

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Document de synthèse en vue d'obtenir le diplôme suivant

**HABILITATION
À DIRIGER DES RECHERCHES**

Rafik Imekraz

Spécialité : Mathématiques

**Équations de Klein-Gordon à spectre discret
et randomisation de fonctions propres**

Soutenance : 30 novembre 2017

Rapporteurs : Dario Bambusi
Gilles Lebeau
Nikolay Tzvetkov

Membres du jury: Jean-Marc Delort
Benoît Grébert
David Lannes
Gilles Lebeau
Nikolay Tzvetkov

Laboratoire : Institut de Mathématiques de Bordeaux (UMR CNRS 5251)

TABLE DES MATIÈRES

1. Description sommaire des travaux présentés	5
Équations non linéaires à spectre discret de type Klein-Gordon.....	5
Randomisation de fonctions propres en Physique Mathématique.....	5
Non décrits dans ce mémoire mais parfois cités.....	5
2. Modèles linéaires de la Physique Mathématique	13
2.1. L'opérateur de Laplace-Beltrami Δ	13
2.1.1. Définitions basiques.....	13
2.1.2. Valeurs propres avec et sans multiplicités.....	13
2.1.3. Variétés de Zoll.....	15
2.1.4. Fonctions propres.....	16
2.2. L'oscillateur harmonique $-\Delta + x ^2$	17
2.2.1. Définitions.....	17
2.2.2. Analogie avec les variétés de Zoll.....	18
2.2.3. Concentration de la fonction spectrale, d'après [6].....	18
2.3. L'oscillateur superquadratique $-\Delta + x ^{2\alpha}$	20
2.3.1. Définitions basiques et analyse spectrale.....	20
2.3.2. Concentration des fonctions propres, d'après [7].....	21
2.3.3. Quelques estimées optimales $L^2 \rightarrow L^p$, d'après [7].....	22
2.4. Inégalités de Bernstein.....	23
2.4.1. Bref survol et reformulation semi-classique.....	23
2.4.2. Inégalité de Bernstein pour $-\Delta + x ^{2\alpha}$ et concentration polaire, d'après [7].....	24
2.4.3. Preuves par paramétrix, d'après [7].....	25
2.5. Annexe : calcul de Weyl-Hörmander et $-\Delta + x ^{2\alpha}$, d'après [7].....	26
3. Equations de Klein-Gordon à spectre discret	29
3.1. Introduction.....	29
3.2. Perturbation de l'énergie par forme normale en temps ε^{-2n}	30
3.3. Petits diviseurs et équation homologique.....	32
3.4. Remarque sur les estimations multilinéaires de fonctions propres.....	34
3.5. Valeurs propres entières : masses non-résonantes génériques.....	35
3.6. Séparation de valeurs propres pour un potentiel superquadratique.....	36
3.7. Vers l'équation des poutres sur un tore irrationnel.....	37
3.8. Forme norme partielle sans hypothèse spectrale ou géométrique.....	38
3.9. Valeurs propres entières : masses non-résonantes algébriques.....	39
3.10. Projecteurs de Szëgo via le formalisme de Boutet de Monvel et Guillemin.....	41
4. Randomisation de fonctions propres dans L^p	43
4.1. Énoncés originaux et littérature existante.....	43
4.2. Extension multidimensionnelle du théorème de Maurey.....	45
4.3. Universalité des mesures sur $L^2(X)$ et cotype fini.....	46
4.4. Interpolation des espaces de Lebesgue probabilistes.....	49

4.5. Théorèmes de Paley-Zygmund unidimensionnels.....	51
4.5.1. Cas L^p , avec $1 \leq p < \infty$, interpolation et concentration.....	51
4.5.2. Quelques idées de preuve.....	54
4.5.3. Cas L^∞ et propriété de concentration finie.....	56
4.5.4. Quelques idées de preuve.....	57
4.6. Théorèmes de Paley-Zygmund multidimensionnels pour Δ	58
4.6.1. Cas L^p , avec $p \in [1, +\infty[$, et convergence ponctuelle.....	58
4.6.2. Quelques idées de preuve.....	59
4.6.3. Cas L^∞ et BMO , exposant logarithmique critique.....	60
4.6.4. Preuves à la Littlewood-Paley pour BMO	61
4.7. Équation des ondes en régime sur-critique et conditions initiales aléatoires.....	62
4.8. Théorèmes de Paley-Zygmund multidimensionnels pour $-\Delta + x ^{2\alpha}$	64
4.8.1. Oscillateur harmonique.....	64
4.8.2. Oscillateur superquadratique $-\Delta + x ^{2\alpha}$	65
5. Conclusion et perspectives.....	67
6. Bibliographie globale.....	69
Références utilisées exceptées celles des travaux du mémoire (page 5).....	69

CHAPITRE 1

DESCRIPTION SOMMAIRE DES TRAVAUX PRÉSENTÉS

Cette courte introduction a vocation à présenter les deux thèmes d'étude, globalement indépendants, que nous avons abordés après la soutenance de la thèse en 2010 (et contenant les articles [9] et [10]). Nos travaux seront référencés par des nombres comme suit (à noter qu'une bibliographie globale se trouve à la fin de ce mémoire).

Équations non linéaires à spectre discret de type Klein-Gordon. —

- [1] J-M Delort and R. Imekraz. Long time existence for the semi-linear Klein-Gordon equation on a compact boundaryless Riemannian manifold. *Comm. Partial Differential Equations*, 42(3):388–416, 2017.
- [2] R. Imekraz. Existence en temps grand pour des équations de Klein-Gordon à petite donnée initiale sur une structure de Toeplitz. *J. Funct. Anal.*, 264(6):1480–1524, 2013.
- [3] R. Imekraz. Long time existence for semi-linear Klein-Gordon equations on compact manifolds for a generic mass. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 353-9:831–835, 2015.
- [4] R. Imekraz. Normal form for semi-linear Klein-Gordon equations with superquadratic oscillators. *Monatsh. Math.*, 179(4):535–575, 2016.
- [5] R. Imekraz. Long time existence for the semi-linear beam equation on irrational tori of dimension two. *Nonlinearity*, 29:3067–3102, 2016.

Randomisation de fonctions propres en Physique Mathématique. —

- [6] R. Imekraz. Concentration et randomisation universelle de sous-espaces propres. *Analysis & PDE*, 11(2):263–350, 2018.
- [7] R. Imekraz. Multidimensional Paley-Zygmund theorems and sharp L^p estimates for some elliptic operators. 53 pages, Submitted, HAL preprint <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01572331/document>, 2017.
- [8] R. Imekraz, D. Robert, and L. Thomann. On random Hermite series. *Trans AMS*, 368:2763–2792, 2016.

L'article [11] ci-après fut écrit après la thèse mais en prolonge certains aspects.

Non décrits dans ce mémoire mais parfois cités. —

- [9] B. Grébert, R. Imekraz, and E. Paturel. Normal forms for semilinear quantum harmonic oscillators. *Comm. Math. Phys.*, vol 291-3:pages 763–798, 2009.
- [10] R. Imekraz. Normal forms for semilinear superquadratic oscillators. *J. Differential Equations*, vol 252:2025–2052, 2012.
- [11] R. Imekraz. Condition de non-résonance pour l'oscillateur harmonique quantique perturbé. *Dynamics of PDE*, vol 9, number 3, pages 205–238, 2012.

Nos travaux sont centrés sur la théorie des Équations aux Dérivées Partielles et la Physique Mathématique. Permettons-nous de préciser le contenu des chapitres de ce mémoire :

- Ch1) la présente introduction;
- Ch2) ce chapitre décrit les principaux modèles linéaires qui seront étudiés dans les deux chapitres suivants. Dans la grande majorité, ce chapitre est bibliographique. Il contient néanmoins un argument issu de [1] relatif à la séparation des valeurs propres sur une variété riemannienne compacte (proposition 2.1.4) et quelques résultats issus de [6, 7] indiqués dans les titres de partie;
- Ch3) ce chapitre a trait à l'étude de la stabilité des solutions très régulières des équations semi-linéaires de Klein-Gordon à spectre discret. Articles correspondants : [1, 2, 3, 4, 5];
- Ch4) ce chapitre concerne l'étude des combinaisons aléatoires de fonctions propres de quelques opérateurs elliptiques de référence (dans les espaces de Lebesgue L^p). Articles correspondants : [6, 7, 8];
- Ch5) ce chapitre propose un bilan et quelques perspectives futures;
- Ch6) ce dernier chapitre contient toutes les autres références citées.

Sans rentrer dans les détails techniques, on se propose d'expliquer dans les grandes lignes le contenu scientifique du mémoire. Pour fixer les idées, fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons l'exemple suivant d'équation de Klein-Gordon non-linéaire

$$(1) \quad (\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)w = w^{n+1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où l'inconnue est la fonction réelle $w : (t, x) \in I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (où I est un intervalle). Quant au nombre m , il s'agit simplement d'un nombre réel strictement positif appelé la masse. Imposons de plus une hypothèse de 2π -périodicité en x . Même si l'on raisonne de manière formelle, on sait depuis l'étude de l'équation de la chaleur par Fourier [Fou22] qu'il est fructueux de décomposer w en série (justement de Fourier)

$$w(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) e^{inx} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \overline{a_n(t)} = a_{-n}(t).$$

Quel regard peut-on porter sur les polynômes trigonométriques $\sum_{n=-N}^N a_n e^{inx}$? Au-delà du caractère 2π -périodique et de la théorie de Fourier correspondante, l'histoire des Mathématiques propose d'autres théories éclairant ce type de fonctions :

- i) théorie des fonctions presque-périodiques dans laquelle les fonctions basiques sont de la forme $x \mapsto e^{i\omega x}$ avec $\omega \in \mathbb{R}$;
- ii) théorie des fonctions moyenne-périodiques. L'équation fonctionnelle $f(x+2\pi) = f(x)$ est remplacée plus généralement par une équation fonctionnelle de convolution $f \star \mu = 0$ pour une certaine mesure μ non nulle à support compact sur \mathbb{R} . Dans ce cas, l'analyse spectrale fait intervenir les fonctions trigonométriques $x \mapsto e^{i\omega x}$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ (voir la thèse de Schwartz [Sch47]);
- iii) analyse de Fourier sur un groupe compact. Ce point de vue fut notamment développé par Pontrjagin et Weil.

En Physique Mathématique, c'est le point de vue riemannien qui l'emporte. Les exponentielles trigonométriques $x \mapsto e^{inx}$ sont vues comme les fonctions propres de l'opérateur Laplacien ou de façon précise de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur le tore \mathbb{T} (identifié au quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) :

$$-\frac{d^2}{dx^2} e^{inx} = n^2 e^{inx}.$$

On peut pousser l'abstraction un peu plus loin en considérant l'opérateur de Laplace-Beltrami comme appartenant à la famille des opérateurs elliptiques essentiellement auto-adjoints (famille qui contient notamment l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et sa généralisation naturelle l'oscillateur superquadratique $-\Delta + |x|^{2\alpha}$). Remarquons à présent les propriétés exceptionnelles suivantes satisfaites par les fonctions trigonométriques :

- i) pour tous $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{inx} e^{imx} = e^{i(n+m)x}$,
- ii) pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $|e^{inx}| = 1$,
- iii) le spectre $\{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ est explicite et surtout très séparé : la différence de deux valeurs propres successives tend très vite vers l'infini.

L'unité de pensée qui lie nos travaux est totalement résumée par la question suivante :

“comment s'émanciper de ces propriétés exceptionnelles afin de considérer d'autres modèles ?”

Revenons sur notre premier domaine d'étude qui s'inscrit en fait dans un programme très général qui étudie l'influence de la géométrie, et donc du spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami, sur le comportement des solutions d'une équation de type Schrödinger, ondes ou justement Klein-Gordon. Désignons par X une variété riemannienne compacte sans bord, si bien que l'équation de Klein-Gordon (1) devient

$$(2) \quad (\partial_t^2 - \Delta_x + m^2)w = w^{n+1}, \quad t \in \mathbb{R} \quad x \in X,$$

où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami de la variété riemannienne X . On peut assez facilement justifier l'existence et l'unicité de solutions fortes très régulières définies localement autour de $t = 0$ (où la notion de régularité est indexée par les espaces de Sobolev hilbertiens $H^s(X)$). Le véritable enjeu est donc de s'intéresser à des conclusions dynamiques. En l'occurrence, on étudiera la stabilité de la solution nulle au sens suivant : pour une donnée de Cauchy de taille $\varepsilon \in]0, 1[$ dans les espaces de Sobolev à grande régularité, peut-on estimer inférieurement le plus grand temps $T(\varepsilon)$ sur lequel la solution reste contrôlée par ε ? À grande régularité, l'argument de point fixe qui montre l'existence et l'unicité amène en fait à l'inégalité $T(\varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{-n}$ où l'entier n est celui qui apparaît dans la non-linéarité de (2). Ainsi, plus l'entier n est grand, plus la minoration est bonne. Mais ce faisant, nous changeons d'équation ! Sous certaines conditions, il existe un procédé, appelé **forme normale**, et essentiellement popularisé par Shatah dans [Sha85], dont le principe peut être résumé de façon suivante :

“pour la même équation, une procédure de forme normale permet d'élever le degré de la non-linéarité.”

Par conséquent, un tel procédé permettrait d'augmenter le temps d'existence locale au-delà de ε^{-n} . Dans [Bou96a], Bourgain a réussi à implémenter une méthode d'itération de forme normale sur le tore \mathbb{T} qui permet de pousser le temps d'existence jusqu'à $T(\varepsilon) \geq C(A)\varepsilon^{-An}$ pour tout $A > 1$ (voir aussi [Bam03, BG06]). Cette conclusion est usuellement appelée **existence presque globale**. En fait, une itération de forme normale est possible en raison d'une structure très particulière de l'équation (2), à savoir sa nature hamiltonienne. De façon précise, la quantité suivante est formellement conservée et permet en fait de reformuler (2) sous une forme hamiltonienne :

$$\int_X \frac{1}{2} |\partial_t w|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_x w|^2 + \frac{1}{2} (mw)^2 - \frac{w^{n+2}}{n+2} dx.$$

Ultérieurement, les travaux conjoints de Bambusi, Delort, Grébert et Szeftel ont permis dans [BDGS07] d'étendre le résultat de Bourgain à des variétés compactes plus générales satisfaisant des hypothèses géométriques précises (en l'occurrence la périodicité du flot géodésique). Ces variétés s'appellent les variétés de Zoll et les sphères \mathbb{S}^d en sont évidemment les principaux exemples. Dans [2], nous prolongeons ce résultat dans un cadre pseudo-différentiel développé par Boutet de Monvel et Guillemin.

Parmi les variétés riemanniennes les plus importantes figurent les tores \mathbb{T}^d . Ces derniers n'étant pas des variétés de Zoll pour $d \geq 2$, Delort puis Fang et Zang ont proposé d'autres approches de forme normale qui permettent d'améliorer le temps d'existence locale ε^{-n} (voir [Del09, FZ10]). Ainsi, pour le tore \mathbb{T}^d cette méthode permet d'atteindre un temps $T(\varepsilon) \geq C(A)\varepsilon^{-An}$ pour un certain nombre $A > 1$ explicite (qui dépend des modèles linéaires et des arguments employés). Nous appellerons dans la suite cette méthode une **forme normale partielle**. La conclusion obtenue est moins bonne que pour les variétés de Zoll mais constitue un prolongement non trivial du temps d'existence locale ε^{-n} .

Nous expliquons dans [3] comment ces nouvelles idées permettent, presque gratuitement, de gérer toutes les variétés dont le spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami est inclus dans \mathbb{Z} , par exemple un produit fini quelconque de sphères $\mathbb{S}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{S}^{d_N}$. En fait, cette méthode permet d'aborder des variétés compactes qui ne vérifient pas la propriété géométrique de périodicité du flot géodésique. Au niveau technique et contrairement à la méthode d'itération de forme normale, la méthode de forme normale partielle n'exploite pas vraiment le caractère hamiltonien de l'équation (2). Comme rappelé plus haut, la structure hamiltonienne est pertinente car peut être conservée après transformation canonique de l'équation. Or, pour la méthode de forme normale partielle, on ne réussit même pas à effectuer complètement une première étape de forme normale ! En fait, on peut dire que c'est l'absence de dérivées dans la non-linéarité de (2) qui joue un rôle crucial. On notera au passage que des travaux antérieurs de Delort et Szeftel [DS04, DS06] utilisent des formes normales pour considérer des non-linéarités quasi-linéaires sur des variétés de Zoll (donc où la situation géométrique est favorable). C'est aussi le cas du travail très récent [FHZ17] de Fang-Han-Zhang.

Cette technique de forme normale partielle s'avère aussi utilisable si l'on remplace l'opérateur de Laplace-Beltrami par l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$ (ce sont les travaux de Zhang [Zha10b, Zha16b,

Zha16a]). Dans [4], nous appliquons cette technique à des équations de Klein-Gordon de la forme

$$(3) \quad (\partial_t^2 - \partial_x^2 + x^{2\alpha} + m^2)w = w^{n+1}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^*.$$

Les opérateurs $-\partial_x^2 + x^{2\alpha}$ sont intéressants car ils interpolent l’oscillateur harmonique ($\alpha = 1$) et l’opérateur Laplacien sur $] -1, 1[$ avec condition de Dirichlet ($\alpha = +\infty$). Puisqu’il y a existence presque globale dans le cas $\alpha = +\infty$ (voir [Bam03, BG06]), les petites solutions régulières de (3) devraient vérifier une estimation de la forme $T(\varepsilon) \geq C_\alpha \varepsilon^{-A(\alpha)n}$ avec $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = +\infty$. Nous obtenons une réponse partielle à cette intuition, c’est-à-dire $T(\varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{-2n}$. En fait, le temps ε^{-2n} n’est pas du tout anodin, il représente pour la non-linéarité w^{n+1} la première amélioration du temps d’existence locale ε^{-n} après une première forme normale. Cela représente notre travail [4].

En fait, les difficultés rencontrées par les modèles linéaires résident presque exclusivement dans le spectre de l’opérateur sous-jacent, à savoir l’opérateur de Laplace-Beltrami ou l’opérateur $-\partial_x^2 + x^{2\alpha}$. Le principe à retenir est le suivant :

“plus les valeurs propres sont séparées et plus le temps $T(\varepsilon)$ sera élevé.”

Il est donc naturel d’examiner des exemples de modèles linéaires où les valeurs propres sont très mal séparées. Dans [5], nous abordons l’exemple suivant d’équation des poutres

$$(\partial_t^2 + \Delta_x^2 + m^2)w = w^{n+1}, \quad t \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{T} \times r\mathbb{T},$$

où $r > 0$ est choisi de sorte que le tore $\mathbb{T} \times r\mathbb{T}$ soit irrationnel (la définition d’un tore irrationnel peut prêter à sourire mais dans ce mémoire ce sera la condition $r^2 \notin \mathbb{Q}$). D’un point de vue structurel, l’équation des poutres a un effet régularisant par rapport à l’équation de Klein-Gordon. C’est cet effet que nous exploitons pour améliorer le temps d’existence locale bien que le spectre du tore irrationnel soit quelque peu chaotique. Pourtant, avec le recul, le résultat de [5] peut être sensiblement amélioré. En effet, nous avons dû faire des hypothèses assez fortes sur le rayon r pour séparer deux valeurs propres successives de l’opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathbb{T} \times r\mathbb{T}$. Une approche plus fructueuse est de séparer les valeurs propres par paquets (c’est l’approche sur les variétés de Zoll). Cela nous amène à une prédiction faite dans [Del09] : on devrait pouvoir réaliser une forme normale partielle pour l’équation de Klein-Gordon sur toute variété riemannienne compacte (sans bord), du moins si n est impair (nous reviendrons sur cette condition de parité). Indépendamment de la parité de n , ce résultat est obtenu dans [1]. Au niveau spectral, le principal outil est la loi de Weyl qui permet de compter les valeurs propres et de les séparer statistiquement.

Mentionnons un point important que nous avons passé sous licence concernant les résultats précédents : dans le cas où la non-linéarité est au moins cubique dans (2), les améliorations des temps d’existence locale sont toutes obtenues lorsque la masse $m > 0$ dans (2) est générique en ce sens qu’elle parcourt un ensemble de mesure totale dans $]0, +\infty[$ au sens de Lebesgue. D’un point de vue pratique, les nombres m doivent vérifier des inégalités diophantiennes. Aucun exemple explicite de masses m n’était connu et la question d’en construire se pose (voir [Zha16b, page 203]). Nous développons dans [1] une nouvelle stratégie de construction explicite de masses m . Au-delà des énoncés techniques, l’idée sous-jacente est qu’il existe une série d’analogies “métrique-algébrique” qui permettent de remplacer un énoncé commençant par “pour presque tout $m...$ ” par “si m est un nombre algébrique...”. Pour notre propos, l’argument clé repose sur un théorème d’approximation diophantienne dû à Schmidt [Sch70]. Ainsi, un énoncé “pour presque tout m ” de prolongement du temps d’existence sur les variétés de Zoll devrait pouvoir se traduire en un énoncé “algébrique” sur les sphères. Dans [1], nous écrivons un énoncé “pour presque tout m ” sur une variété quelconque et un analogue algébrique sur les tores \mathbb{T}^d .

