L = 0$.*

Preuve. Considérons $u_1, \dots, u_n$ sont des modes propres de T associés aux valeurs propres $(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_n}) \in \prod_{\beta=1}^n I_{k_\beta}$. Si $n = 2\alpha$ et $\{k_1, \dots, k_{n/2}\} = \{k_{n/2+1}, \dots, k_n\}$ alors $L(u_1, \dots, u_n) = 0$ car L est non-résonante (voir la définition 4.2.1). Sinon, on a

$$0 = \Theta_\alpha(L)(u_1, \dots, u_n) = \left(\sum_{\beta=1}^{n} (\mathbf{1}_{\beta \le \alpha} - \mathbf{1}_{\beta > \alpha}) \sqrt{\lambda_{k_\beta}^2 + m^2} \right) L(u_1, \dots, u_n)$$

et la généricité de m assure que $L(u_1, \dots, u_n) = 0$. Comme L est une application multilinéaire définie sur $\bigoplus_{k \ge 1} \mathrm{Im}(\Pi_k)$, on obtient $L = 0$. $\square$

Nous allons appliquer le lemme précédent pour montrer l'égalité

$$\begin{aligned}
&(\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}+\overline{\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})(u_{n-\alpha+1},\dots,u_n,u_1,\dots,u_{n-\alpha}) \\
=\; & -(\widetilde{\Theta_{n-\alpha}^{-1}L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}}+\widetilde{\overline{\Theta_{n-\alpha}^{-1}L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}}})(\widetilde{u_1},\dots,\widetilde{u_n})
\end{aligned} \tag{27}$$

Les deux membres sont bien deux applications $\mathbb{R}[j]$-multilinéaires appartenant à $\mathcal{L}_n^{\nu,N}$ (on remarquera la $\mathbb{R}[j]$-multilinéarité du membre droit grâce à la double application de la conjugaison $z\mapsto\widetilde{z}$). Appliquons l'opérateur $\Theta_{n-\alpha}$ au membre gauche de (27) :

$$\sum_{\beta=1}^{n-\alpha}(\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}+\overline{\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})(u_{n-\alpha+1},\dots,u_n,u_1,\dots,u_{\beta-1},\Lambda u_\beta,u_{\beta+1},\dots,u_{n-\alpha})$$

$$\begin{aligned}
-\sum_{\beta=n-\alpha+1}^{n}&(\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}+\overline{\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})(u_{n-\alpha+1},\dots,u_\beta,\Lambda u_{\beta+1},u_{\beta+1},\dots,u_n,u_1,\dots,u_{n-\alpha}) \\
&= -(\Theta_\alpha\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}+\overline{\Theta_\alpha\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})(u_{n-\alpha+1},\dots,u_n,u_1,\dots,u_{n-\alpha}) \\
&= -(L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}+\overline{L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})(u_{n-\alpha+1},\dots,u_n,u_1,\dots,u_{n-\alpha}) \\
&= -(\widetilde{L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}}+\widetilde{\overline{L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}}})(\widetilde{u_1},\dots,\widetilde{u_n})
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la formule (26) dans la dernière égalité. L'injectivité de $\Theta_{n-\alpha}$ prouve l'égalité (27).

A présent, nous définissons notre candidat de polynôme F pour démontrer le théorème 4.3.1.

$$F:=j\sum_{\alpha=0}^{n}A_{\alpha,n-\alpha}(\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}+\overline{\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})$$

c'est-à-dire pour tout $u\in H^s_\pi(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})$:

$$F(u)=j\sum_{\alpha=0}^{n}(\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}+\overline{\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})(\underbrace{u,\dots,u}_{\alpha},\underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{n-\alpha})$$

Vérifions que $F:H^s_\pi(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})\to\mathbb{C}^{\otimes 2}$ est à valeurs réelles. De manière évidente $\overline{F}=F$, donc F est à valeurs dans $\mathbb{R}[j]$. Ensuite, l'égalité (27) donne

$$\begin{aligned}
\widetilde{F(u)} &= -j\sum_{\alpha=0}^{n}(\widetilde{\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}}+\widetilde{\overline{\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}}})(\underbrace{u,\dots,u}_{\alpha},\underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{n-\alpha}) \\
&= j\sum_{\alpha=0}^{n}(\Theta_{n-\alpha}^{-1}L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}+\overline{\Theta_{n-\alpha}^{-1}L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}})(\underbrace{u,\dots,u}_{n-\alpha},\underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{\alpha}) \\
&= j\sum_{\alpha=0}^{n}A_{n-\alpha,\alpha}(\Theta_{n-\alpha}^{-1}L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}+\overline{\Theta_{n-\alpha}^{-1}L^{NR}_{n-\alpha,\alpha}})(u) \\
&= F(u)
\end{aligned}$$