Pour motiver notre second axe de recherche, on doit mentionner les articles fondateurs de Paley et Zygmund [PZ]. Leur but est “d’étudier des propriétés de presque toute série $\sum \pm c_n f_n(x)$ ” où $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de coefficients, (f_n) une suite de fonctions et où les signes aléatoires \pm sont mutuellement indépendants (avec probabilité $\frac{1}{2}$). Par exemple, si $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{Z})$ alors la série aléatoire $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \pm c_n e^{inx}$ définit presque sûrement une fonction dans L^p , avec $2 \leq p < +\infty$. Ce type de résultat est largement exploré dans le livre de référence [Kah68]. Le théorème de Paley-Zygmund peut être considéré comme une transformation probabiliste de l’injection de Sobolev $H^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ en l’inclusion $L^2(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$. Autrement dit, la règle à retenir est la suivante :

*À régularité fixée dans l’échelle des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$,
la randomisation fournit un gain d’intégrabilité.*

À elle seule, cette règle explique l’expression “injection de Sobolev probabiliste” introduite par Burq-Lebeau [BL13] sur laquelle nous reviendrons. Le théorème de Paley-Zygmund eut plusieurs éclairages au cours du XXI^{ème} siècle :

- i) dans les années 1960, Figà-Talamanca et Rider qui ont pu remplacer le tore \mathbb{T} par un groupe compact quelconque G dans le théorème de Paley-Zygmund ([FTR66, Theorem 4] et [FTR67, Corollary 4]).
- ii) dans les années 1970, c’est l’analyse fonctionnelle qui prend le pas avec un résultat que nous attribuons à Maurey [Mau74] : pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^p(X)$, avec $p \in [1, +\infty[$, où X est un espace mesuré σ -fini, on a l’équivalence

$$(4) \quad \sum \pm u_n \text{ converge presque sûrement dans } L^p(X) \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2} \in L^p(X).$$

Fait curieux : on peut remplacer les variables aléatoires de Rademacher \pm par des gaussiennes indépendantes centrées réduites (c’est le théorème de Maurey-Pisier [MP76]). Ce phénomène pourrait être appelé *universalité* dans le domaine des probabilités mais une autre expression est utilisée en analyse fonctionnelle : on dit que L^p , avec $p \in [1, +\infty[$, a la propriété de cotype fini (nous reviendrons sommairement sur ce point dans la partie 4.3).

Puisque nous parlons de variables aléatoires gaussiennes, permettons-nous de sauter une petite vingtaine d’années pour arriver à l’article de Bourgain [Bou94] (inspiré par des idées de [LRS88]). Ce dernier propose une stratégie de globalisation de solutions d’équation de type Schrödinger ou KdV grâce à des mesures de Gibbs. Sur le tore, ces dernières sont essentiellement les lois images de conditions initiales aléatoires de la forme (en oubliant la fréquence nulle) :

$$(x, \omega) \mapsto \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{g_n(\omega)}{n} e^{inx},$$

où x appartient à \mathbb{T} et $(g_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires gaussiennes complexes centrées réduites. Par la suite, il y eut une résurgence des combinaisons aléatoires de fonctions propres, notamment dans les deux champs d’applications suivants :

- i) comme cité plus haut dans [Bou94], l’étude des équations non-linéaires de type Schrödinger ou ondes sur une variété riemannienne compacte X avec des conditions initiales à faible régularité dans les espaces de Sobolev $H^s(X)$ (on parle de régime sur-critique) est un problème délicat. La randomisation donne un gain d’intégrabilité qui permet de construire des solutions qui sont hors d’atteinte avec les méthodes déterministes actuelles. Ces travaux concernent les constructions de mesures de Gibbs (voir les articles [Bou96b, BB14a, BB14b, BB14c, BTT13, Den12, Tzv08] et leurs références) ou des conditions initiales aléatoires plus générales [BTT15, BT08a, BT08b, BT14, PRT14]. Concernant ces derniers articles, on pourra consulter le séminaire Bourbaki [dB14];
- ii) les bases hilbertiennes aléatoires de modes propres ont des propriétés non triviales comme l’ergodicité quantique [Zel92, RT15] ou des estimations de normes L^p bien meilleures que celles des bases hilbertiennes “canoniques” [PRT15, BL13].

Si on reprend la pensée Physique Mathématique, les fonctions trigonométriques doivent être vues comme les fonctions propres d’un opérateur elliptique de référence. Ainsi, l’expression $\sum \pm c_n e^{inx}$ devient $\sum \pm c_n \phi_n(x)$. Pour éviter de rentrer dans le détail des formules probabilistes, simplifions ce qui précède en ceci : disons que l’on va associer à une fonction f (ou distribution) une fonction aléatoire $\omega \mapsto f^\omega$ (définie par une série aléatoire) en injectant un aléa dans la décomposition spectrale de f . Le programme de recherche initial de Paley et Zygmund consiste alors à déterminer les propriétés vérifiées presque sûrement par f^ω . Ici ω est l’élément générique d’un espace probabilisé de référence.

À la connaissance de l’auteur, ce sont les articles de Ayache-Tzvetkov [AT08], Grivaux [Gri10] et Tzvetkov [Tzv09] qui relancent ce programme dans les espaces de Lebesgue (d’autres auteurs étudient par exemple les ensembles nodaux de fonctions aléatoires, voir [Ana16]). Par exemple, indépendamment du critère (4) de Maurey, Ayache et Tzvetkov retrouvent le fait suivant : si une suite de fonctions (ϕ_n) est orthonormée dans $L^2(X)$ et uniformément bornée dans $L^p(X)$ avec $p \in [2, +\infty[$, alors pour toute suite $(c_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, la série aléatoire gaussienne $\sum c_n g_n(\omega) \phi_n$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ (ici (g_n) est une suite i.i.d. de gaussiennes centrées réduites). Cela donne un nouvel éclairage, d’un point de vue gaussien, du théorème de Paley-Zygmund pour $\phi_n(x) = e^{inx}$ et $X = \mathbb{T}$. Or cette propriété de bornitude n’est pas du tout vérifiée pour d’autres exemples importants de fonctions propres. De

manière schématique, on peut dire que l'explosion des normes L^p est souvent une conséquence d'une propriété de concentration de fonctions propres (et que cela ne devient intéressant que si la dimension de la variété sous-jacente est au moins 2). Par exemple, la suite des normes L^p des fonctions propres radiales de l'opérateur Δ sur la boule ouverte unité de \mathbb{R}^d avec condition de Dirichlet tend vers $+\infty$ si p est assez grand et cela est essentiellement dû à une concentration des fonctions propres autour de $0 \in \mathbb{R}^d$. Ces fonctions radiales constituent donc un exemple naturel issu de la Physique Mathématique pour ces questions de randomisation. Ainsi, les papiers [AT08] et [Gri10] montrent qu'à toute fonction radiale $f \in L^2(B(0, 1))$, on peut associer un exposant critique $p_c(f)$ calculable explicitement et vérifiant l'alternative :

$$(5) \quad \begin{aligned} p > p_c(f) &\Rightarrow \text{la série aléatoire définissant } f^\omega \text{ diverge ps dans } L^p \\ 2 \leq p < p_c(f) &\Rightarrow \text{la série aléatoire définissant } f^\omega \text{ converge ps dans } L^p \end{aligned}$$

Il reste à décider ce qu'il en est en $p = p_c(f)$.

Venons-en à nos contributions. Dans [8] puis dans [6, 7], nous étudions la randomisation des fonctions propres de l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$. Pour résumer brièvement :

- i) pour tout $p \in [1, +\infty[$, nous donnerons une caractérisation complète des distributions f qui vérifient presque sûrement $f^\omega \in L^p$ (théorème 4.8.3 ci-après);
- ii) si l'on part d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors presque sûrement la fonction f^ω appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [2, +\infty[\cup\{+\infty\}$ (corollaire 4.8.6 ci-après). Le point intéressant est la possibilité de rajouter le point $+\infty$ inaccessible avec le cas du théorème de Paley-Zygmund sur \mathbb{T} . On peut parler d'un fort effet *hypercontractif*.

La philosophie de notre article [7] est la suivante : si les résultats d'analyse fonctionnelle des années 70 (notamment théorème de Maurey et théorème de Maurey-Pisier) ont pu éclairer et retrouver de façon optimale le théorème de Paley-Zygmund, alors une démarche similaire devrait être possible en remplaçant fonctions trigonométriques par fonctions propres (disons d'un opérateur elliptique de référence). Cette intuition peut paraître très vague à première vue mais se traduira par l'introduction d'une nouvelle classe d'espaces de Banach, notés $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$, et que nous avons appelés *espaces de Lebesgue probabilistes*, associés à une suite de sous-espace propres E_n . La pertinence de ces espaces est justifiée pour les raisons suivantes :

- i) en pratique, les espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$ caractérisent abstraitement les distributions f telles que $f^\omega \in L^p$ presque sûrement (voir le théorème 4.2.1);
- ii) le point qui ne fut pas prévisible est l'absence *a priori* d'interpolation/dualité des espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$. Nous prouvons dans [6] que c'est la concentration des fonctions propres de E_n , c'est-à-dire une propriété purement riemannienne, qui implique une propriété d'interpolation/dualité des espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$, c'est-à-dire une propriété d'analyse fonctionnelle pure. À son tour, ce nouvel outil d'interpolation/dualité permet de compléter le problème mentionné en (5) : on donne une condition nécessaire et suffisante de convergence presque sûre pour les séries aléatoires de fonctions radiales (ce qui au passage permet décider ce qui se passe en $p_c(f)$ dans (5)). La démarche est valide de façon générale et nous l'appliquons aussi au cas de fonctions propres se concentrant sur une géodésique;
- iii) Burq et Lebeau ont montré dans [BL13] une propriété d'universalité pour la randomisation de fonctions propres, disons sur une variété riemannienne compacte X , qui peut se caricaturer de la manière suivante : il existe toute une famille de mesures naturelles (en un certain sens) sur $L^2(X)$ qui sont étrangères deux à deux et sont à support dans $L^p(X)$. En interprétant ces mesures comme des lois de fonctions aléatoires, nous écrivons dans [6] une version multidimensionnelle du théorème de Maurey-Pisier [MP76] qui éclaire la construction des mesures de Burq-Lebeau et permet d'en construire de nouvelles. Ce point de vue est expliqué dans la partie 4.3.

L'article [7] est centré sur la théorie L^∞ qui s'avère plus délicate car il n'y a pas d'analogie simple de l'équivalence (4). En fait, on peut dire modestement que la théorie L^∞ n'est d'ailleurs pas encore aboutie car nous ignorons la réponse au problème suivant : soit X une variété riemannienne compacte sans bord, déterminer les distributions f sur X telles que $f^\omega \in L^\infty(X)$ presque sûrement. Au mieux, les méthodes développées dans [7] montrent que l'espace recherché est intermédiaire entre $L^2(X)$ et $\bigcup_{s>0} H^s(X)$ (voir le théorème 4.6.4). Par comparaison, dans le cas $p \in [1, +\infty[$, notre travail [6] met en évidence que les distributions vérifiant presque sûrement $f^\omega \in L^p(X)$ sont précisément les fonctions $f \in L^2(X)$ (on comprend mieux l'expression *injection de Sobolev probabiliste*). On notera qu'il s'agit d'un énoncé analogue au théorème de Paley-Zygmund sur le tore \mathbb{T} mais permettons-nous de signaler

que ce résultat devrait pouvoir être démontré par les méthodes de [BL13] dans le cas $p \in [2, +\infty[$. Le fait de travailler du point de vue de l'analyse fonctionnelle nous permet de considérer dans [7] d'autres mesures que le volume riemannien sur X (voir le théorème 4.6.2 ci-après) : si l'on fixe deux mesures ν_1 et ν_2 finies (non nulles!) et étrangères sur une variété riemannienne compacte X , alors on l'équivalence suivante pour toute distribution f sur X :

$$\begin{aligned} & f^\omega \text{ appartient presque sûrement à } L^1(X, \nu_1) \\ \Leftrightarrow & f^\omega \text{ appartient presque sûrement à } L^1(X, \nu_2) \end{aligned}$$

Ce fait peut être considéré comme une sorte d'universalité spatiale de la fonction aléatoire $\omega \mapsto f^\omega$ alors que la définition même de f^ω est spectrale. Comme remarqué dans [BL13, BTT14], l'argument clé qui permet d'étudier des fonctions propres sur une variété compacte générale est une estimation optimale et uniforme de la fonction spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami due à Hörmander [Hör68].

Pour revenir au cas $L^\infty(X)$, la seule solution complète est due à Marcus-Pisier sur les tores et plus généralement sur les groupes compacts (voir le livre [MP81]). En fait, la structure de groupe est fondamentale dans les travaux de Marcus-Pisier. Dans le cas des variétés riemanniennes compactes sans bord, Tzvetkov obtient dans [Tzv09] des conditions suffisantes faisant intervenir des exposants logarithmiques et pose le problème de leur optimalité. Dans [7], nous améliorons les conditions de Tzvetkov et donnons une réponse partielle au problème précédent (voir le théorème 4.6.5). Notre approche fait intervenir l'espace BMO connu pour être un bon substitut pour L^∞ . Ici encore on peut effectuer une caricature : L^∞ est l'un des espaces fonctionnels les plus simples à définir et pourtant le plus difficile d'accès. A contrario, BMO bénéficie par exemple d'une bonne théorie de Littlewood-Paley (voir la partie 4.6.4).

Nous donnerons aussi une modeste application à l'équation cubique des ondes défocalisante, à savoir la construction de solutions en régime sur-critique. Nous reprenons à cet effet une preuve de Burq-Tzvetkov sur \mathbb{T}^3 dans [BT14] et adaptée par de Suzzoni sur \mathbb{S}^3 dans [dS14]. L'idée est d'utiliser de nouvelles conditions initiales aléatoires qui permettent de gérer les modèles multidimensionnels et d'atteindre toute variété riemannienne compacte sans bord de dimension 3 (voir la partie 4.7).

Enfin, comme mentionné au début de cette introduction, le chapitre 2 contient quelques estimations $L^2 \rightarrow L^p$ et $L^\infty \rightarrow \nabla L^\infty$ (inégalités de Bernstein) que nous avons rencontrées sur notre chemin et qui ont leur intérêt propre.

Remerciements

Mes modestes contributions n'ont été possibles que grâce à la confiance que l'équipe EDP de Bordeaux m'a accordée en m'accueillant. Pourtant, j'ai écrit tellement d'inégalités qui s'avèrent incomplètes et qui finirent dans une corbeille à papier!

Je tiens à remercier les membres de l'équipe EDP avec qui j'ai pu discuter de mathématiques ou d'autre chose (je m'excuse de ne pas les citer tous). Je me permets néanmoins de signaler que Alain Bachelot est un modèle pour les jeunes enseignants-chercheurs.

Je tiens aussi à remercier l'équipe EDP de Nantes dont je suis originaire, notamment mon directeur Benoît Grébert, mon co-directeur Éric Paturel et Laurent Thomann. Je remercie particulièrement Didier Robert de m'avoir transmis l'intérêt des opérateurs $-\Delta + |x|^{2\alpha}$!

Concernant ce mémoire, je remercie Dario Bambusi, Gilles Lebeau et Nikolay Tzvetkov d'avoir accepté la mission de rapporteur et à David Lannes d'avoir accepté d'être membre de jury.

Je remercie également Jean-Marc Delort d'avoir accepté d'être membre de mon jury. Il sera aisé au lecteur de constater l'influence de ses travaux dans mes réflexions.

Je remercie aussi tous les auteurs que j'ai contactés et qui ont eu la gentillesse de se replonger dans leurs articles afin de m'éclairer.

Je remercie également les collègues universitaires, dont Jean-Jacques Ruch et Marie-Line Chabanol, qui ne comptent pas leurs heures, et sans qui la machine universitaire ne tournerait pas.

L'université ne tourne pas non plus sans les secrétaires pédagogiques, l'équipe de la bibliothèque et l'équipe informatique.

Je remercie ma mère et mon père pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Enfin, je tiens à remercier Kristell qui me soutient depuis tant d'années. Je n'oublie évidemment pas mon tout petit petit Arthur qui court et apprend très très vite.

CHAPITRE 2

MODÈLES LINÉAIRES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

2.1. L'opérateur de Laplace-Beltrami Δ

2.1.1. Définitions basiques. — On effectue quelques rappels pour lesquels on renvoie par exemple aux livres [Bus10, BGM71, SV97]. Fixons X une variété riemannienne compacte sans bord de dimension d . L'un des opérateurs les plus importants est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X , noté $\Delta : \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$, et défini par la formule

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(X) \quad \Delta f = \operatorname{div}\{\nabla f\}.$$

Si l'on veut se passer de la définition de la divergence sur une variété riemannienne compacte, on peut aussi définir la fonction Δf par la propriété de dualité :

$$(6) \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty(X) \quad \int_X (\Delta f)(x)\phi(x)dx = - \int_X g_x(\nabla_x f, \nabla_x \phi)dx,$$

où g_x désigne le produit scalaire de l'espace tangent $T_x X$ et dx désigne le volume riemannien de X . Dans une carte locale, l'opérateur Δ apparaît être un opérateur différentiel d'ordre 2 :

$$(7) \quad (\Delta f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\det g_x}} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \partial_j (g_x^{jk} \sqrt{\det g_x} \partial_k f),$$

où la métrique g_x est assimilée à une matrice symétrique définie positive de taille d et $(g_x^{jk})_{j,k} = g_x^{-1}$. La partie homogène de degré 2 de Δ s'écrit donc localement

$$(8) \quad \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d g_x^{jk} (\partial_j \partial_k f)(x).$$

La formule (6) fait de $\Delta : \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$ un opérateur symétrique (au sens des opérateurs à domaine dans $L^2(X)$). La compacité et surtout l'absence de bord de la variété X permet de prouver le fait non trivial que Δ est essentiellement auto-adjoint (c'est en réalité la complétude de X qui joue un rôle, voir [Str83]). Au passage, puisque la formule (7) permet de définir Δ au sens des distributions, on constate que l'unique extension auto-adjointe de $\Delta : \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$ est définie par la même formule (7) sur le domaine $\{f \in L^2(X), \Delta f \in L^2(X)\}$ qui n'est autre que l'espace de Sobolev $H^2(X)$.

2.1.2. Valeurs propres avec et sans multiplicités. — La compacité de X permet de montrer que l'opérateur Δ est en fait à résolvante compacte, ce qui, combiné au caractère auto-adjoint, amène à le diagonaliser dans une base hilbertienne (ϕ_n) de $L^2(X)$:

$$\Delta \phi_n = -\lambda_n^2 \phi_n, \quad \lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots$$

La suite des fonctions propres (ϕ_n) n'est pas forcément unique en raison de l'éventuelle existence de valeurs propres multiples mais la suite croissante $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est unique, ce sont les valeurs propres de $\sqrt{-\Delta}$. Il sera commode de noter $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des valeurs propres de $\sqrt{-\Delta}$ sans compter les multiplicités :

$$\mu_0 = 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$$

Le théorème le plus important concernant les valeurs propres est la loi de Weyl avec reste (voir [SV97, Theorem 1.2.1]).

Théorème 2.1.1. — On a l'asymptotique suivante quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\text{Card}\{n \in \mathbb{N}, \lambda_n \leq \lambda\} = c(d) \text{Vol}(X) \lambda^d + \mathcal{O}(\lambda^{d-1}),$$

avec $c(d) = (2\pi)^{-d} \text{Vol}_{\mathbb{R}^d}(B(0,1))$.

Le reste est optimal pour la sphère $X = \mathbb{S}^d$ pour laquelle on a $\mu_j = \sqrt{j(j+d-1)}$ et la multiplicité de μ_j est de l'ordre de j^{d-1} .

Corollaire 2.1.2. — Il existe deux constantes $\alpha \geq 1$ et $C \geq 1$ telles que

$$(9) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{C} (1+k)^{d-1} \leq \text{Card}\{n \in \mathbb{N}, \lambda_n \in (\alpha k, \alpha k + \alpha]\} \leq C(1+k)^{d-1}.$$

En particulier, $(\alpha k, \alpha k + \alpha]$ contient au moins une valeur propre de $\sqrt{-\Delta}$.

Démonstration. — Le cas $k = 0$ signifie que $(0, \alpha]$ contient au moins une valeur propre. C'est évidemment vrai si $\alpha \geq 1$ est assez grand. Supposons donc $k \geq 1$. La loi de Weyl signifie qu'il existe une constante $B > 0$ et une fonction bornée $\mathcal{B} : [1, +\infty[\rightarrow [-B, B]$ telle que

$$\forall \lambda \geq 1 \quad \text{Card}\{n \in \mathbb{N}, \lambda_n \leq \lambda\} = c(d) \text{Vol}(X) [\lambda^d + \lambda^{d-1} \mathcal{B}(\lambda)]$$

En oubliant $c(d) \text{Vol}(X)$, nous devons prouver

$$\frac{1}{C} k^{d-1} \leq \underbrace{(\alpha k + \alpha)^d - (\alpha k)^d}_{=\Theta_1} + \underbrace{(\alpha k + \alpha)^{d-1} \mathcal{B}(\alpha k + \alpha) - \alpha^{d-1} k^{d-1} \mathcal{B}(\alpha k)}_{=\Theta_2} \leq C k^{d-1}.$$

Considérons alors $C \geq 1$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\alpha^d k^{d-1}}{C} \leq \Theta_1 \leq C \alpha^d k^{d-1} \quad \text{and} \quad |\Theta_2| \leq B \alpha^{d-1} [(k+1)^{d-1} + k^{d-1}] \leq B C \alpha^{d-1} k^{d-1}.$$

Il ne reste plus qu'à choisir $\alpha > 2BC^2$, si bien que $|\Theta_2| \leq \frac{\alpha^d k^{d-1}}{2C}$. Finalement, on obtient

$$\frac{\alpha^d k^{d-1}}{2C} \leq \Theta_1 + \Theta_2 \leq \left(C + \frac{1}{2C}\right) \alpha^d k^{d-1}.$$

□

Discutons maintenant des informations que la loi de Weyl permet de déduire sur la suite $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ des valeurs propres de $\sqrt{-\Delta}$ sans compter les multiplicités.

Proposition 2.1.3. — Les deux propriétés suivantes sont vraies :

- i) la suite positive $(\mu_{j+1} - \mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est majorée,
- ii) on a l'asymptotique $j^{1/d} \lesssim \mu_j \lesssim j$.

Démonstration. — Notons α la constante du lemme 2.1.2. Soit $j \in \mathbb{N}$ et notons k la partie entière de $\frac{\mu_j}{\alpha}$. Ainsi, on a $\mu_j < k\alpha + \alpha$. Or le lemme 2.1.2 assure qu'il existe au moins une valeur propre dans $(k\alpha + \alpha, k\alpha + 2\alpha]$. Ce qui donne

$$k\alpha \leq \mu_j < \mu_{j+1} \leq k\alpha + 2\alpha.$$

Ainsi, $\mu_{j+1} - \mu_j \leq 2\alpha$. Cela prouve i) et donc aussi l'inégalité $\mu_j \lesssim j$. Quant à la minoration, elle découle directement de la loi de Weyl et de l'inégalité $j+1 \leq N(\mu_j) \simeq \mu_j^d$. □

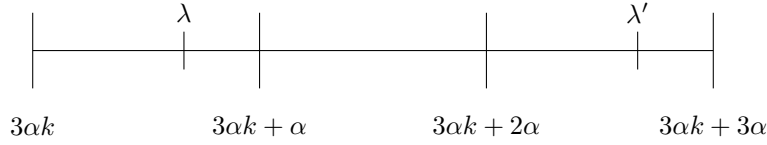
La proposition précédente est optimale. Par exemple, pour des métriques génériques, les valeurs propres sont simples [Uhl76, BU83] et vérifient donc l'asymptotique $\mu_j = \lambda_j \simeq j^{1/d}$ par inversion de la loi de Weyl. Si l'on revient à la sphère \mathbb{S}^d , on constate que la suite $(\mu_{j+1} - \mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 et que l'on a $\mu_j \simeq j$. Autrement dit, la proposition précédente dit que les sphères appartiennent à la famille des variétés pour lesquelles la séparation des valeurs propres est maximale.

Quelle borne inférieure peut-on espérer sur $\mu_{j+1} - \mu_j$? Nous aurons besoin pour l'étude de l'équation de Klein-Gordon d'une minoration polynomiale de la forme $\mu_{j+1} - \mu_j \gtrsim \mu_j^{-\beta}$ pour un certain $\beta \geq 0$ (le cas $\beta < 0$ étant évidemment interdit d'après la proposition 2.1.3). Mentionnons dès à présent qu'il existe des exemples élémentaires, en l'occurrence des "tores à la Liouville", pour lesquels ce type de borne inférieure est illusoire (voir la proposition 3.7.2). Par contre, nous avons constaté que l'on peut toujours séparer les valeurs propres par paquets indépendamment d'une quelconque géométrie sur X .

Proposition 2.1.4. — [1, Proposition 4] *Soit α la constante du corollaire 2.1.2. Il existe une constante $C \geq 1$ et une suite d'entiers $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$(10) \quad \begin{aligned} 3\alpha k &\leq \mu_{j_k} \leq 3\alpha(k+1) \\ \mu_{1+j_k} - \mu_{j_k} &\geq \frac{1}{C\mu_{j_k}^{d-1}} \end{aligned}$$

Démonstration. — Les intervalles $(3\alpha k, 3\alpha k + \alpha]$ et $(3\alpha k + 2\alpha, 3\alpha k + 3\alpha]$ contiennent au moins une valeur propre de $\sqrt{-\Delta}$, disons λ et λ' .



En outre, il y a au plus $C(1+k)^{d-1}$ valeur propres dans $(3\alpha k, 3\alpha k + 3\alpha]$. Utilisant l'inégalité $\lambda + \alpha < \lambda'$, nous voyons que $(3\alpha k, 3\alpha k + 3\alpha]$ contient au moins deux valeurs propres successives μ_{j_k} et μ_{1+j_k} (entre λ et λ') telles que

$$\mu_{1+j_k} - \mu_{j_k} \geq \frac{\alpha}{C(1+k)^{d-1}}.$$

Comme μ_{j_k} appartient à $(3\alpha k, 3\alpha k + 3\alpha]$, on peut remplacer la borne inférieure $\frac{\alpha}{C(1+k)^{d-1}}$ par $\frac{1}{C\mu_{j_k}^{d-1}}$. \square

2.1.3. Variétés de Zoll. — Pour cette partie, les références classiques sont [Bes78, dV79, DG75]. La Physique Mathématique prévoit qu'il devrait y avoir des liens entre d'une part la théorie spectrale de l'opérateur Δ et d'autre part la dynamique classique donnée par la structure riemannienne de X , c'est-à-dire son flot géodésique. De manière optimiste, on s'attendrait à ce que le spectre de Δ détermine la structure riemannienne. Cela est faux en toute généralité (voir le livre [Bus10]). Par contre, dans certains cas, on a une surprenante correspondance :

Théorème 2.1.5. — *Soit $\tau > 0$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) *le flot géodésique de X est τ -périodique,*
- ii) *il existe $K > 0$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ tels que le spectre de l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ est inclus dans une union*

$$\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{2\pi}{\tau}n + \sigma - \frac{K}{n}, \frac{2\pi}{\tau}n + \sigma + \frac{K}{n} \right].$$

On dit alors que X est une variété de Zoll.

Par exemple, dans le cas de la sphère \mathbb{S}^d , on a

$$\mu_j = \sqrt{j(j+d-1)} = j + \frac{d-1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{j}\right).$$

Le sens ii) \Rightarrow i) découle de [DG75, Theorem 3.2]. Le livre [Bes78] est consacré aux variétés de Zoll. Signalons que le nombre de valeurs propres de $\sqrt{-\Delta}$ (comptées avec multiplicité) dans le n -ième paquet est comparable à n^{d-1} (c'est même exactement un polynôme de degré $d-1$ pour $n \gg 1$, voir [dV79] mais aussi [BdMG81]).

Donnons maintenant une interprétation symbolique de la condition i) du théorème 2.1.5. La structure riemannienne de X permet d'introduire un difféomorphisme naturel $I : T_x X \rightarrow T_x^* X$ entre le fibré tangent TX et le fibré cotangent T^*X :

$$\forall v \in T_x X \quad \forall w \in T_x X \quad \langle I(v), w \rangle = g_x(v, w).$$

A fortiori, on peut identifier le flot géodésique défini sur TX en un flot sur T^*X parfois appelé le flot cogéodésique mais le plus souvent aussi appelé le flot géodésique. On peut aussi transférer le produit scalaire g_x sur $T_x X$ en un produit scalaire, noté g_x^{-1} , sur $T_x^* X$:

$$\forall (\xi, \eta) \in (T_x^* X)^2 \quad g_x^{-1}(\xi, \eta) = g_x(I^{-1}(\xi), I^{-1}(\eta)).$$

La notation g_x^{-1} est justifiée car si la métrique g s'écrit localement $\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d g_{x,i,j} u_i u_j$ avec $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^d$, alors en identifiant \mathbb{R}^d avec son dual par identification de sa base canonique avec sa base duale, il s'avère que g_x^{-1} s'écrit localement $\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d g_x^{i,j} \xi_i \xi_j$ où $(g_x^{i,j})$ est l'inverse de la matrice $(g_{x,i,j})$. Ensuite, rappelons que la variété T^*X peut être munie d'une forme symplectique non dégénérée naturelle. Cette structure symplectique permet d'identifier 1-formes différentielles et champs de vecteurs sur T^*X . Si l'on considère une fonction régulière $H : T^*X \rightarrow \mathbb{R}$, alors le champ de vecteurs associé à sa différentielle est appelé le hamiltonien de H et est souvent noté X_H . Le flot sur T^*X de X_H est appelé son flot hamiltonien. Il se trouve que le flot géodésique est précisément le flot hamiltonien pour la fonction

$$\begin{aligned} H : T^*X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \xi) &\mapsto \frac{1}{2} g_x^{-1}(\xi, \xi), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que nous retrouvons, à facteur $\frac{1}{2}$ près, le *symbole principal* de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ (voir (8)).

2.1.4. Fonctions propres. — En fait, le théorème 2.1.1 peut être obtenu par intégration sur la variété X d'un résultat plus fort et aussi important dans la suite :

Théorème 2.1.6. — [Hör68] *On a l'asymptotique suivante quand $\lambda \rightarrow +\infty$:*

$$\forall x \in X \quad \sum_{\lambda_j \leq \lambda} |\phi_j(x)|^2 = c(d)\lambda^d + \mathcal{O}(\lambda^{d-1}),$$

où le reste est uniforme en X et où l'on désigne par $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de fonctions propres $L^2(X)$ -normalisées de Δ associée à suite de valeurs propres $(-\lambda_j^2)_{j \in \mathbb{N}}$.

Une preuve similaire à celle du corollaire 2.1.2 fournit le résultat suivant.

Corollaire 2.1.7. — *Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $k \gg 1$ on a, uniformément en $x \in X$, les estimations*

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_j \in (\alpha k, \alpha k + \alpha]} |\phi_j(x)|^2 &\simeq k^{d-1} \\ \text{Card}\{j \in \mathbb{N}, \lambda_j \in (\alpha k, \alpha k + \alpha]\} &\simeq k^{d-1}. \end{aligned}$$

En fait, le corollaire 2.1.7 est précisément l'analogie de la propriété $|e^{inx}| = 1$ sur un tore unidimensionnel. On peut caricaturer le corollaire 2.1.7 de la façon suivante : même s'il existe des fonctions propres ϕ_j qui prennent des valeurs très grandes, la moyenne des nombres $|\phi_j(x)|^2$ est essentiellement constante pourvu que l'on examine une fenêtre spectrale $(\alpha k, \alpha k + \alpha]$ assez grande de $\sqrt{-\Delta}$.

Une conséquence bien connue du corollaire 2.1.7 est l'estimation $\|\phi_j\|_{L^\infty(X)} \lesssim \lambda_j^{\frac{d-1}{2}}$. De façon générale, Sogge a obtenu dans [Sog88] les estimations optimales suivantes valides en dimension $d \geq 2$: si l'on a $\Delta \phi_j = -\lambda_j^2 \phi_j$, avec $\lambda_j > 0$ alors on a

$$(11) \quad \|\phi_j\|_{L^p(X)} \leq C(X, p) \lambda_j^{\delta(d,p)}, \quad \delta(d,p) := \begin{cases} \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) & \text{si } 2 \leq p \leq \frac{2(d+1)}{d-1}, \\ \frac{d-1}{2} - \frac{d}{p} & \text{si } \frac{2(d+1)}{d-1} \leq p \leq +\infty, \end{cases}$$

où $C(X, p) \geq 1$ ne dépend que de X et p . Il est bien connu que les inégalités (11) sont optimales sur la sphère

$$\mathbb{S}^d := \{(x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}, x_1^2 + \dots + x_{d+1}^2 = 1\}, \quad d \geq 2.$$

De façon précise, les estimées L^p sont saturées par

- i) les fonctions de plus haut poids Y_n pour $2 \leq p \leq \frac{2(d+1)}{d-1}$;
- ii) les fonctions zonales Z_n pour $p \geq \frac{2(d+1)}{d-1}$.

Rappelons brièvement les définitions des fonctions Z_n et Y_n .

Fonctions zonales. On se réfère à [SW71, Chapter IV.2, Theorem 2.14, page 149] et l'on note

$$(12) \quad Z_n(x) = n^{\frac{1}{2}} P_n^{\left(\frac{d-2}{2}, \frac{d-2}{2}\right)}(x_1), \quad \Delta Z_n = -n(n+d-1)Z_n, \quad \|Z_n\|_{L^2(\mathbb{S}^d)} \simeq_d 1,$$

où $P_n^{\left(\frac{d-2}{2}, \frac{d-2}{2}\right)}$ est le n -ième polynôme de Jacobi, c'est-à-dire le n -ième polynôme orthogonal pour le poids $w \in [-1, 1] \mapsto (1-w^2)^{\frac{d-2}{2}}$ et normalisé de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n^{\left(\frac{d-2}{2}, \frac{d-2}{2}\right)}(1) = \binom{n + \frac{d-2}{2}}{n} \simeq_d n^{\frac{d-2}{2}}.$$

On peut montrer que l'on a les estimations suivantes (il s'agit de calculs plus ou moins standards reposant sur le livre [Sze75], voir [6, partie 3.4]) :

$$(13) \quad \begin{aligned} 1 \leq p < \frac{2d}{d-1} &\Rightarrow \|Z_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} 1, \\ p = \frac{2d}{d-1} &\Rightarrow \|Z_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} \sqrt[p]{\ln(n+1)}, \\ \frac{2d}{d-1} < p < \infty &\Rightarrow \|Z_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} n^{\frac{d-1}{2} - \frac{d}{p}}. \end{aligned}$$

La dernière majoration est conséquence de l'interprétation suivante : la fonction zonale Z_n est connue pour se concentrer sur une boule centrée de rayon d'ordre $\frac{1}{n}$ avec une amplitude d'ordre $n^{\frac{d-1}{2}}$. Autrement dit, on peut assimiler $|Z_n|$ à $n^{\frac{d-1}{2}} \mathbf{1}_{B(\varphi, \frac{c}{n})}$ où $\varphi \in \mathbb{S}^d$ et $c > 0$. Ce raccourci permet de retrouver la norme $\|Z_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}$ pour $p \gg 1$.

Fonctions de plus haut poids. Ces dernières sont définies par les formules

$$(14) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad Y_n(x) := c_{d,n}(x_1 + ix_2)^n, \quad \|Y_n\|_{L^2(\mathbb{S}^d)} = 1,$$

où $c_{d,n} > 0$ est une constante de normalisation. On vérifie que l'on a $\Delta Y_n = -n(n+d-1)Y_n$ et $c_{d,n} \simeq_d n^{\frac{d-1}{4}}$. Les fonctions Y_n sont connues pour avoir des estimations de normes dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ maximales pour $2 < p \leq \frac{2(d+1)}{d-1}$ et minimales pour $p \in [1, 2[$ parmi les modes propres $L^2(\mathbb{S}^d)$ -normalisés associés à la valeur propre $-n(n+d-1)$ (et cela est même optimal d'après les inégalités de Sogge (11) et [SZ11, Proposition 2]). De manière précise, il est connu et facile à vérifier que (14) implique les estimations suivantes

$$(15) \quad \forall p \in [1, +\infty[\cup \{+\infty\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|Y_n\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} n^{\frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)}.$$

Comme pour les fonctions zonales, ces asymptotiques ont une interprétation de concentration. De façon précise, Y_n se concentre, avec une amplitude d'ordre $n^{\frac{d-1}{4}}$, sur une tranche de diamètre d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$ autour de la géodésique $\{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Minoration L^p de fonctions propres. À notre connaissance, le meilleur résultat est dû à Burq-Lebeau [BL13]. Leur preuve montre le résultat suivant.

Théorème 2.1.8. — [BL13] *Soit X une variété riemannienne compacte sans bord, il existe une constante $\alpha \geq 0$ et une base hilbertienne $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(X)$ vérifiant*

- i) *pour tout $p \in [2, +\infty[$, la suite (φ_n) est bornée dans $L^p(X)$,*
- ii) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \geq 0$ tel que la fonction φ_n soit spectralement localisée dans $[\lambda_n, \lambda_n + \alpha]$ par rapport à $\sqrt{-\Delta}$.*

En fait, Burq et Lebeau montrent le résultat précédent pour $\alpha = 0$ dans le cas important de la sphère $X = \mathbb{S}^d$ mais signalent que leur démarche est valide en toute généralité ([BL13, Remarque 3.3]) et repose presque exclusivement sur le corollaire 2.1.7. Les méthodes de [BL13] permettent aussi d'obtenir des variantes L^∞ de la forme $\|\varphi_n\|_{L^\infty(X)} \lesssim \sqrt{\ln(\lambda_n)}$.

2.2. L'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$

2.2.1. Définitions. — Rappelons très brièvement l'analyse spectrale de l'opérateur $-\Delta + |x|^2$. Cet opérateur, défini sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, est essentiellement auto-adjoint en tant qu'opérateur à domaine dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (voir par exemple [BS91]). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $H_n \in \mathbb{R}[X]$ le n -ième polynôme de Hermite ainsi que h_n la n -ième fonction de Hermite :

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad \text{et} \quad h_n(x) := \frac{H_n(x)}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

On vérifie que l'on a $\|h_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. On définit aussi le sous-espace suivant de $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$E_{d,n} := \text{Vect}\{h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_d}; \quad (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d, \quad i_1 + \cdots + i_d = n\},$$

où l'on note classiquement $(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_d})(x) = h_{i_1}(x_1) \cdots h_{i_d}(x_d)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Les fonctions $h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_d}$ forment une base hilbertienne de $E_{d,n}$ et l'on vérifie aussi que l'on a

$$(16) \quad d_n := \dim(E_{d,n}) = \frac{(n+1) \cdots (n+d-1)}{(d-1)!} \sim \frac{n^{d-1}}{(d-1)!}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Il faut savoir de plus que $E_{d,n}$ est le sous-espace propre de $-\Delta + |x|^2$ associé à la valeur propre $d + 2n$ et que l'on a la somme directe orthogonale

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_{d,n}.$$

2.2.2. Analogie avec les variétés de Zoll. — Soulignons les deux points suivants :

- i) le symbole de $-\Delta + |x|^2$ est raisonnablement $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto |\xi|^2 + |x|^2$. Le flot hamiltonien de ce symbole pour la forme symplectique usuelle sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ est défini par les équations

$$\begin{cases} x' &= 2\xi \\ \xi' &= -2x \end{cases}$$

Ainsi, le flot est manifestement π -périodique.

- ii) le spectre de $-\Delta + |x|^2$, sans compter les multiplicités, est une suite arithmétique de raison 2.

On voit ainsi une comparaison avec le théorème 2.1.5 relatif aux variétés de Zoll (avec $\tau = \pi$). Helffer et Robert ont montré dans [HR82b, Corollaire 7.9] que cela n'est nullement une coïncidence et des preuves similaires sont possibles pour effectuer cet éclairage. Cela amène d'ailleurs à comparer $-\Delta + |x|^2$ à l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ et donc à considérer $-\Delta + |x|^2$ comme un opérateur d'ordre 1. Ce point de vue sera éclairé par le calcul de Weyl-Hörmander (voir la partie 2.5).

2.2.3. Concentration de la fonction spectrale, d'après [6]. — Dès lors que l'on souhaite étudier des propriétés concrètes des fonctions propres de l'oscillateur harmonique, une dichotomie s'opère selon que l'on travaille en dimension $d = 1$ ou en dimension $d \geq 2$ (cela transparait par exemple dans l'énoncé des estimées L^p obtenues par Koch-Tataru dans [KT05, Corollary 3.2]). Afin d'éviter des répétitions, nous reviendrons dans la partie 2.3.3 sur certaines estimations optimales des fonctions propres. Contentons-nous ici de donner une minoration-majoration de la fonction spectrale tronquée au n -ième niveau d'énergie. De façon précise, on définit

$$(17) \quad \begin{aligned} e_{d,n}(x) &:= \sup\{|u_n(x)|^2, \quad u_n \in E_{d,n}, \quad \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1\} \\ &= \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d \\ i_1 + \dots + i_d = n}} h_{i_1}(x_1)^2 \cdots h_{i_d}(x_d)^2. \end{aligned}$$

Le résultat suivant nous informe que la fonction spectrale $e_{d,n}$ a tendance à se concentrer sur une boule de rayon d'ordre \sqrt{n} (voir plus loin (20) un énoncé plus précis si x est éloigné de 0).

Proposition 2.2.1. — [6, Proposition 4.1] *Supposons $d \geq 2$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ on a*

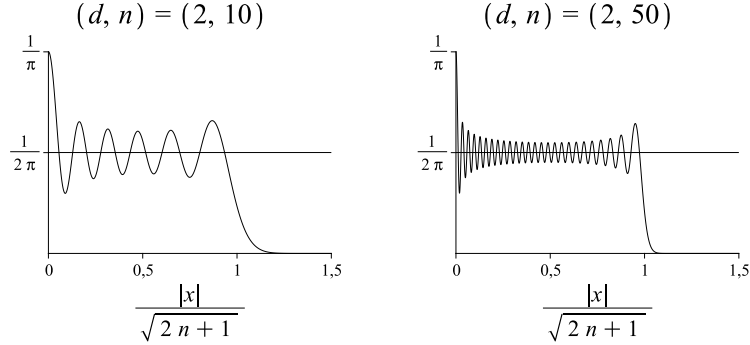
$$(18) \quad \begin{aligned} |x| \leq \sqrt{2(2n+1)} &\Rightarrow e_{d,n}(x) \leq C(d)n^{\frac{d}{2}-1}, \\ |x| \geq \sqrt{2(2n+1)} &\Rightarrow e_{d,n}(x) \leq C(d)e^{-\frac{|x|^2}{C(d)}}. \end{aligned}$$

Il existe aussi une constante universelle $\alpha \in]0, 1[$ et un entier $n(d) \in \mathbb{N}^$ tels que pour tout entier $n \geq n(d)$ on a, quitte à augmenter $C(d) \geq 1$, l'implication*

$$(19) \quad \frac{C(d)}{\sqrt{2n+1}} \leq |x| \leq \alpha\sqrt{2n+1} \Rightarrow \frac{n^{\frac{d}{2}-1}}{C(d)} \leq e_{d,n}(x) \leq C(d)n^{\frac{d}{2}-1}.$$

Un tel énoncé ne peut pas avoir lieu en dimension $d = 1$, car les fonctions de Hermite oscillent beaucoup trop (voir [6, Proposition 4.7]).