Ainsi, F est à valeurs réelles. D'après le théorème 4.2.3, F appartient à $\mathcal{H}_n^{\nu'}$ (voir la définition 3.2.6). Nous pouvons maintenant démontrer la conclusion du théorème 4.3.1. Par multilinéarité, nous obtenons à l'aide de la formule (10) pour tout $u \in H^s_\pi(X, \mathbb{C}^{\otimes 2})$

$$\{H_0, F\}(u) = d_u F(X_{H_0}) = d_u F(j\Lambda u)$$

$$= j\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=1}^{\alpha}(\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha} + \overline{\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})(\underbrace{u,\ldots,u,j\Lambda u}_{\beta},\underbrace{u,\ldots,u}_{\alpha-\beta},\underbrace{\widetilde{u},\ldots,\widetilde{u}}_{n-\alpha})$$

$$+j\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=\alpha+1}^{n}(\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha} + \overline{\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})(\underbrace{u,\ldots,u}_{\alpha},\underbrace{\widetilde{u},\ldots,\widetilde{u},\widetilde{j\Lambda u}}_{\beta-\alpha},\underbrace{\widetilde{u},\ldots,\widetilde{u}}_{n-\beta})$$

Rappelons que $\widetilde{j} = -j$. La $\mathbb{R}[j]$-multilinéarité intervient de manière cruciale ici :

$$\begin{aligned}\{H_0, F\} &= j^2\sum_{\alpha=0}^{n} A_{\alpha,n-\alpha}(\Theta_\alpha\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha} + \overline{\Theta_\alpha\Theta_\alpha^{-1}L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})\\ \{H_0, F\} &= -\sum_{\alpha=0}^{n} A_{\alpha,n-\alpha}(L^{NR}_{\alpha,n-\alpha} + \overline{L^{NR}_{\alpha,n-\alpha}})\end{aligned} \tag{28}$$

Par conséquent, $\{H_0, F\} + G$ ne contient que des termes trivialement résonants, c'est-à-dire à support inclus dans $\mathbb{N}^{\star n}\backslash\Upsilon_{n,\alpha}$:

$$\{H_0, F\}u + G(u) = \sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\substack{\{k_1,\cdots,k_\alpha\}\\=\\\{k_{1+\alpha},\cdots,k_n\}}}(L_{\alpha,n-\alpha} + \overline{L_{\alpha,n-\alpha}})(\Pi_{k_1}u,\ldots,\Pi_{k_\alpha}u,\widetilde{\Pi_{k_{\alpha+1}}u},\ldots,\widetilde{\Pi_{k_n}u})$$

Si n est impair, alors on a $\{H_0, F\} + G = 0$ et le théorème 4.3.1 est démontré. Si n est pair alors on a

$$\{H_0, F\}u + G(u) = \sum_{\substack{\{k_1,\cdots,k_{\frac{n}{2}}\}\\=\\\{k_{\frac{n}{2}+1},\cdots,k_n\}}}(L_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} + \overline{L_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}})(\Pi_{k_1}u,\ldots,\Pi_{k_{\frac{n}{2}}}u,\widetilde{\Pi_{k_{1+\frac{n}{2}}}u},\ldots,\widetilde{\Pi_{k_n}u})$$