Comme les isométries de \mathbb{R}^d commutent avec l'oscillateur harmonique, elles stabilisent ses sous-espaces propres. A fortiori, la fonction $x \mapsto e_{d,n}(x)$ est invariante par rotation autour de 0, si bien que l'on a $e_{d,n}(x) = e_{d,n}(|x|, 0, \dots, 0)$. À titre d'exemple, on examine les graphes pour $d = 2$ et $n \in \{10, 50\}$ de $e_{d,n}(x)$ en fonction de $|x| \in [0, \frac{3}{2}\sqrt{2n+1}]$.



La majoration (18) est grossière et est obtenue grâce à des majorations classiques des fonctions de Hermite. Quant à la minoration de (19), sa démonstration est plus subtile et utilise des approximations essentiellement optimales des fonctions de Hermite unidimensionnelles dues à Muckenhaupt. C'est pour cela que $|x|$ est comparé à $\sqrt{2n+1}$ (la n -ième valeur propre de $\sqrt{-\partial_x^2 + x^2}$). Du point de vue de la Physique Mathématique, il s'agit d'un artifice technique et il faudrait en réalité comparer avec $\sqrt{2n+d}$ la n -ième valeur propre de $\sqrt{-\Delta + |x|^2}$. Pour expliquer ce point, on peut

- i) ou bien renvoyer à la proposition 2.3.1 ci-après ayant trait à l'oscillateur superquadratique $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$,
- ii) ou bien signaler le lemme 10 de l'article [HZZ15] dans lequel se trouvent des estimations plus précises si $|x|$ appartient à un compact de la forme $[a\sqrt{2n+d}, b\sqrt{2n+d}]$ avec $0 < a < b < 1$. Par souci de comparaison, on se permet d'écrire cette approximation :

$$(20) \quad e_{d,n}(x) = \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{(2\pi)^d} (2n+d - |x|^2)^{\frac{d}{2}-1} \left(1 + \mathcal{O}_{a,b} \left(\frac{1}{2n+d} \right) \right),$$

où $\mathcal{O}_{a,b}$ est uniforme en la condition $a \leq \frac{|x|}{\sqrt{2n+d}} \leq b$. Il s'agit d'une loi de Weyl locale pour l'oscillateur harmonique. Cela explique au passage pour $d=2$ l'ordonnée $\frac{1}{2\pi}$ des deux graphiques précédents.

De façon générale, il est reconnu qu'il est plus difficile d'obtenir des minoration de la fonction spectrale, tronquée à un niveau d'énergie, d'un opérateur elliptique que des majorations (dans le même esprit, il est plus difficile d'estimer le reste d'une fonction spectrale que d'en obtenir seulement un équivalent du terme principal, voir le théorème 2.1.6). Ainsi, l'intérêt de la proposition 2.2.1 n'est pas sa majoration mais sa minoration. C'est pour cette raison que des calculs explicites de fonctions propres nous ont été nécessaires.

Pour finir cette partie, remarquons que nous sommes obligés d'éviter, en toute rigueur, un voisinage de l'origine pour effectuer une minoration uniforme de $e_{d,n}$ dans (19). En effet, pour tout entier n impair la fonction h_n est impaire et donc $e_{d,n}(0)$ est nul. On peut pousser plus loin cette analyse en justifiant l'optimalité de la taille du voisinage de 0 évité. Autrement dit, on ne peut pas remplacer la condition $\frac{1}{\sqrt{n}} \lesssim |x|$ dans (19) par $\frac{1}{n^\theta} \lesssim |x|$ avec $\theta > \frac{1}{2}$. Pour comprendre ce point, nous avons besoin d'utiliser que l'oscillateur harmonique jouit d'une inégalité de Bernstein (voir (35)) :

$$\forall u_n \in E_{d,n} \quad \|\nabla u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim \sqrt{n} \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

qui à son tour donne grâce à (17) et (18) :

$$\forall u_n \in E_{d,n} \quad \|\nabla u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim n^{d/4} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Ainsi, pour n impair et $|x| \simeq \frac{1}{n^\theta}$, les formules $u_n(0) = 0$ et (17) nous donnent

$$e_{d,n}(x) \lesssim n^{-2\theta} \sup\{|\nabla u_n(x)|^2, \quad u_n \in E_{d,n}, \quad \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1\} \lesssim n^{\frac{d}{2}-2\theta} \ll n^{\frac{d}{2}-1}.$$

2.3. L'oscillateur superquadratique $-\Delta + |x|^{2\alpha}$

2.3.1. Définitions basiques et analyse spectrale. — On rappelle quelques propriétés de l'opérateur $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Tout comme le cas $\alpha = 1$, cet opérateur, défini sur l'espace de Schwartz, est essentiellement auto-adjoint. Il existe une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d)$ constituée de fonctions propres. Les valeurs propres associées peuvent être ordonnées en une suite croissante strictement positive. Tout comme l'oscillateur harmonique, le calcul de Weyl-Hörmander suggère que $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ ne doit pas être considéré comme un opérateur d'ordre 2 mais comme un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $\frac{2\alpha}{\alpha+1}$ (voir la partie 2.5). Par comparaison avec l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ d'une variété compacte ou l'oscillateur harmonique, on imagine que les bonnes fenêtres spectrales (ou clusters) d'un opérateur d'ordre 1 sont à croissance linéaire. Après homogénéisation, les bonnes fenêtres spectrales de $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ à examiner sont de la forme $I_n := [\kappa n^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \kappa(n+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}[$ pour une certaine constante $\kappa > 0$. Voici une autre raison de considérer ces fenêtres spectrales : commençons par noter E_n le sous-espace des fonctions spectralement localisées dans I_n par rapport à $-\Delta + |x|^{2\alpha}$, c'est-à-dire

$$(21) \quad E_n := \text{Im}(\mathbf{1}_{I_n}(-\Delta + |x|^{2\alpha})).$$

En utilisant une formule de Weyl avec reste obtenue par Helffer-Robert (voir [HR82b, Théorème 6-4, page 840]), on vérifie l'asymptotique :

$$\forall \kappa \gg 1 \quad \forall n \gg 1 \quad \dim(E_n) \simeq n^{d-1}.$$

L'échelle spectrale $n^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$ est donc bien cohérente avec (16) et le corollaire 2.1.7.

En fait, la formule de Weyl est valide en remplaçant $|x|^{2\alpha}$ par un polynôme réel $V_{2\alpha}$ à d variables qui est à la fois 2α -homogène et à la fois strictement positif sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Passons maintenant à une interprétation symbolique. Le symbole de $-\Delta + V_{2\alpha}(x)$ est $|\xi|^2 + V_{2\alpha}(x)$. On peut se demander si l'on peut avoir une localisation spectrale "à la Zoll" sous l'hypothèse que le flot hamiltonien du symbole $|\xi|^2 + V_{2\alpha}(x)$ est périodique dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (voir le théorème 2.1.5 et la partie 2.2.2). En théorie, c'est vrai et cela fut prouvé par Helffer-Robert dans [HR82b, Corollaire 7.9]. Malheureusement, il n'existe essentiellement que deux cas connus (sauf changement de variables s'y ramenant) :

- i) l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$ en toute dimension,
- ii) l'oscillateur superquadratique $-\partial_x^2 + x^{2\alpha}$ en dimension $d = 1$.

Dans le cas unidimensionnel, c'est-à-dire le second cas, on note que la périodicité du flot hamiltonien de $\xi^2 + x^{2\alpha}$ dans \mathbb{R}^2 est triviale : le flot est à valeurs dans une courbe d'équation $\xi^2 + x^{2\alpha} = \text{constante}$. Il se trouve aussi que l'on a des informations sensiblement plus précises qu'une loi de Weyl. Notons $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite croissante des valeurs propres, en comptant les multiplicités de $\sqrt{-\partial_x^2 + x^{2\alpha}}$. On notera que λ_k est valeur propre simple donc $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante (voir [BS91, Chapter 2.3]). En conséquence, d'un résultat de Helffer-Robert (voir [HR82a, theorem (2-2), page 858]), on a le développement asymptotique

$$(22) \quad \lambda_k = \sum_{\ell=0}^{\alpha+1} c_\ell(\alpha) k^{\frac{\alpha-\ell}{\alpha+1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{\frac{2}{\alpha+1}}}\right), \quad c_0(\alpha) > 0.$$

En fait, on peut pousser le développement asymptotique précédent aussi loin que nécessaire mais l'ordre précédent est le seul à nous être utile. On en déduit l'asymptotique

$$(23) \quad \forall k \gg 1 \quad \lambda_{k+1} - \lambda_k \simeq \frac{1}{k^{1/(\alpha+1)}} \simeq \frac{1}{\lambda_k^{1/\alpha}}.$$

Pour finir cette partie, on revient en toute dimension d'espace afin de rappeler la caractérisation des espaces de Sobolev de $-\Delta + |x|^{2\alpha}$. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, l'espace de Sobolev $\mathcal{H}_\alpha^s(\mathbb{R}^d)$ est le sous-espace des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\|f\|_{\mathcal{H}_\alpha^s(\mathbb{R}^d)} := \left\| (-\Delta + |x|^{2\alpha})^{s/2} f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty.$$

D'après [YZ04, Lemma 2.4 avec $p = 2$], une norme équivalente est

$$(24) \quad \|f\|_{\mathcal{H}_\alpha^s(\mathbb{R}^d)} \simeq \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{2\alpha s} |f(x)|^2 dx}.$$

La définition (21) des sous-espaces E_n amène à la définition spectrale

$$(25) \quad f \in \mathcal{H}_\alpha^s(\mathbb{R}^d) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n \geq 1} n^{\frac{2\alpha s}{\alpha+1}} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 < +\infty.$$

2.3.2. Concentration des fonctions propres, d'après [7]. — Voici une généralisation, à sens unique, de la proposition 2.2.1.

Proposition 2.3.1. — [7, Proposition 17.1] *Fixons un potentiel lisse $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $V(x) \gtrsim |x|^{2\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour tout $T \in \mathbb{N}^*$ et toutes fonctions propres ψ_1, \dots, ψ_T de $-\Delta + V(x)$, associées à des valeurs propres inférieures à μ , on a*

$$(26) \quad |x| \gtrsim \mu^{\frac{1}{2\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^T |\psi_k(x)|^2 \leq C \left\| \sum_{k=1}^T |\psi_k|^2 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \exp\left(-\frac{1}{C}|x|^{\alpha+1}\right).$$

Étrangement, notre preuve de la proposition précédente n'utilise ni que les fonctions propres ψ_1, \dots, ψ_T dans (26) sont normalisées dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ ni même qu'elles sont associées à des valeurs propres successives. La preuve est directement inspirée d'une technique employée dans la preuve de [BS91, Theorem 3.3, page 173] (qui ne traite qu'une seule fonction propre). D'ailleurs pour une unique fonction propre, l'énoncé précédent explique qu'une fonction spectralement localisée dans $[0, \mu]$ est spatialement localisée dans une boule fermée $\overline{B}(0, C\mu^{1/2\alpha})$ (modulo un reste exponentiel).

Dans des cas spécifiques, il existe d'autres stratégies de preuves dont certaines sont basées sur des estimations du noyau de la chaleur. On se réfère à [Muc70, line (2.3)], [PRT15, Lemma 3.2], [RT15] et [Kar95, Theorem 4].

Par comparaison avec l'oscillateur harmonique (proposition 2.2.1), nous ne savons pas minorer la fonction spectralement ponctuellement. Mentionnons néanmoins que Robert et Thomann ont réussi à obtenir certaines estimations optimales, dans des espaces de Lebesgue à poids, en considérant des sous-espaces spectralement supportés sur des intervalles très larges (voir [RT15]). Il s'avère que la proposition 2.3.1 permet de préciser une majoration obtenue par Robert-Thomann. La preuve de la proposition suivante repose sur la même idée que le fait suivant : soit (f_n) une suite de $L^\infty([0, 1])$ vérifiant $\|f_n\|_{L^2} \gtrsim 1$ et $\|f_n\|_{L^\infty} \lesssim 1$, alors $\|f_n\|_{L^p} \simeq 1$ pour tout $p \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}]$.

Proposition 2.3.2. — [7, Proposition 22.1] *On suppose $d \geq 2$. Fixons $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons E_n le sous-espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ spectralement localisées dans $[\kappa n^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \kappa(n+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}[$ par rapport à $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ (avec $\kappa \gg 1$ fixé à l'avance). Soit e_n la fonction spectrale de E_n , c'est-à-dire la fonction $|\psi_1|^2 + \dots + |\psi_T|^2$ où (ψ_1, \dots, ψ_T) est une base hilbertienne de E_n . Alors, on a*

$$(27) \quad \forall p \in [1, +\infty) \cup \{+\infty\} \quad \forall n \gg 1 \quad \|\sqrt{e_n}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \simeq n^{\frac{d}{2(\alpha+1)}(\alpha + \frac{2}{p}) - \frac{1}{2}}.$$

Démonstration. — Notons $\Theta(p) := \frac{d}{2(\alpha+1)}(\alpha + \frac{2}{p}) - \frac{1}{2}$ et expliquons dans un premier temps pourquoi l'on a l'inégalité $\|\sqrt{e_n}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim n^{\Theta(p)}$. Par interpolation, il suffit de comprendre

- le cas $p = +\infty$. On a effectivement $\|e_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim n^{\frac{\alpha d}{\alpha+1} - 1}$ d'après un résultat de Robert et Thomann [RT15, Proposition 2.4, $\delta = 1, \theta = 0, r = \infty$].
- le cas $p = 1$. On invoque alors (26) avec $\mu \simeq n^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$: il existe $C \geq 1$ tel que

$$(28) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad e_n(x) \leq \|e_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \left(\mathbf{1}_{B(0, Cn^{1/(\alpha+1)})}(x) + C \exp\left(-\frac{1}{C}|x|^{\alpha+1}\right) \right).$$

On utilise alors le cas $p = +\infty$ et l'on intègre :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{e_n(x)} dx \lesssim n^{\frac{1}{2} \frac{\alpha d}{\alpha+1} - \frac{1}{2}} n^{\frac{d}{\alpha+1}} = n^{\Theta(1)}.$$

Il nous reste à justifier l'inégalité opposée $\|\sqrt{e_n}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \gtrsim n^{\Theta(p)}$. À cet effet, on utilise un nouvel argument d'interpolation : on distingue selon que $2 \in [p, \infty]$ ou $2 \in [1, p]$ et on invoque

$$\|\sqrt{e_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \sqrt{\dim(E_n)} \simeq n^{\frac{d-1}{2}} = n^{\Theta(2)}.$$

□

2.3.3. Quelques estimées optimales $L^2 \rightarrow L^p$, d'après [7]. — En ce qui concerne les estimations dans $L^p(\mathbb{R})$ des modes propres de l'opérateur unidimensionnel $-\partial_x^2 + x^{2\alpha}$, elles ont été obtenues par Yajima et Zhang [YZ01]. Le cas $d \geq 2$ n'est pas complet à notre connaissance. Nous exposons ci-après quelques résultats obtenus dans [7]. Le premier est l'une des conséquence de la propriété de concentration (26). En effet, cette dernière nous a permis de prouver l'optimalité du cas $p = \infty$ dans (27), qui à son tour donne gratuitement le résultat suivant.

Proposition 2.3.3. — [7, Proposition 5.1] *Supposons $d \geq 2$ et considérons $\kappa \gg 1$, alors on a*

$$(29) \quad \forall n \gg 1 \quad \sup_{\substack{f \in E_n \\ f \neq 0}} \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \simeq n^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha d}{\alpha+1}-1)},$$

où E_n est le sous-espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ spectralement localisées dans $[\kappa n^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \kappa(n+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}]$ par rapport à $-\Delta + |x|^{2\alpha}$.

Démonstration. — En reprenant la notation $e_n(x) = |\psi_1(x)|^2 + \dots + |\psi_T(x)|^2$ précédant (27), on invoque la formule :

$$\|e_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{(a_1, \dots, a_T) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{|a_1 \psi_1(x) + \dots + a_T \psi_T(x)|^2}{a_1^2 + \dots + a_T^2} = \sup_{\substack{f \in E_n \\ f \neq 0}} \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2}{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}. \quad \square$$

Ce résultat donne une première preuve implicite de l'optimalité d'une estimation obtenue par Koch-Tataru [KT05, Corollary 3.2, $p = \infty$] pour l'oscillateur harmonique. Une preuve explicite a été obtenue dans [8, Proposition 2.4] : les fonctions propres radiales de $-\Delta + |x|^2$ optimisent les bornes $L^2 \rightarrow L^\infty$. Il est donc plausible que les fonctions propres radiales de $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ optimisent (29) mais nous ne voyons pas d'angle d'attaque simple pour le prouver.

Voici une autre application de la propriété de concentration (26) que l'on combine avec un argument probabiliste. En fait, il est connu que des arguments de grandes déviations ou de concentration de la mesure permettent d'obtenir des estimées L^p optimales (voir [BL13, PRT15]). Signalons seulement que le cas $p \in [1, 2]$ ne nous paraît pas avoir été étudié. De plus, nous utilisons ici un nouvel argument probabiliste basé sur les inégalités de Kahane-Khintchine-Marcus-Pisier sur lesquelles nous reviendrons dans l'un des chapitres suivants.

Proposition 2.3.4. — [7, Proposition 5.2] *Supposons $d \geq 2$ et considérons $\kappa \gg 1$, alors on a*

$$(30) \quad \forall p \in [2, +\infty) \quad \forall n \gg 1 \quad \inf_{\substack{f \in E_n \\ f \neq 0}} \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \simeq n^{-\frac{d}{\alpha+1}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})},$$

$$(31) \quad \forall p \in [1, 2] \quad \forall n \gg 1 \quad \sup_{\substack{f \in E_n \\ f \neq 0}} \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \simeq n^{\frac{d}{\alpha+1}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}.$$

où E_n est le sous-espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ spectralement localisées dans $[\kappa n^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \kappa(n+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}]$ par rapport à $-\Delta + |x|^{2\alpha}$.

Pour ces deux dernières estimations, les idées de preuve sont les suivantes :

- d'après la proposition 2.3.1, les fonctions $f \in E_n$ sont concentrées sur une boule $B(0, Cn^{\frac{1}{\alpha+1}})$. En supposant $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$, l'inégalité de Hölder donne forcément une majoration de la norme $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ si $p \in [1, 2]$ (respectivement une minoration si $p \in [2, +\infty[)$.
- on introduit alors une fonction aléatoire $f^\omega \in E_n$ qui suit une loi uniforme sur la sphère unité hilbertienne de E_n . La proposition suivante montre qu'il existe au moins un élément ω qui sature les estimations précédentes.

Proposition 2.3.5. — [7, Proposition 14.1] *Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et (ψ_1, \dots, ψ_T) une base hilbertienne de E_n . Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a*

$$\mathbf{E} \left[\|f^\omega\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right] \simeq \left\| \frac{\sqrt{|\psi_1(x)|^2 + \dots + |\psi_T(x)|^2}}{\sqrt{\dim(E_n)}} \right\|_{L_x^p(\mathbb{R}^d)} \simeq n^{-\frac{d}{\alpha+1}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}.$$

Démonstration. — Nous avons défini f^ω comme une fonction aléatoire suivant une loi uniforme sur la sphère unité hilbertienne de E_n . Ainsi, si \mathcal{E} est une isométrie aléatoire suivant une loi uniforme dans le groupe unitaire $U_T(\mathbb{C})$ avec $T = \dim(E_n)$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad f^\omega(x) = \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \mathcal{E}_{i,j}(\omega) \langle f, \phi_j \rangle \phi_i(x).$$

Grâce aux inégalités (72), on a l'équivalence $\mathbf{E}[\|f^\omega\|_{L^p(X)}]^p \simeq \mathbf{E}[\|f^\omega\|_{L^p(X)}^p]$. Le théorème de Fubini et de nouveau les inégalités (72) permettent de contrôler la précédente espérance par

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{E}[|f^\omega(x)|^p] dx \simeq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{E}[|f^\omega(x)|^2]^{p/2} dx.$$

Il s'avère que l'espérance $\mathbf{E}[|f^\omega(x)|^2]$ peut être calculée explicitement et vaut $\frac{e_n(x)}{\dim(E_n)}$. La fin découle de (27). \square

Signalons que les arguments de grandes déviations développés dans [BL13, RT15] devraient permettre de construire des bases hilbertiennes saturant les estimations de la proposition 2.3.4.

2.4. Inégalités de Bernstein

2.4.1. Bref survol et reformulation semi-classique. — Dans cette partie nous expliquons les grandes lignes d'une preuve de l'inégalité de Bernstein sur une variété riemannienne compacte sans bord. L'inégalité escomptée (32) n'est pas nouvelle mais nous proposons un point de vue différent qui présente l'avantage d'être utilisable pour l'opérateur $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ (voir la partie suivante).

Le point de départ est l'inégalité de Bernstein (1926) sur le tore : fixons un entier $N \in \mathbb{N}^*$ et $P : x \mapsto \sum_{k=-N}^N p_k e^{ikx}$ un polynôme trigonométrique 2π -périodique à coefficients complexes sur \mathbb{R} . Alors on a

$$\|P'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq N \|P\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

L'inégalité précédente est optimale pour $P(x) = e^{iNx}$.

Notons à présent X une variété riemannienne compacte sans bord. L'inégalité de Bernstein prend alors la forme suivante.

Théorème 2.4.1. — [FM10] *Considérons ϕ_0, \dots, ϕ_N des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ . Notons λ_N la plus grande valeur propre de $\sqrt{-\Delta}$ de ces fonctions. Alors*

$$(32) \quad \forall (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \quad \left\| \nabla \sum_{k=0}^N a_k \phi_k \right\|_{L^\infty(X)} \lesssim \lambda_N \left\| \sum_{k=0}^N a_k \phi_k \right\|_{L^\infty(X)}.$$

Le résultat précédent apparaît comme une conséquence du papier [FM10] utilisant des noyaux de la chaleur. Mentionnons que (32) apparaît aussi dans le cas d'une seule fonction propre dans [OCP13, Corollary 3.3].

L'examen de [FM10, Theorem 2.1, line (2.12)] suggère que (32) devrait se déduire de l'estimation suivante que l'on peut qualifier d'inégalité de Bernstein semi-classique :

$$(33) \quad \exists C > 0 \quad \forall h \in]0, 1] \quad \forall u \in L^\infty(X) \quad \left\| \nabla \{ \Psi(h\sqrt{-\Delta})u \} \right\|_{L^\infty(X)} \leq \frac{C}{h} \|u\|_{L^\infty(X)},$$

où $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction C^∞ à support dans $[-2, 2]$ et qui vaut 1 sur $[0, 1]$. En effet, nous avons les deux implications :

- (33) \Rightarrow (32). Pour $h = \frac{1}{\lambda_N} < 1$, l'opérateur $\Psi(h\sqrt{-\Delta})$ laisse fixe $u = \sum_{k=0}^N a_k \phi_k$.
- (32) \Rightarrow (33). Pour toute distribution u sur X , la fonction $\Psi(h\sqrt{-\Delta})u$ est fréquemment supportée dans $[0, \frac{2}{h}]$, si bien que l'on a $\left\| \nabla \{ \Psi(h\sqrt{-\Delta})u \} \right\|_{L^\infty(X)} \lesssim \frac{1}{h} \left\| \Psi(h\sqrt{-\Delta})u \right\|_{L^\infty(X)}$. On obtient (33) grâce à l'inégalité suivante due à Burq-Gérard-Tzvetkov [BGT04, Corollary 2.2] :

$$(34) \quad \exists C > 0 \quad \forall h \in]0, 1] \quad \left\| \Psi(h\sqrt{-\Delta}) \right\|_{L^\infty(X) \rightarrow L^\infty(X)} \leq C.$$

Par comparaison, il est logique que les arguments de la preuve de (34) permettent de montrer (33), c'est-à-dire qu'il existe une preuve semi-classique du théorème 2.4.1. Expliquons les grandes lignes d'une telle preuve. Le calcul fonctionnel semi-classique prévoit que, si l'on se ramène à une carte locale de la variété X , alors modulo un reste arbitrairement régularisant, l'opérateur $\Psi(h\sqrt{-\Delta})$ peut se décomposer en une somme finie d'opérateur pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^d de la forme $h^k\sigma(x, hD)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ est à support compact (voir un énoncé précis dans [BGT04, Proposition 2.1]). Dans ce qui précède, $\sigma(x, hD)$ est défini par la quantification standard à l'aide de la formule :

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \sigma(x, hD)u = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \sigma(x, h\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

Par compacité de la variété X , on remarquera que la métrique riemannienne sur X est uniformément contrôlée sur une carte locale par n'importe quelle norme euclidienne fixée à l'avance. Par conséquent, estimer un gradient revient à estimer, dans une carte locale, toutes les dérivées partielles suivant une base. Puisque h appartient à $]0, 1]$, la preuve de (33) sera alors conséquence d'inégalités de la forme

$$\forall j \in \{1, \dots, d\} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \sigma(x, hD)u \} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim \frac{1}{h} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

On écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \{ \sigma(x, hD)u \} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} i\xi_j \sigma(x, h\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \partial_{x_j} \sigma(x, h\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

Autrement dit, en forçant l'équation $i\xi_j = \frac{1}{h}ih\xi_j$, on a une formule

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \{ \sigma(x, hD)u \} = \frac{1}{h} \sigma_1(x, hD)u + \sigma_2(x, hD)u$$

où $\sigma_1(x, \xi) = i\xi_j \sigma(x, \xi)$ et $\sigma_2(x, \xi) = \partial_{x_j} \sigma(x, \xi)$. L'écriture précédente peut s'interpréter comme un calcul symbolique exact (voir [AG91, page 38]). Ces deux nouveaux symboles continuent à être à support compact dans l'espace des phases $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Pour conclure, il reste à remarquer que si σ est un symbole à support compact, alors l'opérateur $\sigma(x, hD)$ est uniformément borné de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ par rapport à $h \in]0, 1]$ (ce qui peut se voir grâce à des estimations de leurs noyaux de Schwartz comme dans la preuve de [BGT04, Corollary 2.2]).

2.4.2. Inégalité de Bernstein pour $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ et concentration polaire, d'après [7]. — Nous présentons ici une inégalité de Bernstein pour les opérateurs superquadratiques $-\Delta + |x|^{2\alpha}$. Ce résultat sera utilisé dans le chapitre 4 lorsque nous étudierons la convergence dans L^∞ de combinaisons aléatoires de fonctions propres. Le principe de preuve sera expliqué dans la partie suivante.

Théorème 2.4.2. — [7, Theorem 5.3] *En toute dimension d'espace $d \geq 1$, pour tout entier $\alpha \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ spectralement localisée dans un intervalle $[0, \rho]$ par rapport à $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ (en particulier f est lisse d'après (24)), on a*

$$(35) \quad \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C\sqrt{\rho} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Nous avons déjà mentionné plus haut l'article [FM10] qui donne une stratégie générale via des noyaux de la chaleur pour obtenir des inégalités de la forme (35). Dans le cas $\alpha = 1$, c'est-à-dire dans le cas de l'oscillateur harmonique, le noyau de la chaleur a des formules explicites (formules de Mehler) qui permettent d'utiliser les résultats de [FM10]. Dans le cas $\alpha \geq 2$, nous n'avons pas trouvé d'estimations que nous pouvions utiliser. C'est pour cette raison que nous allons adapter la stratégie semi-classique expliquée dans la partie précédente.

On se propose de donner un éclairage sur un phénomène de concentration polaire impliqué par l'inégalité de Bernstein. Dans la partie 2.1.4, nous avons rappelé que certaines estimées $L^2 \rightarrow L^p$ de fonctions propres sont la manifestation d'un phénomène de concentration (autour d'un point ou autour d'une géodésique). De même, nous avons expliqué que les preuves des propositions 2.3.3 et 2.3.4 utilisaient des arguments de concentration de fonctions propres (en l'occurrence la propriété de décroissance exponentielle (26)). En outre, ces deux preuves ne fournissent pas d'exemples explicites de fonctions f_n optimisant les bornes (29), (30) et (31). Comme précédemment, on note E_n le sous-espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ spectralement localisées dans $[\kappa n^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \kappa(n+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}]$ par rapport à $-\Delta + |x|^{2\alpha}$. Considérons une suite de fonctions $f_n \in E_n$ qui optimisent la borne $L^2 \rightarrow L^\infty$ (29). Quitte à considérer un point $x_n \in \mathbb{R}^d$

qui maximise f_n , l'inégalité de Bernstein, avec $\rho \simeq n^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$, implique que f_n se concentre au moins sur boule ouverte de la forme $B(x_n, cn^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}})$. Une telle concentration et (29) donnent alors

$$(36) \quad \begin{aligned} \forall p \geq 2 \quad \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\gtrsim \|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} n^{-\frac{d\alpha}{p(\alpha+1)}} \\ &\gtrsim n^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha d}{\alpha+1}-1)-\frac{d}{p}\frac{\alpha}{\alpha+1}} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = n^{\frac{d\alpha}{\alpha+1}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, (30) nous donne la borne $L^2 \rightarrow L^p$ minimale pour une fonction $f_n \in E_n$. Un calcul montrerait que la borne inférieure (36) est intéressante dès lors que

$$\frac{d\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{2} > -\frac{d}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right),$$

c'est-à-dire $p > \frac{2d}{d-1}$. En d'autres termes, l'exposant $p := \frac{2d}{d-1}$ est le plus petit exposant au-delà duquel la concentration en un point est significative. Cette interprétation est connue dans les exemples suivants :

- Les fonctions zonales de la sphère (voir la partie 2.1.4). Cela dit, en faisant tendre α vers $+\infty$ pour le modèle linéaire de l'opérateur $-\Delta + |x|^{2\alpha}$, il serait plus raisonnable de considérer comme modèle limite l'opérateur Laplacien sur la boule unité de \mathbb{R}^d avec condition de Dirichlet. Il s'avère que des observations similaires sont vraies (voir [AT08, Lemma 2.5]);
- Pour l'oscillateur harmonique, $-\Delta + |x|^2$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, nous avons remarqué dans [8, Proposition 2.4] que les bornes optimales $L^2 \rightarrow L^\infty$ (29) sont saturées par les fonctions radiales qui s'avèrent se concentrer autour de $0 \in \mathbb{R}^d$. De nouveau l'exposant $\frac{2d}{d-1}$ intervient dans leurs estimées $L^2 \rightarrow L^p$ (voir [8, Proposition 2.4, Point iii]).

En résumé, le même exposant $\frac{2d}{d-1}$ intervient dans ces différents modèles alors que son calcul est usuellement fait à l'aide de propriétés très spécifiques de certaines classes de fonctions spéciales (polynômes de Jacobi, fonctions de Bessel ou polynômes de Laguerre). Même si les cas à bord méritent une réflexion supplémentaire, l'inégalité de Bernstein montre qu'il ne s'agit pas d'une coïncidence pour l'oscillateur harmonique et l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ sur une variété riemannienne compacte sans bord.

2.4.3. Preuves par paramétrix, d'après [7]. — Dans cette partie, on explique l'idée principale de la preuve de l'inégalité de Bernstein (35). De même que pour le théorème 2.4.1, on se ramène au résultat suivant d'allure semi-classique.

Théorème 2.4.3. — [7, Theorem D.1] *Fixons deux entiers $d \geq 1$ et $\alpha \geq 1$. Considérons de plus une fonction lisse $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, à support compact, qui est constante au voisinage de 0. Il existe alors une constante $C > 0$ telle que pour tout f appartenant à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$(37) \quad \sup_{0 < h \leq 1} \|\Psi(-h^2\Delta + h^2|x|^{2\alpha})f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

$$(38) \quad \sup_{0 < h \leq 1} \|\nabla\{\Psi(-h^2\Delta + h^2|x|^{2\alpha})f\}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{h} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

À proprement parler, le théorème précédent n'est pas semi-classique. En effet, en analyse semi-classique, la variable h^2 est couplée avec Δ et non avec les potentiels. La présence du terme $h^2|x|^{2\alpha}$ est un obstacle et il est maladroit d'essayer d'obtenir un développement de la forme

$$\Psi(-h^2\Delta + h^2|x|^{2\alpha}) = \sum_{k=0}^N h^k \sigma_k(x, hD) + \text{reste}.$$

Par contre, on peut espérer adapter le principe des preuves à l'opérateur $-\Delta + |x|^{2\alpha}$. Signalons qu'une telle stratégie pour montrer (37) avec $\alpha = 1$ est prédite par Burq-Thomann-Tzvetkov, voir [BTT13, page 2156]. En notant $p(x, \xi) = |\xi|^2 + |x|^{2\alpha}$ le symbole de $-\Delta + |x|^{2\alpha}$, nous pouvons construire des symboles q_0, q_1, \dots, q_N en vue d'avoir une écriture de la forme

$$(39) \quad \Psi(-h^2\Delta + h^2|x|^{2\alpha}) = \sum_{k=0}^N h^{2k} \text{Op}^w \left(\Psi^{(k)}(h^2 p(x, \xi)) q_k(x, \xi) \right) + \text{reste},$$

où l'opérateur pseudo-différentiel $\text{Op}^w(\sigma)$ est défini pour toute fonction $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ appartenant à l'espace de Schwartz comme suit

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \text{Op}^w(\sigma)u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \sigma \left(\frac{x+y}{2}, \xi \right) u(y) \frac{dy d\xi}{(2\pi)^d}.$$

Une approche très fructueuse pour étudier un calcul fonctionnel est ce que l'on appelle la formule de Helffer-Sjöstrand (voir [BGT04, Proposition 2.1], [DS99, Theorem 8.7], [Bou11, Theorem 1.5] ou [Bon13, Theorem 4]). Dans notre cas, cette dernière s'énonce comme suit :

$$(40) \quad \Psi(-h^2\Delta + h^2|x|^{2\alpha}) = \frac{-1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ \tilde{\Psi}(h^2 z) \right\} (z + \Delta - |x|^{2\alpha})^{-1} dL(z),$$

où $dL(z)$ est la mesure de Lebesgue de \mathbb{C} et où $\tilde{\Psi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est un prolongement de la fonction Ψ qualifié de "prolongement presque analytique". Nous n'allons pas rentrer dans les détails techniques de cette notion de "presque analyticité". Signalons seulement que l'on construit de manière récursive un symbole dont le quantifié approxime $(z + \Delta - |x|^{2\alpha})^{-1}$. Ce type de stratégie s'appelle la construction d'une paramétrix (voir [HR81, Proposition 2.5] ou [DS99, Part 8]) et permet d'obtenir une formule du type

$$(z - \Delta + |x|^{2\alpha})^{-1} = \text{Op}^w \left(\sum_{k=0}^N \frac{q_k}{(z-p)^{k+1}} \right) + \text{reste}.$$

On trouve alors (39) en injectant la formule précédente dans (40). La preuve de (37) et (38) découle alors d'estimations $L^\infty \rightarrow L^\infty$ des termes apparaissant dans (39) (voir [7, Appendix C]).

2.5. Annexe : calcul de Weyl-Hörmander et $-\Delta + |x|^{2\alpha}$, d'après [7]

Comme annoncé dans la partie 2.3.1, on aimerait justifier pourquoi l'opérateur $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ doit être vu comme un opérateur d'ordre $\frac{2\alpha}{\alpha+1}$. Ce point est de vue est systématique dans l'article [HR82b]. On en donne un autre basé sur le calcul symbolique de Weyl-Hörmander ([Hör85, Parts 18.4,18.5,18.6] ou [Ler10]). Le calcul pseudo-différentiel de Weyl-Hörmander nécessite

- une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (de façon précise, pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on note $g_{x,\xi}$ une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dont les coefficients sont mesurables par rapport à (x, ξ)),
- une fonction mesurable $M : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$ appelé un poids.

On définit alors la classe $S(M, g)$ comme le sous-espace des symboles $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$(41) \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d} \quad \forall (T_1, \dots, T_k) \in (\mathbb{R}^{2d})^k \quad |\partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} \sigma(x, \xi)| \leq C_k M(x, \xi) \prod_{j=1}^k \sqrt{g_{x,\xi}(T_j)},$$

où $\partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} \sigma$ est la différentielle $(d^k \sigma)(T_1, \dots, T_k)$.

Il existe une fonction spéciale, parfois notée $\lambda : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$, qui est naturellement associée à la métrique g (voir [Ler10, Part 2.2.3]). Pour définir λ , rappelons que la classification symplectique des formes quadratiques (voir par exemple [HZ11, Part 1.7]) prédit qu'il existe un symplectomorphisme $\tau_{x,\xi}$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tel que

$$(42) \quad g_{x,\xi} \circ \tau_{x,\xi} = \sum_{j=1}^d \frac{dx_j^2 + d\xi_j^2}{\lambda_j(x, \xi)}, \quad 0 < \lambda_1(x, \xi) \leq \dots \leq \lambda_d(x, \xi).$$

Il s'avère que les nombres $\lambda_1(x, \xi), \dots, \lambda_d(x, \xi)$ sont des invariants symplectiques de $g_{x,\xi}$. On définit alors

$$\lambda(x, \xi) = \lambda_1(x, \xi).$$

Sous des hypothèses très générales sur la métrique g et le poids M (on parle de métriques et poids admissibles), il existe un calcul symbolique pour la composition d'opérateurs pseudo-différentiels $\text{Op}^w(\sigma_1) \circ \text{Op}^w(\sigma_2)$ (voir [Hör85, Theorem 18.5.4] ou [Ler10, Theorem 2.3.7]). Cet opérateur composé est aussi pseudo-différentiel et on le note $\text{Op}^w(\sigma_1 \# \sigma_2)$ où $\sigma_1 \# \sigma_2$ est un certain symbole. L'intérêt de la fonction λ apparaît à présent : pour tous symboles $\sigma_1 \in S(M, g)$ et $\sigma_2 \in S(M', g)$ (où M' est aussi supposé admissible), pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on a un développement de la forme

$$(43) \quad \sigma_1 \# \sigma_2 - \sum_{n=0}^N T_n(\sigma_1, \sigma_2) \in S(MM' \lambda^{-N-1}, g),$$

où $T_n(\sigma_1, \sigma_2)$ est un opérateur bilinéaire différentiel donné par la formule suivante :

$$T_n(\sigma_1, \sigma_2)(x, \xi) := \frac{1}{(2i)^n} \sum_{\substack{(s,t) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \\ |s+t|=n}} \frac{(-1)^{|s|}}{s!t!} (\partial_x^s \partial_\xi^t \sigma_1(x, \xi)) (\partial_\xi^s \partial_x^t \sigma_2(x, \xi)).$$

Les deux premiers termes sont les plus simples : $T_0(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 \sigma_2$ et $T_1(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2i} \{\sigma_1, \sigma_2\}$ fait intervenir le crochet de Poisson de σ_1 et σ_2 . L'écriture (43) amène à considérer λ comme un poids d'ordre 1 car il fait un gagner un cran lors du passage de $T_n(a, b)$ à $T_{n+1}(a, b)$.

Venons-en maintenant à l'opérateur $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ pour un entier fixé $\alpha \geq 1$. On cherche une métrique g et un poids M de sorte que le symbole $|\xi|^2 + |x|^{2\alpha}$ appartienne à $S(M, g)$. Il est raisonnable de considérer la métrique g et le poids M définis par

$$g_{x,\xi} = \sum_{j=1}^d \frac{dx_j^2}{M(x, \xi)^{1/\alpha}} + \frac{d\xi_j^2}{M(x, \xi)} \quad \text{et} \quad M(x, \xi) := 1 + |\xi|^2 + |x|^{2\alpha}.$$

Le symplectomorphisme $(x, \xi) \mapsto (M^{-\frac{1}{4}(1-\frac{1}{\alpha})}x, M^{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{\alpha})}\xi)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ transforme $g_{x,\xi}$ en

$$\sum_{j=1}^d \frac{dx_j^2 + d\xi_j^2}{(1 + |\xi|^2 + |x|^{2\alpha})^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}}.$$

Ainsi, on a $\lambda(x, \xi) = (1 + |\xi|^2 + |x|^{2\alpha})^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}$ et le calcul symbolique donne une explication pour laquelle on considère $(-\Delta + |x|^{2\alpha})^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}$ comme un opérateur d'ordre 1 (comme dans l'article [HR82b]).

CHAPITRE 3

EQUATIONS DE KLEIN-GORDON À SPECTRE DISCRET

3.1. Introduction

Les équations de Klein-Gordon auxquelles nous allons nous intéresser prennent la forme suivante : ayant fixé une variété riemannienne compacte sans bord X et noté Δ son opérateur de Laplace-Beltrami, on étudie l'équation

$$(44) \quad (\partial_t^2 - \Delta + m^2)w = w^{n+1}, \quad (x, t) \in X \times \mathbb{R},$$

où m un nombre > 0 strictement positif (appelé la masse) et n est un entier supérieur ou égal à 1. L'inconnue est la fonction $w : X \times [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Nous allons étudier des solutions fortes de l'équation (44), ce qui signifie qu'elles sont obtenues par application d'un théorème de point fixe dans des parties fermées d'espaces de la forme

$$\mathcal{C}^0([-T, T], H^{s+1}(X)) \cap \mathcal{C}^1([-T, T], H^s(X)), \quad T > 0,$$

où $H^{s+1}(X)$ et $H^s(X)$ sont des espaces de Sobolev à valeurs réelles. On traitera aussi un cas où X est la droite réelle \mathbb{R} en remplaçant l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ par $\partial_x^2 - x^{2\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ (de sorte à travailler dans un cadre à spectre discret).