D'après (24), l'expression précédente est à valeurs dans $\mathbb{C}\cap\mathbb{R}[j] = \mathbb{R}$. On pourrait aussi remarquer que $\{H_0, F\} + G$ est à valeurs réelles car H_0, F et G sont à valeurs réelles. Par ailleurs $L_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} \in \mathcal{L}_n^{\nu,+\infty}$. L'appartenance de $\{H_0, F\} + G \in \mathcal{H}_n^{\nu} \subset \mathcal{H}_n^{\nu'}$ en découle. Il nous reste à calculer les crochets de Poisson $\{\{\{H_0, F\} + G\}, J_k\}$. D'après le lemme 3.3.2, on a

$$\{\{\{H_0, F\} + G\}, J_k\}u = d_u(\{H_0, F\} + G)(j\Pi_k(u)) =$$

$$\sum_{\substack{\{k_1,\cdots,k_{\frac{n}{2}}\}\\=\\\{k_{\frac{n}{2}+1},\cdots,k_n\}}}(L_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} + \overline{L_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}})(j\Pi_{k_1}\Pi_k u,\ldots,\Pi_{k_{\frac{n}{2}}}u,\widetilde{\Pi_{k_{1+\frac{n}{2}}}u},\ldots,\widetilde{\Pi_{k_n}u}) + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{\substack{\{k_1,\cdots,k_{\frac{n}{2}}\}\\ = \\ \{k_{\frac{n}{2}+1},\cdots,k_n\}}} (L_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} + \overline{L_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}})(\Pi_{k_1}u,\ldots,\Pi_{k_{\frac{n}{2}}}u,\widetilde{\Pi_{k_{1+\frac{n}{2}}}u},\ldots,\widetilde{\Pi_{k_n}j\Pi_k u})$$

En utilisant $\Pi_{k_i}\Pi_k = \delta_{k,k_i}\Pi_k$ et $\widetilde{j} = -j$, l'expression devient

$$\sum_{\substack{\{k_1,\cdots,k_{\frac{n}{2}}\}\\ = \\ \{k_{\frac{n}{2}+1},\cdots,k_n\}}} \left(\sum_{i\leq\frac{n}{2}}\delta_{k_i,k} - \sum_{i>\frac{n}{2}}\delta_{k_i,k}\right)(L_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} + \overline{L_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}})(\Pi_{k_1}u,\ldots,\Pi_{k_{\frac{n}{2}}}u,\widetilde{\Pi_{k_{1+\frac{n}{2}}}u},\ldots,\widetilde{\Pi_{k_n}u})$$

et est donc nulle.

4.4 Considérations sur les crochets de Poisson

Commençons par un lemme trivial de dualité.

Lemme 4.4.1. *Soit $\xi : L^2(X,\mathbb{C}^{\otimes 2}) \to \mathbb{R}$ une forme $\mathbb{R}$-linéaire vérifiant l'estimation*

$$\forall h \in L^2(X,\mathbb{C}^{\otimes 2}) \quad |\xi(h)| \leq C||h||_{H^{-s}}$$

alors il existe un unique $a \in H^s(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})$ tel que $\xi(h) = \omega(a,h)$ pour tout $h \in L^2(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})$.

En se basant sur les estimations de [DS06b], nous montrons l'invariance par crochet de Poisson des classes $\mathcal{H}_n^\nu$.

Proposition 4.4.2. *Soient $n,\widehat{n} \geq 3$ et $\nu,\widehat{\nu} > 0$, nous avons l'inclusion*

$$\{\mathcal{H}_n^\nu,\mathcal{H}_{\widehat{n}}^{\widehat{\nu}}\} \subset \mathcal{H}_{n+\widehat{n}-2}^{\nu+\widehat{\nu}+1} \tag{29}$$

Preuve. Soit $(P,Q) \in \mathcal{H}_n^\nu \times \mathcal{H}_{\widehat{n}}^{\widehat{\nu}}$, nous écrivons

$$\begin{aligned} P &= \sum_{\alpha=0}^{n} A_{\alpha,n-\alpha}(P_{\alpha,n-\alpha}), \quad P_{\alpha,n-\alpha} \in \mathcal{L}_n^{\nu,\infty}, \qquad \overline{P_{\alpha,n-\alpha}} = P_{\alpha,n-\alpha} \\ Q &= \sum_{\alpha=0}^{\widehat{n}} A_{\alpha,\widehat{n}-\alpha}(Q_{\alpha,\widehat{n}-\alpha}), \quad Q_{\alpha,n-\alpha} \in \mathcal{L}_{\widehat{n}}^{\widehat{\nu},\infty}, \qquad \overline{Q_{\alpha,n-\alpha}} = Q_{\alpha,n-\alpha} \end{aligned}$$

Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $P_{\alpha,n-\alpha}$ et $Q_{\alpha,n-\alpha}$ sont $(\alpha,n-\alpha)$-symétriques. Pour tous $u,h \in H^s_\pi(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})$ on a

$$\begin{aligned} d_uP(h) &= \sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=1}^{\alpha} P_{\alpha,n-\alpha}(\underbrace{u,\ldots,u,h}_{\beta},\underbrace{u,\ldots,u}_{\alpha-\beta},\underbrace{\widetilde{u},\ldots,\widetilde{u}}_{n-\alpha}) \\ &\quad + \sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=\alpha+1}^{n} P_{\alpha,n-\alpha}(\underbrace{u,\ldots,u}_{\alpha},\underbrace{\widetilde{u},\ldots,\widetilde{u},\widetilde{h}}_{\beta-\alpha},\underbrace{\widetilde{u},\ldots,\widetilde{u}}_{n-\beta}) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{n} \alpha P_{\alpha,n-\alpha}(h,\underbrace{u,\ldots,u}_{\alpha-1},\underbrace{\widetilde{u},\ldots,\widetilde{u}}_{n-\alpha}) + (n-\alpha)P_{\alpha,n-\alpha}(\underbrace{u,\ldots,u}_{\alpha},\underbrace{\widetilde{u},\ldots,\widetilde{u}}_{n-\alpha-1},\widetilde{h}) \end{aligned}$$

Un calcul analogue donne

$$\{P,Q\}u = d_uQ(X_P(u))$$

$$= \sum_{\widehat{\alpha}=0}^{\widehat{n}} \widehat{\alpha} Q_{\widehat{\alpha},\widehat{n}-\widehat{\alpha}}(X_P(u), \underbrace{u,\dots,u}_{\widehat{\alpha}-1}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{\widehat{n}-\widehat{\alpha}}) + (\widehat{n}-\widehat{\alpha}) Q_{\alpha,\widehat{n}-\widehat{\alpha}}\left(\underbrace{u,\dots,u}_{\widehat{\alpha}}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{\widehat{n}-\widehat{\alpha}-1}, \widetilde{X_P(u)}\right)$$

Nous allons maintenant donner une expression de $X_P(u)$. D'après le lemme 4.4.1 et la proposition 3.2.8, si $s \gg 1$ alors il existe deux opérateurs multilinéaires

$$M_{\alpha,n-\alpha}, M'_{\alpha,n-\alpha} : \bigoplus_{k\geq 1} \mathrm{Im}(\Pi_k) \times \cdots \times \bigoplus_{k\geq 1} \mathrm{Im}(\Pi_k) \to H^s_\pi(X,\mathbb{C})$$

tels que

$$\begin{aligned} P_{\alpha,n-\alpha}(h,u_2,\dots,u_n) &= \omega(M_{\alpha,n-\alpha}(u_2,\dots,u_n),h) \\ P_{\alpha,n-\alpha}(u_1,\dots,u_{n-1},\widetilde{h}) &= \omega(M'_{\alpha,n-\alpha}(u_1,\dots,u_{n-1}),h) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tous $(k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{N}^{\star n}$ et $u_1,\dots,u_n \in \bigoplus_{k\geq 1} \mathrm{Im}(\Pi_k)$ on a

$$||\Pi_{k_n} M_{\alpha,n-\alpha}(\Pi_{k_1}u_1,\dots,\Pi_{k_{n-1}}u_{n-1})||_{L^2} \leq C \frac{k_1^{\star\nu+N}}{(k_1^\star - k_2^\star + k_3^\star)^N} \prod_{\delta=1}^{n-1} ||u_{k_\delta}||_{L^2} \qquad (30)$$

La même estimation est valable pour $M'_{\alpha,n-\alpha}$. Il vient

$$X_P(u) = \sum_{\alpha=0}^{n} \alpha M_{\alpha,n-\alpha}(\underbrace{u,\dots,u}_{\alpha-1}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{n-\alpha}) + (n-\alpha) M'_{\alpha,n-\alpha}(\underbrace{u,\dots,u}_{\alpha}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{n-\alpha-1})$$