Les résultats que nous présentons ont tous la forme suivante : si l'on part d'une condition initiale $(w(0), \dot{w}(0))$ d'ordre $\varepsilon \ll 1$ dans $H^{s+1}(X) \times H^s(X)$, avec $s \gg 1$, alors on veut montrer que, sur un intervalle temporel $[-T(\varepsilon), T(\varepsilon)]$ assez grand, la solution reste contrôlée par ε , c'est-à-dire $\|w(t)\|_{H^{s+1}} + \|\dot{w}(t)\|_{H^s(X)} \lesssim \varepsilon$. Les preuves nécessitent en pratique d'obtenir des estimations a priori sur $\|w(t)\|_{H^{s+1}(X)} + \|\dot{w}(t)\|_{H^s(X)}$.

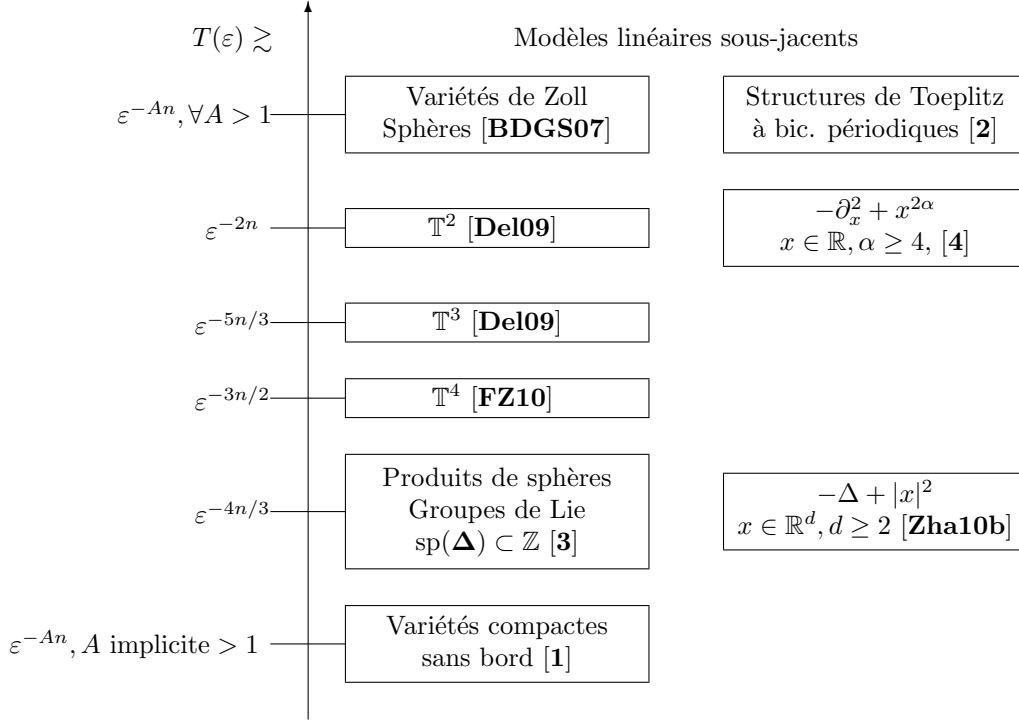
Pour tout $s > \frac{\dim(X)}{2}$, l'espace $H^s(X)$ devient une algèbre de Banach, on peut alors facilement montrer que, pour la non-linéarité w^{n+1} de (44), on peut avoir $T(\varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{-n}$ (voir la proposition 3.2.2 ci-dessous). Le temps ε^{-n} sera appelé le temps d'existence locale. Il s'agit donc d'un résultat de stabilité de la solution nulle.

De façon très caricaturale, la philosophie générale de nos résultats est la suivante : plus le spectre de $\sqrt{-\Delta}$ est séparé et plus $T(\varepsilon)$ est grand. La méthode de prolongement du temps $T(\varepsilon)$ que nous allons utiliser est une procédure de forme normale. En termes de techniques, on peut diviser les cas connus en deux sous-catégories :

- i) cas où le spectre de $\sqrt{-\Delta}$ est séparé uniformément. Cela signifie que les valeurs propres (μ_j) vérifient une estimation de la forme $\mu_{j+1} - \mu_j \gtrsim 1$ (ou une estimation plus faible par paquets, voir le théorème 2.1.5 relatif aux variétés de Zoll). Le résultat espéré est qualifié d'*existence presque globale* en ce sens que l'on a $T(\varepsilon) \gtrsim C_A \varepsilon^{-An}$ pour tout $A > 1$.
- ii) cas où le spectre de $\sqrt{-\Delta}$ est séparé de façon contrôlée. On entend des situations où la suite des valeurs propres $(\mu_j)_{j \geq 0}$ vérifie $\mu_{j+1} - \mu_j \gtrsim \mu_j^{-\beta}$ pour un certain exposant $\beta > 0$ (ou une estimation plus faible comme dans la proposition 2.1.4). Le résultat attendu est l'existence d'un réel $A > 1$ explicite ou implicite tel que $T(\varepsilon) \gtrsim \varepsilon^{-An}$.

Bien que les deux méthodes reposent sur le même principe de réduction par forme normale, les deux implémentations sont différentes du fait que les estimations de petits diviseurs ont des formes radicalement différentes. Pour cette raison, on a choisi d'appeler méthode de *forme normale partielle* la technique d'étude du cas où la séparation n'est pas uniforme mais seulement contrôlée.

En termes d'exemples, une grande majorité des situations connues est résumée par le schéma suivant



Nous nous proposons maintenant de commenter ce schéma par rapport à nos contributions. Ce schéma ne tient pas compte de notre article [5] sur un tore irrationnel car il concerne l'équation des poutres (voir la partie 3.7).

3.2. Perturbation de l'énergie par forme normale en temps ε^{-2n}

Rappelons d'où vient le temps d'existence locale ε^{-n} associé à la non-linéarité w^{n+1} pour l'équation

$$(45) \quad (\partial_t^2 - \Delta + m^2)w = w^{n+1}, \quad (x, t) \in X \times \mathbb{R},$$

Proposition 3.2.1. — *Supposons $s > \frac{1}{2} \dim(X)$, alors les petites solutions de l'équation de Klein-Gordon (45) avec conditions initiales d'ordre $\varepsilon > 0$ dans $H^{s+1}(X) \times H^s(X)$ sont uniformément bornées par $K\varepsilon$ sur un temps de l'ordre de ε^{-n} (pour une certaine constante $K > 0$).*

Pour des raisons pédagogiques, l'énoncé précédent est volontairement un peu flou quant à la dépendance des constantes! En fait, il faut focaliser son attention sur le fait que les solutions sont petites et le demeurent sur un temps assez grand. En termes de quantificateurs, la proposition 3.2.1 se reformule rigoureusement de la façon suivante :

Proposition 3.2.2. — *Supposons $s > \frac{1}{2} \dim(X)$. Pour tout couple $(w_0, w_1) \in H^{s+1}(X) \times H^s(X)$ de fonctions réelles vérifiant $\|w_0\|_{H^{s+1}(X)} + \|w_1\|_{H^s(X)} \leq 1$, il existe deux nombres $C = C(X, m, s, n) > 0$ et $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(X, m, s, n) \in (0, 1)$ tels que l'équation (45) admet une solution unique dans l'espace*

$$\mathcal{C}^0((-C\varepsilon^{-n}, +C\varepsilon^{-n}), H^{s+1}(X)) \cap \mathcal{C}^1((-C\varepsilon^{-n}, +C\varepsilon^{-n}), H^s(X)),$$

avec condition initiale $(w(0, \cdot), \dot{w}(0, \cdot)) = (\varepsilon w_0, \varepsilon w_1)$ avec $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. De plus, il existe $K = K(X, m, s) > 0$ tel que

$$\forall t \in (-C\varepsilon^{-n}, +C\varepsilon^{-n}) \quad \|w(t)\|_{H^{s+1}(X)} + \|\dot{w}(t)\|_{H^s(X)} \leq K\varepsilon.$$

Démonstration. — Reformulons (45) à la Duhamel :

$$\begin{aligned} w(t) &= \cos(t\sqrt{-\Delta + m^2}) w_0 \\ &+ \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta + m^2})}{\sqrt{-\Delta + m^2}} w_1 + \int_0^t \frac{\sin((t-\tau)\sqrt{-\Delta + m^2})}{\sqrt{-\Delta + m^2}} \{w(\tau)^{n+1}\} d\tau. \end{aligned}$$

Posons $u = -i\partial_t w + (-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} w$ et $u_0 = -i\varepsilon w_1 + (-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon w_0$ si bien que l'équation précédente à point fixe devient

$$u(t) = e^{it\sqrt{-\Delta+m^2}} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-\tau)\sqrt{-\Delta+m^2}} \left((-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{u(\tau) + \overline{u(\tau)}}{2} \right) \right)^{n+1} d\tau$$

Puisque $H^s(X)$ est une algèbre, nous obtenons l'estimation a priori

$$\|u(t)\|_{H^s(X)} \leq \|u_0\|_{H^s(X)} + C(X, m, s, n) |t| \sup_{0 \leq |\tau| \leq |t|} \|u(\tau)\|_{H^s(X)}^{n+1}.$$

On conclut aisément par un argument de point fixe dans l'espace complet $\mathcal{C}^0 \left([-C'\varepsilon^{-n}, +C'\varepsilon^{-n}], \overline{B_{H^s(X)}(0, K'\varepsilon)} \right)$ où les constantes $K' > 0$ et $C' > 0$ dépendent notamment de C . Pour finir, on remarque que $\|u(t)\|_{H^s(X)}$ et $\|w(t)\|_{H^{s+1}(X)} + \|\dot{w}(t)\|_{H^s(X)}$ sont comparables. \square

On se propose à présent d'expliquer la stratégie de forme normale qui conduit à une amélioration du temps d'existence locale ε^{-n} . On va voir que ε^{-2n} est le temps maximal que l'on peut obtenir par une forme normale (sans itération) pour la non-linéarité w^{n+1} . En introduisant $\Lambda := \sqrt{-\Delta + m^2}$ et $u = (-i\partial_t + \Lambda)w$, on ramène l'équation de Klein-Gordon (45) à la suivante

$$(46) \quad i\partial_t u + \Lambda u = w^{n+1}, \quad \|u\|_{H^s(X)} \simeq \|\partial_t w\|_{H^s(X)} + \|w\|_{H^{s+1}}.$$

Puisque nous cherchons des solutions w à valeurs réelles, on peut exprimer w grâce à la fonction complexe u par la formule

$$(47) \quad w = \frac{1}{2} \Lambda^{-1} (u + \bar{u}).$$

Si bien que l'on considérera que u et w ont "même degré d'homogénéité". En outre, la norme de Sobolev $\|u\|_{H^s(X)}$ est équivalente à $\|\Lambda^s u\|_{L^2(X)}$. Un calcul donne

$$(48) \quad \frac{d}{dt} \|\Lambda^s u\|_{L^2(X)}^2 = -2\operatorname{Re} i \langle \Lambda^s \{w^{n+1}\}, \Lambda^s u \rangle.$$

Utilisant que $H^s(X)$ est une algèbre, l'égalité précédente implique l'inégalité

$$\left| \frac{d}{dt} \|\Lambda^s u\|_{L^2(X)}^2 \right| \leq C \|u\|_{H^s(X)}^{n+2}.$$

Revisitons l'argument d'existence locale pour retrouver le temps ε^{-n} . Supposons $\|\Lambda^s u(0)\|_{L^2(X)} = \varepsilon$ et considérons le plus grand temps $T > 0$ tel que $\sup_{t \in [0, T]} \|\Lambda^s u(t)\|_{L^2(X)} \leq 2\varepsilon$. On a nécessairement

$\lim_{t \rightarrow T^-} \|\Lambda^s u(t)\|_{L^2(X)} = 2\varepsilon$ (sinon T ne serait pas maximal). Mais sur tout l'intervalle temporel $[0, T]$ on a $\left| \frac{d}{dt} \|\Lambda^s u\|_{L^2(X)}^2 \right| \leq C'\varepsilon^{n+2}$. Par intégration, on a $(2\varepsilon)^2 - \varepsilon^2 \leq C'T\varepsilon^{n+2}$. C'est-à-dire $\varepsilon^{-n} \lesssim T$. Une démarche similaire est valide pour les temps négatifs.

L'idée de forme normale consiste à améliorer l'argument précédent en augmentant le degré de la non-linéarité. Imaginons que nous arrivions à construire un opérateur \mathbb{R} -multilinéaire borné

$$M : (H^s(X))^{n+2} \rightarrow \mathbb{C}$$

tel que $\frac{d}{dt} \left[\|\Lambda^s u\|_{L^2(X)}^2 - \operatorname{Re} iM(u, \dots, u) \right]$ ne contienne pas de terme d'ordre $n+2$. Par dérivation, il vient

$$\frac{d}{dt} M(u, \dots, u) = \sum_{\text{sym}} M(i\Lambda u, \dots, u) + \sum_{\text{sym}} M(-iw^{n+1}, u, \dots, u).$$

La première somme est homogène de degré $n+2$ en u tandis que la seconde est homogène de degré $(n+1) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n+1} = 2n+2$ en u . Par comparaison avec (48), on serait dans une situation favorable si la

somme $\sum_{\text{sym}} \operatorname{Re} iM(i\Lambda u, \dots, u)$ était égale à $-2\operatorname{Re} i \langle \Lambda^s w^{n+1}, \Lambda^s u \rangle$. Par suite, si l'opérateur multilinéaire borné M existe, alors on aurait une estimation a priori de la forme

$$\left| \frac{d}{dt} \left[\|\Lambda^s u\|_{L^2(X)}^2 - \operatorname{Re} iM(u, \dots, u) \right] \right| \lesssim \|u\|_{H^s(X)}^{2n+2}.$$

On peut alors employer la même argumentation que celle utilisée après (48) pour cette fois-ci trouver le temps ε^{-2n} . En utilisant le fait que $\|\Lambda^s u\|_{L^2(X)}^2 - \operatorname{Re} iM(u, \dots, u) \simeq \|\Lambda^s u\|_{L^2(X)}^2$ pourvu que $\|u\|_{H^s(X)} \ll 1$ et en intégrant l'inégalité ci-dessus on obtient que, sous la condition $\|u(0)\|_{H^s(X)} = \varepsilon \ll 1$, on a l'inégalité $\|u(t)\|_{H^s(X)} \leq K\varepsilon$ sur un intervalle temporel $[-C\varepsilon^{-2n}, +C\varepsilon^{-2n}]$.

3.3. Petits diviseurs et équation homologique

Expliquons maintenant comment construire l'opérateur M de sorte que

$$(49) \quad \sum_{\text{sym}} \operatorname{Re} iM(i\Lambda u, u, \dots, u) = -2\operatorname{Re} i\langle \Lambda^s w^{n+1}, \Lambda^s u \rangle.$$

En décomposant $w = \frac{1}{2}\Lambda^{-1}(u + \bar{u})$ (voir (47)) avec la formule du binôme de Newton, il suffit par linéarité de comprendre le cas modèle suivant pour tout $p \in \{0, 1, \dots, n+1\}$

$$(50) \quad \begin{aligned} \sum_{\text{sym}} \operatorname{Re} iM(i\Lambda u, u, \dots, u) &= \operatorname{Re} i\langle \Lambda^s (\Lambda^{-1}u)^p (\Lambda^{-1}\bar{u})^{n+1-p}, \Lambda^s u \rangle \\ &= \operatorname{Re} i\langle (\Lambda^{-1}u)^p (\Lambda^{-1}\bar{u})^{n+1-p}, \Lambda^{2s}u \rangle, \end{aligned}$$

Le moyen le plus naturel de définir M est de décomposer spectralement u selon la suite des modes propres

$$u = \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{u}(k) \phi_k,$$

où l'expression $\hat{u}(k) := \int_X u(x) \phi_k(x) dx$ est inspirée de celle des coefficients de Fourier. Rappelons au passage que les nombres $\hat{u}(k)$ appartiennent à \mathbb{C} . A priori, on cherche M en tant qu'application \mathbb{R} -linéaire, mais si l'on veut conserver l'homogénéité par rapport aux conjugaisons, il est raisonnable de rajouter que M est \mathbb{C} -linéaire par rapport à ses p premières variables et antilinéaire par rapport à ses $n+2-p$ dernières variables. Ainsi, on exploite la formule $\Lambda = \sqrt{-\Delta + m^2}$ en vue d'obtenir

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{sym}} \operatorname{Re} iM(i\Lambda u, u, \dots, u) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_{n+1}} \operatorname{Re} \Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}}) \hat{u}(k_1) \dots \hat{u}(k_p) \overline{\hat{u}(k_{p+1}) \dots \hat{u}(k_{n+2})} M(\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_{n+2}}), \end{aligned}$$

où la fonction Ψ_p^m est le "petit diviseur" défini par

$$\Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}}) = -\sum_{\ell=1}^p \sqrt{\lambda_{k_\ell}^2 + m^2} + \sum_{\ell=p+1}^{n+2} \sqrt{\lambda_{k_\ell}^2 + m^2}.$$

Quant au second membre de (50), il devient

$$(51) \quad \sum_{k_1, \dots, k_{n+1}} \operatorname{Re} i \frac{(\lambda_{k_{n+2}}^2 + m^2)^s \hat{u}(k_1) \dots \hat{u}(k_p) \overline{\hat{u}(k_{p+1}) \dots \hat{u}(k_{n+2})}}{\sqrt{\lambda_{k_1}^2 + m^2} \dots \sqrt{\lambda_{k_{n+1}}^2 + m^2}} \int_X \phi_{k_1}(x) \dots \phi_{k_{n+2}}(x) dx.$$

La construction de l'opérateur multilinéaire M est manifestement équivalente à celle de tous les nombres $M(\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_{n+2}})$ et les calculs formels précédents ne fournissent qu'une seule solution raisonnable de la forme

$$(52) \quad \frac{(\lambda_{k_{n+2}}^2 + m^2)^s}{\sqrt{\lambda_{k_1}^2 + m^2} \dots \sqrt{\lambda_{k_{n+1}}^2 + m^2}} \times \frac{1}{-i\Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}})} \int_X \phi_{k_1}(x) \dots \phi_{k_{n+2}}(x) dx.$$

Seuls les deux derniers facteurs sont pertinents à examiner. Cette étape porte un nom dans diverses branches de la théorie des systèmes dynamiques : la résolution de l'équation homologique.

Le cas le plus simple à régler est celui des $(n+2)$ -uplets *résonants* : $n+2$ est pair, $p = \frac{n+2}{2}$ et $\{k_1, \dots, k_p\} = \{k_{p+1}, \dots, k_{n+2}\}$. Dans ce cas, le terme $\Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}})$ est trivialement nul et il faut trouver une autre définition de $M(\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_{n+2}})$. Mais par chance, on a aussi

$$\operatorname{Re} i \left(\hat{u}(k_1) \dots \hat{u}(k_p) \overline{\hat{u}(k_{p+1}) \dots \hat{u}(k_{n+2})} \right) = 0.$$

Cela prouve que dans le cas résonant, n'importe quelle valeur de $M(\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_{n+2}})$ est convenable et il est d'usage de poser $M(\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_{n+2}}) = 0$ (ce n'est pas seulement une convention, on donnera une raison à la fin de cette partie).

Les autres $(n+2)$ -uplets sont qualifiés de *non résonants* et la formule (52) est la seule raisonnable pourvu que l'on puisse choisir des masses $m > 0$ telles que $\Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}}) \neq 0$. Cette précaution de non nullité n'a a priori rien de trivial. Dans le cas $n = 2$, on a

$$\Psi_2^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_4}) = -\sqrt{\lambda_{k_1}^2 + m^2} - \sqrt{\lambda_{k_2}^2 + m^2} + \sqrt{\lambda_{k_3}^2 + m^2} + \sqrt{\lambda_{k_4}^2 + m^2}.$$

Par exemple, dans le cas du tore unidimensionnel \mathbb{T} , les valeurs propres de l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ sont les entiers naturels et l'on a pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

$$\Psi_2^m(k, k, \ell, 0) = -2\sqrt{k^2 + m^2} + m + \sqrt{\ell^2 + m^2}.$$

Sous la condition $\sqrt{2}k < \ell < 2k$, on a $\Psi_2^0(k, k, \ell) < 0$ et $\Psi_2^m(k, k, \ell) > 0$ au voisinage de $m = +\infty$. Ainsi, le petit diviseur Ψ_2^m peut s'annuler en régime non résonant pour certaines masses $m > 0$.

L'approche classique pour contourner cet obstacle est de justifier que, au moins en un sens générique sur m , pour tout $(n+2)$ -uplet non résonant (k_1, \dots, k_{n+2}) la condition $\Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}}) \neq 0$ est satisfaite. En fait ce point est assez facile, puisque la non-résonance signifie que la fonction $m \mapsto \Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}})$ n'est pas identiquement nulle. On vérifie alors qu'elle n'admet qu'un nombre fini de racines $m \in \mathbb{R}$ et par suite il suffit d'éviter une quantité dénombrable de masses m pour assurer que les nombres $\Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}})$ soient différents de 0 pour tous les $(n+2)$ -uplets non résonants. En tout état de cause, cela permet de définir de façon unique l'opérateur multilinéaire M .