Le crochet de Poisson $\{P,Q\}u$ prend la forme

$$\begin{aligned} & \sum_{\widehat{\alpha}=0}^{\widehat{n}} \sum_{\alpha=0}^{n} \widehat{\alpha}\alpha Q_{\widehat{\alpha},n-\widehat{\alpha}}(M_{\alpha,n-\alpha}(\underbrace{u,\dots,u}_{\alpha-1}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{n-\alpha}), \underbrace{u,\dots,u}_{\widehat{\alpha}-1}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{\widehat{n}-\widehat{\alpha}}) \\ + & \sum_{\widehat{\alpha}=0}^{\widehat{n}} \sum_{\alpha=0}^{n} \widehat{\alpha}(n-\alpha) Q_{\widehat{\alpha},n-\widehat{\alpha}}(M'_{\alpha,n-\alpha}(\underbrace{u,\dots,u}_{\alpha-1}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{n-\alpha}), \underbrace{u,\dots,u}_{\widehat{\alpha}-1}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{\widehat{n}-\widehat{\alpha}}) \\ + & \sum_{\widehat{\alpha}=0}^{\widehat{n}} \sum_{\alpha=0}^{n} (\widehat{n}-\widehat{\alpha})\alpha Q_{\alpha,\widehat{n}-\widehat{\alpha}}\left(\underbrace{u,\dots,u}_{\widehat{\alpha}}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{\widehat{n}-\widehat{\alpha}-1}, \widetilde{M_{\alpha,n-\alpha}}(\underbrace{u,\dots,u}_{\alpha-1}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{n-\alpha})\right) \\ + & \sum_{\widehat{\alpha}=0}^{\widehat{n}} \sum_{\alpha=0}^{n} (\widehat{n}-\widehat{\alpha})(n-\alpha) Q_{\alpha,\widehat{n}-\widehat{\alpha}}\left(\underbrace{u,\dots,u}_{\widehat{\alpha}}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{\widehat{n}-\widehat{\alpha}-1}, \widetilde{M'_{\alpha,n-\alpha}}(\underbrace{u,\dots,u}_{\alpha}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{n-\alpha-1})\right) \end{aligned}$$

Le premier terme peut se mettre sous la forme

$$\sum_{\widehat{\alpha}=1}^{\widehat{n}} \sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha+\widehat{\alpha}-2,n+\widehat{n}-\alpha-\widehat{\alpha}}(R_{\alpha,n,\widehat{\alpha},\widehat{n}})(u) = \sum_{\widehat{\alpha}=1}^{\widehat{n}} \sum_{\alpha=1}^{n} R_{\alpha,n,\widehat{\alpha},\widehat{n}}(\underbrace{u,\dots,u}_{\alpha+\widehat{\alpha}-2}, \underbrace{\widetilde{u},\dots,\widetilde{u}}_{n+\widehat{n}-\alpha-\widehat{\alpha}})$$

où $R_{\alpha,n,\widehat{\alpha},\widehat{n}}(u_1,\ldots,u_{n+\widehat{n}-2})$ est donné par

$$\begin{aligned}&\widehat{\alpha}\alpha Q_{\widehat{\alpha},n-\widehat{\alpha}}\left(M_{\alpha,n-\alpha}(u_1,\ldots,u_{\alpha-1},u_{\alpha+\widehat{n}-1},\ldots,u_{n+\widehat{n}-2}),u_\alpha,\ldots,u_{\alpha+\widehat{n}-2}\right)\\ =&\ \widehat{\alpha}\alpha\sum_{k\geq 1}Q_{\widehat{\alpha},n-\widehat{\alpha}}\left(\Pi_k M_{\alpha,n-\alpha}(u_1,\ldots,u_{\alpha-1},u_{\alpha+\widehat{n}-1},\ldots,u_{n+\widehat{n}-2}),u_\alpha,\ldots,u_{\alpha+\widehat{n}-2}\right)\end{aligned}$$

Grâce aux estimations (30) et à l'appartenance $Q_{\alpha,n-\alpha}\in\mathcal{L}_n^{\nu,+\infty}$, la même preuve que celle du théorème 2.1.4 de [DS06b] montre que $R_{\alpha,n,\widehat{\alpha},\widehat{n}}$ appartient à $\mathcal{L}_{n+\widehat{n}-2}^{\nu+\widehat{\nu}+1,\infty}$. Les trois autres termes de $\{P,Q\}$ se traitent de la même manière. Enfin, comme P et Q sont à valeurs réelles, il en est de même de $\{P,Q\}$. En conclusion $\{P,Q\}\in\mathcal{H}_{n+\widehat{n}-2}^{\nu+\widehat{\nu}+1}$. □

Enfin rappelons que l'on a aussi (voir par exemple [BG93] dans un cadre général)