Rappelons maintenant que l'opérateur multilinéaire M doit être construit en vue d'être borné sur $(H^s(X))^{n+2}$ (voir la fin de la partie 3.2). Cela équivaut d'une manière ou d'une autre à contrôler les nombres $M(\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_{n+2}})$ définis en (52). On comprend mieux le choix $M(\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_{n+2}}) = 0$ en régime résonant. Sans entrer dans les détails techniques, la formule (52) montre alors que cette approche par forme normale conduit inéluctablement aux deux points suivants :

- i) il faut obtenir des estimations multilinéaires de modes propres

$$\int_X \phi_{k_1}(x) \dots \phi_{k_{n+2}}(x) dx.$$

Nous reviendrons sur ces estimations dans la partie suivante.

- ii) il faut non seulement choisir des masses m telles que $\Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}}) \neq 0$ pour tous les $(n+2)$ -uplets non résonants, mais aussi obtenir des minoration adéquate de $|\Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}})|$. Le point de vue classique est de montrer que, sous certaines conditions asymptotiques, l'on obtient des minoration raisonnables pour presque tout $m > 0$ (au sens de Lebesgue). Sans expliquer rigoureusement ce que sont ces conditions asymptotiques, on peut examiner la formule simple pour $n = 2$:

$$\Psi_2^m(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_\ell, \lambda_\ell) = 2 \left(\sqrt{\lambda_\ell^2 + m^2} - \sqrt{\lambda_k^2 + m^2} \right)$$

il paraît alors inéluctable que les conditions asymptotiques portent sur la **séparation des valeurs propres**. Nous expliquerons cependant une autre approche, plus algébrique, dans la partie 3.9.

En ce qui concerne les minoration de $|\Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}})|$, dans le meilleur des cas, si les valeurs propres sont bien séparées (par exemple si $X = \mathbb{S}^d$), alors on a une minoration de la forme suivante pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$:

$$|\Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}})| \gtrsim \frac{1}{(1 + \mu(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}}))^N},$$

où $\mu(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}})$ désigne le troisième plus grand entier. Ces estimations sont légitimes pour obtenir une existence presque globale, comme dans [BDGS07], car elles permettent d'itérer le processus de forme normale expliqué ci-dessus, au moins dans un cadre hamiltonien.

Par contre dans le pire des cas, on a une estimation en

$$(53) \quad |\Psi_p^m(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}})| \gtrsim \frac{1}{(1 + \max(\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{n+2}}))^N}.$$

Il s'agit-là d'une estimation très mauvaise, la construction de M en vue de pousser la non-linéarité de w^{n+1} à l'ordre $2n+2$ échoue en ce sens que nous ne savons pas montrer la bornitude de M sur $(H^s(X))^{n+2}$. Delort a proposé une nouvelle approche de petits diviseurs qui permet de traiter ce cas. Pour résumer, on abandonne l'idée de chercher M vérifiant l'équation (50). Mais on garde l'espoir de construire un

opérateur multilinéaire M où le second membre de (50) est amputé d'une bonne partie de $(n+2)$ -uplets dans sa décomposition spectrale (51). Autrement dit, cette approche permet d'éliminer seulement une partie de la non-linéarité w^{n+1} et c'est pour cela que nous l'avons appelée *forme normale partielle*. Il se trouve alors qu'on peut augmenter le temps d'existence locale ε^{-n} en ε^{-An} pour un nombre $A \in]1, 2]$. De façon concrète, Delort montre que pour le tore \mathbb{T}^d , avec $d \geq 2$, le temps de bornitude ε^{-n} peut être amélioré par $\varepsilon^{-(1+\frac{2}{d})n}$ (voir [Del09]). Plus tard, Fang et Zhang ont amélioré ce résultat en $\varepsilon^{-\frac{3}{2}n}$ (voir [FZ10]). Ce temps n'est pas seulement meilleur pour $d \geq 4$, il est en fait bien meilleur pour $d \gg 1$ puisqu'il est indépendant de la dimension. En fait, il faut juste se rappeler que ces temps sont compris entre ε^{-n} et ε^{-2n} car la méthode de forme normale n'est pas réalisée complètement.

3.4. Remarque sur les estimations multilinéaires de fonctions propres

L'examen attentif du papier [FZ10] de Fang et Zhang montre que ce travail très technique peut se décomposer en deux idées bien distinctes :

- i) amélioration des minorations des petits diviseurs (53);
- ii) exploitation de l'analyse harmonique de \mathbb{T}^d , c'est-à-dire le fait que les modes propres de \mathbb{T}^d sont naturellement paramétrés par le groupe \mathbb{Z}^d . La subtilité du travail de Fang et Zhang est qu'on trouve une alternance judicieuse entre la paramétrisation précédente et le regroupement des modes propres par paquets.

Nous nous sommes rendus compte que le point précédent s'avère en fait inutile si l'on s'intéresse seulement à passer d'un temps ε^{-n} à ε^{-An} pour un exposant $A > 1$ (qui n'est certes pas optimal mais strictement supérieur à 1). Le point ii) sert seulement à obtenir une meilleure constante A , mais comme nous sommes dans un cadre de forme normale partielle, cette méthode donne nécessairement une constante $A \leq 2$. Cela transparait plus ou moins clairement dans la thèse de Zhang [Zha10a, Zha10b] en ce qui concerne l'équation de Klein-Gordon associée à l'oscillateur harmonique

$$(54) \quad (\partial_t^2 - \partial_x^2 + x^2 + m^2)w = w^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les modes propres de l'oscillateur harmonique, qui s'expriment à l'aide des polynômes de Hermite, n'admettent pas un paramétrage naturel issu d'un groupe. Le meilleur moyen de s'en rendre compte est de constater que le produit de deux modes propres de l'oscillateur harmonique appartient à $\mathbb{R}[x]e^{-x^2}$ et donc n'est certainement pas un mode propre! Pour pallier ce fait, Zhang a utilisé les estimées multilinéaires suivantes de modes propres.

Proposition 3.4.1. — [9, Proposition 3.6] *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, soit $\Pi_k : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ le projecteur orthogonal sur $\ker(-\Delta + |x|^2 - \lambda_k^2)$ avec $\lambda_k = \sqrt{2k + d}$. Pour tout entier $n \geq 2$, il existe $\nu = \nu(d, n) > 0$ tel que pour tout $(k_1, \dots, k_{n+2}) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{n+2}$ vérifiant $k_{n+2} \leq \dots \leq k_1$, tout $(u_1, \dots, u_{n+2}) \in L^2(\mathbb{R}^d)^{n+2}$ et tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$(55) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Pi_{k_1}(u_1) \dots \Pi_{k_{n+2}}(u_{n+2}) dx \right| \leq C \lambda_{k_3}^\nu \left(\frac{\lambda_{k_2} \lambda_{k_3}}{\lambda_{k_2} \lambda_{k_3} + \lambda_{k_1}^2 - \lambda_{k_2}^2} \right)^N \prod_{j=1}^{n+2} \|u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

où C dépend de (d, n, N) .

On notera qu'il s'agit-là d'une famille d'inégalités paramétrées par N qui expliquent en un certain sens la décroissance rapide des intégrales multilinéaires pourvu que l'on a $\lambda_{k_1} \gg \lambda_{k_2}$ (en effet, on a $\frac{\lambda_{k_2} \lambda_{k_3}}{\lambda_{k_2} \lambda_{k_3} + \lambda_{k_1}^2 - \lambda_{k_2}^2} < 1$).

Cela a permis à Zhang d'obtenir dans sa thèse un temps de l'ordre de $\varepsilon^{-\frac{25}{18}n}$ en dimension $d = 1$ et de l'ordre $\varepsilon^{-\frac{4}{3}n}$ en dimension $d \geq 2$ (voir l'article [Zha10b]). L'impact de la dimension vient du fait que l'on peut légèrement renforcer, en dimension $d = 1$, les estimations (55) grâce à l'inégalité de Hölder et de bonnes estimations des fonctions propres de Hermite [KT05, Corollary 3.2].

Les estimations multilinéaires obtenues dans [9] ressemblent énormément à celles obtenues par Delort et Szeftel sur toute variété compacte sans bord.

Proposition 3.4.2. — [DS06, Proposition 1.2.1] *Soit X une variété riemannienne compacte sans bord. Considérons une suite d'intervalles $I_k := [\lambda_k - \alpha_k, \lambda_k + \alpha_k]$ avec $\sup_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k < +\infty$ et $\lambda_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $\Pi_k : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ le projecteur spectral $\mathbf{1}_{I_k}(\sqrt{-\Delta})$ sur le sous-espace des fonctions à spectre inclus dans I_k . Pour tout entier $n \geq 2$, il existe $\nu = \nu(n, \dim X) > 0$ tel que pour tout*

$(k_1, \dots, k_{n+2}) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{n+2}$ vérifiant $\lambda_{k_{n+2}} \leq \dots \leq \lambda_{k_2} \leq \lambda_{k_1}$, tout $(u_1, \dots, u_{n+2}) \in \mathcal{C}(X)^{n+2}$ et tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(56) \quad \left| \int_X \prod_{k_1}(u_1) \dots \prod_{k_{n+2}}(u_{n+2}) dx \right| \leq C \lambda_{k_3}^\nu \left(1 + \frac{\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}}{\lambda_{k_3}} \right)^{-N} \prod_{j=1}^{n+2} \|u_j\|_{L^2(X)},$$

où C dépend de (X, n, N)

Les preuves des propositions 3.4.1 et 3.4.2 sont différentes (bien qu'elles reposent sur des estimées de commutateurs). D'ailleurs, la preuve de la proposition 3.4.1 est inspirée de [Bam08, Lemma 7]. Il est donc ironique de constater que les inégalités (55) et (56) se ressemblent car elles sont jumelles (c'est la principale remarque contenue dans la note [3]) ! En effet, le choix de l'entier N est arbitraire dans ces inégalités et il suffit donc de justifier que pour tous entiers naturels $k_3 \leq k_2 \leq k_1$ on a

$$(57) \quad \left(\frac{\lambda_{k_3}}{\lambda_{k_3} + \lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}} \right)^2 \leq \frac{\lambda_{k_2} \lambda_{k_3}}{\lambda_{k_2} \lambda_{k_3} + \lambda_{k_1}^2 - \lambda_{k_2}^2} \leq \frac{\lambda_{k_3}}{\lambda_{k_3} + \lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}}.$$

Le membre droit de (57) est trivial en vertu de $\lambda_{k_1}^2 \geq \lambda_{k_1} \lambda_{k_2}$. Quant au membre gauche de (57), il est conséquence du calcul

$$\lambda_{k_3} \lambda_{k_2} (\lambda_{k_3} + \lambda_{k_1} - \lambda_{k_2})^2 - \lambda_{k_3}^2 (\lambda_{k_2} \lambda_{k_3} + \lambda_{k_1}^2 - \lambda_{k_2}^2) = \lambda_{k_3} (\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2})^2 (\lambda_{k_2} - \lambda_{k_3}) \geq 0.$$

Pour conclure cette partie, mentionnons que les estimées multilinéaires de modes propres que nous présentons se substituent à l'égalité $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-i\ell x} dx = 0$, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $k \neq \ell$, valide sur le tore unidimensionnel.

3.5. Valeurs propres entières : masses non-résonantes génériques

Avant nos travaux, il nous semble que les estimées (56) de Delort et Szeftel n'ont été utilisées que sur les variétés de Zoll :

- prolongement du temps de bornitude pour l'équation de Klein-Gordon quasi-linéaire sur une variété de Zoll par Delort et Szeftel [DS06]
- existence presque globale pour l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire sur une variété de Zoll par Bambusi-Delort-Grébert-Szeftel [BDGS07]

Il paraît donc naturel d'utiliser les estimées multilinéaires de Delort et Szeftel avec la nouvelle approche de Delort, Fang et Zhang sur des variétés compactes dont l'analyse spectrale n'est pas explicite (ou explicite mais assez lourde à écrire). Ainsi, en invoquant la partie précédente, nous avons pu transféré la méthode que Zhang [Zha10b] a employée sur l'équation

$$(\partial_t^2 - \Delta + |x|^2 + m^2)w = w^{n+1} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$

On a ainsi le résultat suivant.

Théorème 3.5.1. — [3] *Soit X une variété riemannienne compacte sans bord qui vérifie l'hypothèse spectrale*

$$(58) \quad \exists \omega > 0, \quad Sp(\Delta) \subset \omega \mathbb{Z}.$$

Alors pour presque tout $m > 0$, pour tout $A < \frac{4}{3}$ et pour tout $s \gg 1$, les petites solutions de l'équation de Klein-Gordon (45) avec conditions initiales d'ordre $\varepsilon > 0$ dans $H^{s+1}(X) \times H^s(X)$ sont uniformément bornées par $K\varepsilon$ sur un temps de l'ordre de ε^{-An} .

Par rapport aux travaux de Delort, Fang et Zhang sur les tores [Del09, FZ10], on étend la classe des variétés compactes en payant le prix d'avoir un temps de bornitude moins élevé $\varepsilon^{-\frac{4}{3}n} < \varepsilon^{-\frac{3}{2}n}$.

L'hypothèse spectrale (58), quoique très contraignante, est en fait satisfaite pour beaucoup de variétés riemanniennes compactes que l'on rencontre en pratique et qui s'appellent les espaces homogènes : ce sont les variétés qui peuvent s'écrire comme un quotient d'un groupe de Lie compact par un sous-groupe fermé avec une structure riemannienne naturelle (voir [BP11]).

On compte parmi ces exemples :

- les produits finis de sphères de même rayon,
- les espaces projectifs (voir le livre [Bes78]),
- les groupes de Lie compacts ($O_n(\mathbb{R})$ ou $U_n(\mathbb{C})$ par exemple, voir [BP11]),
- tout produit fini des variétés précédentes (avec de bons coefficients d'homogénéité dans les facteurs).

Nous constatons d'ailleurs que tous ces espaces homogènes ont une analyse harmonique assez bien comprise. À ce propos, on vérifie que le produit de deux modes propres est une combinaison linéaire finie de modes propres (voir [BP11, Theorem 2.10]), cela constitue une version forte des inégalités (56). Prenons par exemple la variété $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^5$ à laquelle le théorème 3.6.1 s'applique. En fait, il est parfaitement envisageable d'augmenter le temps de bornitude $\varepsilon^{-\frac{4}{3}n}$ par un temps plus grand en s'inspirant du travail de Fang et Zhang cité plus haut. Néanmoins nous voyons deux bémols :

- i) le premier est de nature technique et donc probablement surmontable, il s'agit de bien écrire l'analyse spectrale de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^5$ et d'utiliser à bon escient le regroupement des valeurs propres par paquets de modes propres.
- ii) le second est de nature structurelle : à moins d'inventer une nouvelle idée d'itération de forme normale, nous ne voyons pas comment dépasser strictement le seuil ε^{-2n} .

3.6. Séparation de valeurs propres pour un potentiel superquadratique

Présentons à présent un exemple pour lequel la construction de l'opérateur multilinéaire M est possible, et donc pour lequel on peut atteindre le seuil ε^{-2n} (et il est probable qu'on puisse faire bien mieux, voir ci-après). On souhaite de plus un exemple différent des variétés de Zoll (en effet, on reviendra sur ce point dans la partie 3.10). D'après la philosophie expliquée avant le schéma de la page 29, il s'agit de choisir un cas où le spectre est suffisamment bien séparé sans pour autant atteindre la séparation des sphères (et des variétés de Zoll). En pratique, on souhaite que la suite des valeurs propres $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $\sqrt{-\Delta}$, sans compter les multiplicités, vérifie

$$(59) \quad \exists \beta \in]0, 1[\quad \forall j \geq 1 \quad \mu_{j+1} - \mu_j \gtrsim \frac{1}{\mu_j^\beta}.$$

L'examen asymptotique de $\mu_{j+1}^{\beta+1} - \mu_j^{\beta+1}$ montre aisément que l'on a $\mu_j \gtrsim j^{\frac{1}{\beta+1}}$. Ayant justifié après la proposition 2.1.3 que l'asymptotique $\mu_j \simeq j^{1/d} = o(j^{\frac{1}{\beta+1}})$ se produit si les valeurs propres sont simples, on comprend que la condition (59) forcerait la présence de grandes valeurs propres multiples. Malheureusement, hormis des cas où le flot géodésique est périodique (déjà traité dans [BDGS07]), nous ne voyons pas d'exemple naturel. Aussi, nous avons étudié l'équation de Klein-Gordon sur \mathbb{R} avec un potentiel confinant dans le même esprit que l'équation (54) :

$$(60) \quad w_{tt} - w_{xx} + x^{2\alpha} w + m^2 w = w^{n+1}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \alpha \in \mathbb{N}^*$$

Pour $\alpha \geq 2$, l'analyse spectrale de $-\partial_x^2 + x^{2\alpha}$, sans faire intervenir une famille classique de polynômes orthogonaux (à notre connaissance), est bien comprise grâce aux travaux de Helffer-Robert (voir la partie 2.3.1 et en particulier (23)). En notant $(\lambda_k^2)_{k \geq 1}$ la suite croissante des valeurs propres de $-\partial_x^2 + x^{2\alpha}$, on a les asymptotiques suivantes pour k, ℓ entiers naturels suffisamment grands :

- $\lambda_k \sim k^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$;
- $\lambda_{k+1} - \lambda_k \simeq \frac{1}{\lambda_k^{1/\alpha}}$;
- $|\lambda_k - \lambda_\ell| \simeq |k^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} - \ell^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}|$.

Il est important de remarquer que les valeurs propres λ_k sont d'autant mieux séparées que α est grand. On rappelle aussi la description des espaces de Sobolev associés à $-\partial_x^2 + x^{2\alpha}$ (voir [YZ04]) :

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_\alpha^s := \text{Dom}(-\partial_x^2 + x^{2\alpha})^{\frac{s}{2}} = \{f \in L^2(\mathbb{R}), (f^{(s)}, x^{\alpha s} f) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})\}.$$

En s'inspirant de [Zha10b], nous avons pu démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.6.1. — [4] *Pour tout $\alpha \geq 4$, pour presque tout $m > 0$, pour tout $s \gg 1$, les petites solutions de l'équation (60) avec conditions initiales d'ordre ε dans $\mathcal{H}_\alpha^{s+1} \times \mathcal{H}_\alpha^s$ sont uniformément bornées par $K\varepsilon$ sur un intervalle $[-C\varepsilon^{-2n}, C\varepsilon^{-2n}]$.*

En d'autres termes, la très bonne séparation des valeurs propres permet d'atteindre le seuil ε^{-2n} . Signalons aussi que toutes les estimations connues sont cohérentes avec l'idée heuristique que l'opérateur $-\partial_x^2 + x^{2\alpha}$ se comporte asymptotiquement comme l'opérateur $-\Delta$ sur $] -1, 1[$ avec conditions de Dirichlet lorsque α tend vers $+\infty$. Or ce cas limite a été traité par Bambusi et Grébert dans [BG06] et l'existence presque globale est obtenue (cela est bien cohérent avec la séparation uniforme du spectre). Cette raison heuristique confirme l'intuition que le temps ε^{-2n} est accessible pour l'équation (60). En fait, on pourrait même se poser la question de remplacer ε^{-2n} par $\varepsilon^{-A(\alpha)n}$ avec $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = +\infty$.

3.7. Vers l'équation des poutres sur un tore irrationnel

Comme convenu dans le chapitre 2, on note $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des valeurs propres de $\sqrt{-\Delta}$ sans compter les multiplicités. Les tores \mathbb{T}^d , munis de leurs métriques usuelles, et plus généralement les variétés compactes du théorème 3.5.1 vérifient la propriété de séparation

$$(61) \quad \forall j \gg 1 \quad \mu_{j+1} - \mu_j = \frac{\mu_{j+1}^2 - \mu_j^2}{\mu_{j+1} + \mu_j} \gtrsim \frac{1}{\mu_{j+1}}.$$

D'après la proposition 2.1.3, on a même $\mu_{j+1} = \mu_j + O(1)$, si bien que la borne inférieure précédente devient $\frac{1}{\mu_j}$.

Remarque 3.7.1. — Pour les tores \mathbb{T}^d , ces minoration sont optimales. En effet, μ_j^2 est alors le j -ième nombre entier s'écrivant comme somme de d carrés. Pour $d \geq 4$, le théorème des quatre carrés de Lagrange assure que tout entier naturel est somme de quatre carrés, a fortiori $\mu_j^2 = j$, si bien que $\mu_{j+1} - \mu_j \sim \frac{1}{2\mu_j}$. Pour $d = 2$ et $d = 3$, l'analyse asymptotique de μ_j est plus délicate mais, pour notre propos, il nous suffit de remarquer que dès lors que μ_j^2 vaut k^2 (pour $k \in \mathbb{N}^*$), alors on a forcément $\mu_{j+1}^2 = k^2 + 1^2$. Si bien que l'on a $\mu_{j+1}^2 - \mu_j^2 = 1$ pour une infinité d'entiers naturels j et donc (61) ne peut pas être amélioré.

En vue de compléter le schéma de la page 29, nous avons voulu étudier un modèle de variété compacte dont le spectre est très mal séparé. Un exemple naturel est celui des tores irrationnels. Fixons $r > 0$ un rayon et examinons le spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathbb{S}^1 \times r\mathbb{S}^1$:

$$\{p^2 + r^{-2}q^2, \quad (p, q) \in \mathbb{Z}^2\} = \{\mu_j^2, \quad j \geq 0\}.$$

Etudier la différence de deux valeurs propres μ_j^2 et μ_ℓ^2 est clairement équivalent à étudier l'approximation du nombre r^{-2} par des nombres rationnels (cela s'appelle l'approximation diophantienne). Sans hypothèse d'approximation diophantienne, on ne peut pas séparer les valeurs propres, deux à deux, comme le montre la preuve du résultat élémentaire suivant.