Lemme 4.4.3. *L'espace $\mathcal{C}_s^\infty(H_\pi^s(X,\mathbb{C}^{\otimes 2}),\mathbb{R})$ est stable par crochet de Poisson.*

4.5 Démonstration du théorème 3.2.10 de forme normale

Nous allons employer la méthode des "nombres de Bernoulli" (voir par exemple [FG10]) qui permet de définir directement la transformation symplectique grâce à une récurrence. Soient $m>0$ générique et un entier $r\geq 1$, on considère $P_3,\ldots,P_r$ les polynômes homogènes de Taylor de P et l'on écrit

$$P=P_3+\cdots+P_r+P_\infty$$

Comme chaque $P_n\in\mathcal{H}_n^\nu$, avec $n\in[[1,r]]$, le corollaire 3.2.9 assure que $P_\infty=P-P_3-\cdots-P_r\in\mathcal{C}_s^\infty(H_s(X,\mathbb{C}^{\otimes 2}),\mathbb{R})$. Considérons un polynôme $F=F_3+\cdots+F_r\in\mathcal{H}_{\leq r}^\nu$ et son flot hamiltonien $\phi^t: H_\pi^s(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})\to H_\pi^s(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})$ pour $s\gg 1$:

$$\forall u\in H_\pi^s(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})\quad \frac{d}{dt}\phi^t(u)=X_F(\phi^t(u)) \tag{31}$$

L'intérêt premier de l'application $u\mapsto\phi^t(u)$ est qu'elle est canonique : elle conserve la structure symplectique de $H_\pi^s(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})$. A noter que l'estimation $||X_F(u)||_{H^s}\leq C||u||_{H^s}^2$ assure que si $||u||_{H^s}\ll 1$ alors $\phi=\phi^1$ est définie. De plus la continuité par rapport à la condition initiale du problème de Cauchy (31) dans l'espace de Banach $H_\pi^s(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})$ fournit pour $||u||_{H^s}\ll 1$

$$\phi^0(u)=u,\qquad ||\phi^t(u)-u||_{H^s}\leq C||u||_{H^s}^2 \tag{32}$$

Rappelons que pour toute fonction régulière $Q: H_\pi^s(X,\mathbb{C}^{\otimes 2})\to\mathbb{R}$ on a

$$\frac{d^n}{d\mu^n}Q(\phi^\mu(u))=\{F,\cdots\{F,Q\},\cdots\}(\phi^\mu(u))=\mathrm{ad}_F^n(Q)(\phi^\mu(u))$$

Admettons un instant qu'il existe bien F tel que

i) $(H_0+P)\circ\phi=H_0+Z+R$ comme dans la conclusion du théorème 3.2.10 et $|R(u)|\leq C||u||_{H^s}^{r+1}$

ii) pour tout $n \in [[3, r]]$ on a $\{H_0, F_n\} \in \mathcal{H}_n^{\nu'}$ pour un certain $\nu' > \nu$

Cela va nous permettre de deviner la forme du polynôme F après coup pour réaliser effectivement les conditions i) et ii). La formule de Taylor donne alors

$$\begin{aligned}
& (Z - P + R)u = (H_0 + P) \circ \phi(u) - (H_0 + P)u \\
= \; & (H_0 + P - P_\infty) \circ \phi(u) - (H_0 + P - P_\infty)u + (P_\infty \circ \phi - P_\infty)u \\
= \; & \sum_{n=0}^{r-3} \frac{\mathrm{ad}_F^n(\{F, \{H_0 + P - P_\infty\}\})}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-\mu)^{r-2}}{(r-2)!} \mathrm{ad}_F^{r-1}(H_0 + P - P_\infty)(\phi^\mu(u))d\mu \\
& + \int_0^1 (1-\mu)\{P_\infty, F\} \circ \phi^\mu(u) d\mu
\end{aligned}$$

Comme P_∞ et F ont admettent respectivement l'origine comme zéro d'ordre $r+1$ et 3 et de plus appartiennent à $\mathcal{C}_s^\infty(H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}))$, en comptant la perte de dérivée le lemme 4.4.3 donne

$$\forall u \in H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}) \quad ||u||_{H^s} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad ||X_{\{P_\infty, F\}}(u)||_{H^s} \leq C||u||_{H^s}^{r+1}$$

Par intégration et grâce à (32) le terme intégral $\int_0^1 (1-\mu)\{P_\infty, F\}(\phi^\mu(u))d\mu$ vérifie la même estimation. Quant au terme intégral faisant intervenir $\mathrm{ad}_F^{r-1}(H_0 + P - P_\infty)$, la proposition (29) assure que $\mathrm{ad}_{F_m}(\mathcal{H}_n^\nu) \subset \mathcal{H}_{n+m-2}^{\nu'}$ pour un certain $\nu' = \nu'(r) > 0$, il s'ensuit qu'il existe $\nu'' > 0$ et $r^\star \geq r+1$ qui ne dépendent que de r tels que

$$\mathrm{ad}_F^{r-1}(H_0 + P - P_\infty) = \mathrm{ad}_F^{r-2}\{F, H_0\} + \sum_{n=3}^{r} \mathrm{ad}_F^{r-1}\{F, P_n\} \in \bigoplus_{n=r+1}^{r^\star} \mathcal{H}_n^{\nu''}$$

Notons $\Gamma_r \subset \mathcal{C}_s^\infty(H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}), \mathbb{R})$ l'espace des fonctions qui vérifient au voisinage de l'origine

$$|\Gamma_r(u)| \leq C||u||_{H^s}^{r+1}, \quad ||X_{\Gamma_r}(u)||_{H^s} \leq C||u||_{H^s}^r$$

Comme $F \in \Theta_2$, nous avons $\mathrm{ad}_F(\Gamma_r) \subset \Gamma_{r+1}$. D'après ce qui précède, nous avons

$$Z - P = \sum_{n=0}^{r-3} \frac{\mathrm{ad}_F^n(\{F, \{H_0 + P - P_\infty\}\})}{(n+1)!} + \Gamma_r \tag{33}$$

Considérons maintenant les deux opérateurs différentiels sur $\mathcal{C}_s^\infty(H_\pi^s(X, \mathbb{C}^{\otimes 2}), \mathbb{R})$

$$A = \sum_{n=0}^{r-3} \frac{\mathrm{ad}_F^n}{(n+1)!}, \quad B = \sum_{n=0}^{r-3} B_n \frac{\mathrm{ad}_F^n}{n!}$$

où les nombres B_n sont les nombres de Bernoulli définis par $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}$. Par conséquent, il existe des nombres rationnels c_n tels que

$$B \circ A = A \circ B = \mathrm{Id} + \sum_{n=r-2}^{2r-6} c_n \mathrm{ad}_F^n$$

En appliquant B aux deux membres de l'équation (33), nous obtenons

$$B(Z-P) = \{F, H_0 + P - P_\infty\} + \Gamma_r \tag{34}$$

En cherchant Z sous la forme $Z_3 + \cdots + Z_r$ avec $Z_n \in \mathcal{H}_n^\nu$ et en considérant les polynômes homogènes qui interviennent dans l'équation précédente, nous obtenons $r-2$ équations homologiques dont la première est $Z_3 - P_3 = \{F_3, H_0\}$. Grâce au théorème 4.3.1, nous pouvons résoudre toutes ces équations et nous obtenons notre candidat $F = F_3 + \cdots + F_r$. Par conséquent, en appliquant l'opérateur A aux deux membres de l'équation (34) nous obtenons

$$Z - P = A\{F, H_0 + P - P_\infty\} + \Gamma_r$$

Or par construction le second membre n'est autre que $(H_0 + P) \circ \phi - H_0 - P$ et donc

$$(H_0 + P) \circ \phi = H_0 + Z + \Gamma_r$$

Bibliographie

[Bam03] Dario Bambusi. Birkhoff normal form for some nonlinear PDEs. *Comm. Math. Physics*, 234:253–285, 2003.

[Bam07] D. Bambusi. A Birkhoff normal form theorem for some semilinear pdes. In *Hamiltonian Dynamical Systems and Applications*, pages 213–247. Springer, 2007.

[BDGS07] Bambusi, Delort, Grébert, and Szeftel. Almost global existence for Hamiltonian semilinear Klein-Gordon equations with small Cauchy date on Zoll manifolds. *Comm. Pure Appl. Math*, 60 no 11:pages 1665–1690, 2007.

[BdM78] L Boutet de Monvel. Opérateurs de Toeplitz de plusieurs variables complexes. *Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 79, 1978.

[BdM97] L Boutet de Monvel. Symplectic cones and Toeplitz operators. In *Multidimensional complex analysis and partial differential equations: a collection of papers in honor of François Treves: proceedings of the Brazil-USA conference on multidimensional complex analysis and partial differential equations, June 12-16, 1995, São Carlos (Brazil)*, volume 205, page 15. AMS Bookstore, 1997.

[BdMG81] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin. *The spectral theory of Toeplitz operators*, volume 99. Princeton Univ Pr, 1981.

[Bes78] A.L. Besse. *Manifolds all of whose geodesics are closed*. Birkhauser, 1978.

[BG93] D. Bambusi and A. Giorgilli. Exponential stability of states close to resonance in infinite-dimensional hamiltonian systems. *Journal of statistical physics*, 71(3):569–606, 1993.

[BG06] D. Bambusi and B. Grébert. Birkhoff normal form for PDEs with tame modulus. *Duke Math. J.*, 135:507–567, 2006.

[DS04] J. M. Delort and J. Szeftel. Long–time existence for small data nonlinear Klein–Gordon equations on tori and spheres. *Internat. Math. Res. Notices*, 37:1897–1966, 2004.

[DS06a] J. Delort and J. Szeftel. Bounded almost global solutions for non hamiltonian semi-linear Klein-Gordon equations with radial data on compact revolution hypersurfaces. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 56, pages 1419–1456. Chartres: L'Institut, 1950-, 2006.

[DS06b] J. M. Delort and J. Szeftel. Long–time existence for semi–linear Klein–Gordon equations with small cauchy data on Zoll manifolds. *Amer. J. Math*, 128:1187–1218, 2006.

[dV79] Y.C. de Verdiere. Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 54(1):508–522, 1979.

[FG10] E. Faou and B. Grébert. A Nekhoroshev type theorem for the nonlinear Schrodinger equation on the torus. 2010.

[GG10] P. Gérard and S. Grellier. The cubic Szegö equation. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup*, 32:761–810, 2010.

[GG11] P. Gérard and S. Grellier. Invariant tori for the cubic Szegö equation. *Inventiones Mathematicae*, 186:1–48, 2011.

[GIP09] Benoît Grébert, Rafik Imekraz, and Eric Paturel. Normal forms for semilinear quantum harmonic oscillators. *Comm. Math. Phys.*, vol 291-3:pages 763–798, 2009.

[Gré07] Benoît Grébert. Birkhoff normal form and Hamiltonian PDEs. In *Partial differential equations and applications*, volume 15 of *Sémin. Congr.*, pages 1–46. Soc. Math. France, Paris, 2007.

[Gui77] V. Guillemin. Lectures on spectral theory of elliptic operators. *Duke Mathematical Journal*, 44(3):485–517, 1977.

[Hor85a] L. Hormander. *The analysis of linear partial differential operators vol I : Distribution and Fourier analysis.* Springer Verlag, 1985.

[Hor85b] L. Hormander. *The analysis of linear partial differential operators vol IV : Fourier integral operators*. Springer Verlag, 1985.

[HR82] B. Helffer and D. Robert. Proprietes asymptotiques du spectre d operateurs pseudo-differentiels sur Rn. Comm. *PDE*, 7(7):795–882, 1982.

[Ime11] Rafik Imekraz. Condition de non-résonance pour l'oscillateur harmonique quantique perturbé. *preprint 37 pages*, 2011.

[Ime12] Rafik Imekraz. Nomal forms for semilinear superquadratic oscillators. *Journal of differential equations*, vol 252:pages 2025–2052, 2012.

[Kuk93] S.B. Kuksin. *Nearly integrable infinite-dimension Hamiltonian systems.* Springer, 1993.

[Poc11a] O. Pocovnicu. Explicit formula for the solutions of the the cubic Szegö equation on the real line and applications. *To appear in to appear in DCDS-A*, 2011.

[Poc11b] O. Pocovnicu. Soliton interaction with small Toeplitz potentials for the cubic Szegö equation on the real line. 2011.

[Poc11c] O. Pocovnicu. Traveling waves for the cubic Szegö equation on the real line. *To appear Analysis and PDE*, 2011.

[Rud80] W. Rudin. *Function theory in the unit ball of Cn*, volume 241. Springer, 1980.