Proposition 3.7.2. — Il existe des nombres $r > 0$ tels que la suite strictement croissante $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ des valeurs propres (sans compter les multiplicités) de l'opérateur de Laplace-Beltrami $\sqrt{-\Delta}$ du tore $\mathbb{T} \times r\mathbb{T}$ vérifie

$$\forall \beta \geq 0 \quad \liminf_{j \rightarrow +\infty} \mu_j^\beta (\mu_{j+1} - \mu_j) = 0.$$

Autrement dit, une minoration de la forme $\mu_{j+1} - \mu_j \gtrsim \mu_j^{-\beta}$ est impossible.

Démonstration. — Considérons un nombre r tel que r^{-1} soit un nombre de Liouville (en particulier est r est transcendant et donc irrationnel). Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on a, pour un certain $\beta \geq 0$, l'estimation inférieure $\mu_{j+1} - \mu_j \gtrsim \mu_j^{-\beta}$. Le spectre de $-\Delta$ sur $\mathbb{T} \times r\mathbb{T}$ est l'ensemble

$$\{(p^2 + r^{-2}q^2, \quad (p, q) \in \mathbb{N}^2\} = \{\mu_j^2, \quad j \in \mathbb{N}\}.$$

Fixons un couple $(P, Q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Supposons par exemple que l'on a $P > r^{-1}Q$. Fixons deux entiers $k > j$ tels que $\mu_k = P$ et $\mu_j = r^{-1}Q$. Ainsi,

$$P - r^{-1}Q = \mu_k - \mu_j \geq \mu_{j+1} - \mu_j \gtrsim \mu_j^{-\beta} \gtrsim Q^{-\beta}.$$

Si l'on a $r^{-1}Q > P$, un raisonnement similaire fourni $r^{-1}Q - P \gtrsim P^{-\beta} \gtrsim Q^{-\beta}$. Mais l'estimation $|P - r^{-1}Q| \gtrsim Q^{-\beta}$ est impossible si r^{-1} est un nombre de Liouville pour certains choix de couples (P, Q) . \square

Ainsi, il paraît naturel d'imposer des conditions d'approximations diophantiennes sur r . Rappelons qu'un nombre irrationnel R est diophantien s'il vérifie la propriété suivante :

$$(62) \quad \forall \mu > 2 \quad \forall \frac{P}{Q} \in \mathbb{Q} \quad \left| R - \frac{P}{Q} \right| \geq \frac{C(\mu, R)}{|Q|^\mu}.$$

En réalité, il existe beaucoup de nombres diophantiens :

- presque tout nombre $R \in \mathbb{R}$ est diophantien (il s'agit d'un exercice classique : on montre que l'ensemble des nombres non diophantiens appartenant à un compact a une mesure de Lebesgue arbitrairement petite),

- sans doute plus important : tout nombre irrationnel algébrique est diophantien, par exemple $\sqrt[3]{2}$ ou $\sqrt[5]{2}$. L'énoncé précédent, connu sous le nom de théorème de Roth, est certes simple mais admet une démonstration difficile ([Rot55] ou [Bug04, Theorem 2.1]).

Sous des hypothèses diophantiennes, on montre sans difficulté une propriété de séparation (voir [5, Lemma 2.1]).

Proposition 3.7.3. — *Supposons r^{-2} irrationnel, alors on a le comportement asymptotique $\mu_j \simeq \sqrt{j}$. Si de plus r^{-2} est diophantien, alors pour tout $\beta > 3$ et $j \gg 1$ on a $\mu_{j+1} - \mu_j \gtrsim \mu_j^{-\beta}$.*

Il est donc tentant d'aborder l'équation de Klein-Gordon sur le tore irrationnel $\mathbb{S}^1 \times r\mathbb{S}^1$ sous l'hypothèse que r^{-2} soit diophantien. La séparation des valeurs propres décrite par la proposition précédente permet bien d'obtenir des estimations de petits diviseurs sur les combinaisons \mathbb{Z} -linéaires des valeurs propres de $\sqrt{-\Delta + m^2}$. Mais dans un premier temps, elle nous a paru trop faible pour implémenter la méthode de forme normale partielle. Inspiré par des travaux de Pausader [Pau07, Pau10] et par des résultats de Geng et al [NG07, GY06a, GY06b] dans un contexte KAM, nous avons étudié dans [5] l'équation semi-linéaire des poutres ("beam equation") avec un potentiel constant m^2 :

$$(63) \quad w_{tt} + \Delta^2 w + m^2 w = w^{n+1}, \quad x \in \mathbb{S}^1 \times r\mathbb{S}^1$$

Cette équation ressemble beaucoup à l'équation de Klein-Gordon mais possède structurellement un léger effet régularisant dû au fait que l'opérateur Δ^2 est d'ordre 4. Concrètement, l'opérateur $(I + \Delta^2)^{-1}$ est plus régularisant que $(I - \Delta)^{-1}$. Cet effet régularisant compense la très mauvaise séparation du spectre du tore irrationnel et nous permet de prouver le théorème suivant.

Théorème 3.7.4. — [5] *Supposons que r^{-2} soit diophantien, pour presque tout $m > 0$, pour tout $A < \frac{5}{4}$, pour tout $s \gg 1$, les petites solutions de l'équation des poutres (63) avec conditions initiales d'ordre ε dans $H^{s+2}(\mathbb{S}^1 \times r\mathbb{S}^1) \times H^s(\mathbb{S}^1 \times r\mathbb{S}^1)$ sont uniformément bornées par $K\varepsilon$ sur un intervalle $[-C\varepsilon^{-An}, C\varepsilon^{-An}]$.*

Par exemple, le théorème précédent s'applique à la variété $\mathbb{S}^1 \times \sqrt[3]{2}\mathbb{S}^1$. Signalons que Bambusi et Sire ont étudié dans [BS13] des équations de type Schrödinger avec des puissances de l'opérateur de Laplace-Beltrami comme $|\Delta|^\alpha$. D'un point de vue purement mathématique, la preuve du théorème 3.7.4 est valide pour l'équation

$$w_{tt} + |\Delta|^\alpha w + m^2 w = w^{n+1}, \quad x \in \mathbb{S}^1 \times r\mathbb{S}^1, \quad \alpha > 1.$$

Le cas $\alpha = 1$, c'est-à-dire l'équation de Klein-Gordon qui nous intéresse, semblait donc être un cas limite de la technique de preuve du théorème 3.7.4. En fait, nous allons voir dans la partie suivante que l'on peut améliorer ces résultats sans faire d'hypothèse diophantienne sur r .

3.8. Forme norme partielle sans hypothèse spectrale ou géométrique

Il reste à comprendre ce qu'il en est de notre problématique sur une variété riemannienne compacte dont on ne peut pas séparer les valeurs propres deux à deux (par exemples les tores liouvilien de la proposition 3.7.2). En fait, Delort a prédit dans [Del09, Page 165] que la méthode de forme normale partielle devrait être réalisable sur toute variété riemannienne compacte sans bord, du moins si n est impair. Expliquons d'où vient la difficulté de la parité de n . Dans la partie 3.3, nous avons expliqué que la méthode de forme normale pour la non-linéarité w^{n+1} conduit inéluctablement à minorer les petits diviseurs de la forme

$$(64) \quad \left| \sum_{\ell=1}^p \sqrt{\lambda_{k_\ell}^2 + m^2} - \sum_{\ell=p+1}^{n+2} \sqrt{\lambda_{k_\ell}^2 + m^2} \right|.$$

Dans le cas où n est pair, l'entier p peut valoir $\frac{n+2}{2}$ et l'expression précédente pourrait, par compensation paire par paire, devenir dangereusement petite si par exemple $|\lambda_{k_{p+\ell}} - \lambda_{k_\ell}|$ est très petit pour tout $\ell \in \{1, \dots, p\}$. La motivation de la prédiction de Delort repose alors sur la remarque suivante du cas n impair : si les nombres λ_k satisfont certaines propriétés asymptotiques très générales (largement satisfaites grâce à la loi de Weyl), alors aucune propriété de séparation des valeurs propres n'est utile pour obtenir des minoration convenables de (64) (voir [DS04]).

En fait, il s'avère que loi de Weyl permet de séparer les valeurs propres par paquets comme le montre la proposition 2.1.4. Cela nous mène au résultat suivant valide indépendamment d'une condition de parité sur n .

Théorème 3.8.1. — [1] *Soit X une variété riemannienne compacte sans bord. Il existe un nombre implicite $A > 1$ tel que pour presque tout $m > 0$, pour tout $s \gg 1$, les petites solutions de l'équation de Klein-Gordon (45) avec conditions initiales d'ordre ε dans $H^{s+1}(X) \times H^s(X)$ sont uniformément bornées par $K\varepsilon$ sur un intervalle $[-C\varepsilon^{-An}, C\varepsilon^{-An}]$.*

Dans la preuve du théorème précédent, la constante A est implicite car provient d'estimations techniques (et implicites!) obtenues auparavant par Delort et Szeftel dans [DS04]. Nous pensons cependant qu'il est raisonnable de pouvoir obtenir une constante explicite si l'on combine l'exposant $d-1$ intervenant dans (10) avec la preuve de [FZ10].

Rappelons que dans le cas des variétés de Zoll, les valeurs propres peuvent être séparées par paquets (voir le théorème 2.1.5). Cette information spectrale joue un rôle crucial dans les améliorations des temps d'existence locale obtenues dans [BDGS07] et [DS06]. En d'autres termes, la séparation par paquets semble être la seule arme à notre disposition si l'on ne peut pas séparer les valeurs propres deux à deux. L'idée générale du théorème 3.8.1 est de mélanger l'approche de forme normale partielle avec le regroupement par paquets de valeurs propres $[\mu_{1+j_{k-1}}, \mu_{j_k}]$ donné par la proposition 2.1.4. En pratique, cela signifie qu'il faut légèrement changer l'énergie $\|\Lambda^s u\|_{L^2(X)}^2$, c'est-à-dire le carré de la norme de Sobolev d'indice s d'une fonction u , en

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (1+k)^{2s+1} \left\| \Pi_k \Lambda^{-1/2} u \right\|_{L^2(X)}^2,$$

où Π_k est le projecteur spectral $\mathbf{1}_{[\mu_{1+j_{k-1}}, \mu_{j_k}]}(\sqrt{-\Delta})$ pour $k \geq 1$ et Π_0 vaut simplement $\mathbf{1}_{[0, \mu_{j_0}]}(\sqrt{-\Delta})$. Enfin, la proposition 2.1.4 assure aussi que les longueurs des intervalles $[\mu_{1+j_{k-1}}, \mu_{j_k}]$ sont bornées par rapport à k . Ainsi, on peut gérer les projecteurs spectraux Π_k grâce aux estimations multilinéaires (56) (aussi obtenues par Delort et Szeftel dans [DS06]).

3.9. Valeurs propres entières : masses non-résonantes algébriques

Dans les énoncés des théorèmes précédents (hormis la proposition 3.2.1 d'existence locale), le paramètre de masse m est choisi de manière générique. Il s'agit d'un phénomène constant dans la littérature existante. Les estimations adéquates des petits diviseurs (64) sont obtenues pour presque tout $m > 0$ au sens de Lebesgue et n'étaient pas connues pour des exemples explicites de masses m . Les seules exceptions connues [DS04, Del98, Zha16b] se restreignent au cas d'une non-linéarité quadratique w^2 , c'est-à-dire $n = 1$. Ainsi, (64) prend la forme plus simple

$$\left| \pm \sqrt{\lambda_{k_1}^2 + m^2} \pm \sqrt{\lambda_{k_2}^2 + m^2} \pm \sqrt{\lambda_{k_3}^2 + m^2} \right|.$$

La question de construire des masses explicites, pour des non-linéarités au moins cubiques, apparaît notamment dans l'introduction du papier [Zha16b, page 203]. L'article [1] propose une stratégie algébrique qui répond à cette problématique.

De façon précise nous montrons le résultat suivant :

Théorème 3.9.1. — [1] *Supposons que les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ soient entières et considérons une masse $m > 0$ qui est algébrique de degré $\deg(m) > 2^{n+1}$. Il existe alors un nombre explicite $A > 1$ tel que, pour tout $s \gg 1$, les petites solutions de l'équation de Klein-Gordon (45) avec conditions initiales d'ordre ε dans $H^{s+1}(X) \times H^s(X)$ sont uniformément bornées par $K\varepsilon$ sur un intervalle $[-C\varepsilon^{-An}, C\varepsilon^{-An}]$.*

L'énoncé précédent est applicable aux tores $X = \mathbb{T}^d$ et plus généralement aux variétés évoquées dans la partie 3.5 (on pourra d'ailleurs comparer ce résultat au théorème 3.5.1). Comme expliqué ci-dessus, la preuve du théorème précédent doit reposer sur une minoration des petits diviseurs (64) lorsque les valeurs propres λ_k sont toutes des racines carrées d'entiers. Cela est formalisé, de manière rigoureuse, par la proposition suivante :

Proposition 3.9.2. — [1, Proposition 9] *Supposons que $m > 0$ soit algébrique de degré $\deg(m) > 2^{n+1}$. Alors il existe des constantes $N > 0$ et $C > 0$ telles que pour tout entier $p \in \{0, 1, \dots, n+2\}$ et pour tout $(k_1, \dots, k_{n+2}) \in \mathbb{N}^{n+2}$, on a l'alternative suivante :*

- i) *ou bien n est pair, $p = \frac{n+2}{2}$ et les deux p -uplets (k_1, \dots, k_p) et $(k_{p+1}, \dots, k_{n+2})$ se déduisent l'un de l'autre par permutation. On dit que l'on est en régime **résonant**.*
- ii) *ou bien nous avons*

$$\left| \sum_{j=1}^p \sqrt{m^2 + k_j} - \sum_{j=p+1}^{n+2} \sqrt{m^2 + k_j} \right| \geq \frac{C}{(1 + \max(k_1, \dots, k_{n+2}))^N},$$

*on dit que l'on est en régime **non résonant**.*

L'argument clé repose sur un théorème d'approximation diophantienne dû à Schmidt [Sch70]. Au lieu de rentrer dans les détails de la preuve de la proposition précédente, on se propose d'expliquer comment elle s'inscrit dans un cadre général d'analogies relatives à des approximations diophantiennes. Ce sont d'ailleurs ces analogies qui nous ont permis de prédire la proposition précédente.

Nous avons déjà évoqué la notion de nombre diophantien (voir (62)) dans la partie ayant trait à l'équation des poutres sur un tore irrationnel. Rappelons donc que presque tout nombre est diophantien ainsi que tout nombre algébrique irrationnel (théorème de Roth). Fixons un nombre algébrique $\alpha \in \mathbb{R}$ et considérons les nombres $|q\alpha - p|$ avec $(p, q) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$. Le théorème de Roth affirme que l'on a l'alternative suivante :

- i) *ou bien la famille des nombres $|q\alpha - p|$ contient 0,*
- ii) *ou bien les nombres $|q\alpha - p|$ sont très éloignés de 0 au sens suivant : $|q\alpha - p| \gtrsim \frac{1}{|q|^{1+\delta}}$ pour tout nombre $\delta > 0$ fixé à l'avance.*

On remarquera que l'éloignement de la condition ii) est essentiellement maximal : on ne peut pas choisir $\delta < 0$ d'après le théorème d'approximation de Dirichlet. Il se trouve que la propriété de mesure totale de l'ensembles des nombres diophantiens a été généralisée de la façon suivante par Sprindžuk (résolvant ainsi une conjecture faite par Mahler, voir [Spr69]) : pour presque tout nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout entier $\ell \geq 1$, nous avons

$$(65) \quad \forall \delta > 0 \quad \forall (q_0, \dots, q_\ell) \in \mathbb{Z}^{\ell+1} \setminus \{0\} \quad |q_0 + q_1\alpha + \dots + q_\ell\alpha^\ell| \geq \frac{C(\alpha, \ell, \delta)}{\max(|q_0|, \dots, |q_\ell|)^{\ell+\delta}}.$$

On dira que α est **diophantien d'ordre ℓ** .

De nouveau, on a une contre-partie algébrique obtenue par Schmidt et généralisant cette fois-ci le théorème de Roth. Le théorème de Schmidt [Sch70] montre que pour tout nombre algébrique $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout entier $\ell \geq 1$, on a l'alternative :

- i) *ou bien la famille des nombres $|q_0 + q_1\alpha + \dots + q_\ell\alpha^\ell|$ contient 0 (c'est-à-dire que α est algébrique de degré $\leq \ell$),*
- ii) *ou bien les nombres $|q_0 + q_1\alpha + \dots + q_\ell\alpha^\ell|$ sont éloignés de 0 avec sens de (65).*

Par conséquent, un nombre algébrique de degré $> \ell$ est diophantien d'ordre ℓ .

Revenons à présent à l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire sur une variété riemannienne compacte à valeurs propres entières. Nous avons expliqué souhaiter minorer tous les nombres

$$(66) \quad \left| \sum_{j=1}^p \sqrt{m^2 + k_j} - \sum_{j=p+1}^{n+2} \sqrt{m^2 + k_j} \right|,$$

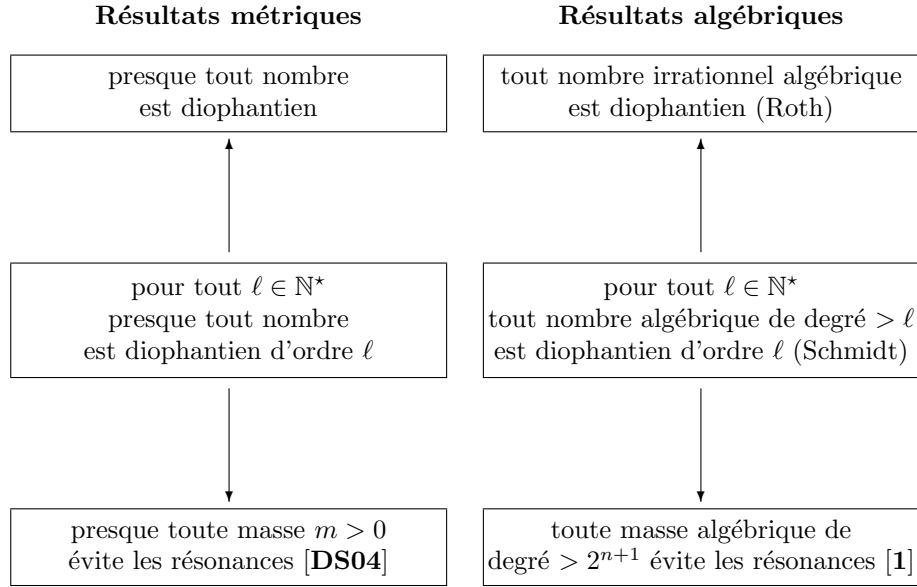
où (k_1, \dots, k_{n+2}) parcourt \mathbb{N}^{n+2} . Par commodité, on se place sous la condition que n est impair afin d'éviter le régime résonant au sens de la proposition 3.9.2 (le cas où n est pair nécessite quelques détails techniques).

D'après des estimations générales de Delort-Szeftel [DS04], on sait que l'on peut minorer (66) par un terme en $(1 + \max(k_1, \dots, k_{n+2}))^{-N}$ (avec $N \gg 1$ assez grand) pour presque tout $m > 0$. C'est le point de vue métrique. Si l'on souhaite prolonger l'analogie métrique-algébrique, alors on devrait avoir l'alternative suivante pour tout nombre algébrique $m > 0$:

- i) *ou bien les nombres (66) peuvent s'annuler,*
- ii) *ou bien les nombres (66) sont tous suffisamment éloignés de 0 (avec une minoration similaire à celle du cas générique de Delort-Szeftel).*

Dans le cas i), un calcul qui exploite les conjugués des nombres (66) montrerait que m est alors algébrique de degré $\leq 2^{n+1}$ (voir [1, page 413-416]). Cette intuition explique l'énoncé de la proposition 3.9.2.

La preuve de la proposition 3.9.2 repose sur une astuce algébrique qui ramène (66) à une expression polynomiale en m (voir [1, Proposition 24]). Par suite, nous pouvons utiliser le théorème de Schmidt évoqué ci-dessus [Sch70] pour conclure.



3.10. Projecteurs de Szégo via le formalisme de Boutet de Monvel et Guillemin

Rappelons très brièvement l'histoire des résultats d'existence presque globale, c'est-à-dire des améliorations du temps d'existence locale en $T(\varepsilon) \gtrsim C_A \varepsilon^{-A}$ pour tout $A > 1$. Pour l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire sur \mathbb{T} , ce type de conclusion apparaît d'abord dans [Bou96a] (avec une condition initiale plus régulière que celle de la trajectoire, voir [Bam99]). La conclusion de stabilité dans un même espace de Sobolev est démontrée par Bambusi dans [Bam03]. Grébert et Bambusi ont plus tard proposé un contexte général englobant l'équation de Klein-Gordon sur \mathbb{T} et l'équation de Schrödinger semi-linéaire sur \mathbb{T}^d dans [BG06]. En fait, ce n'est pas un hasard si ces deux dernières équations soient englobées dans un même cadre. En effet, dans le contexte de l'équation de Klein-Gordon, c'est le spectre de l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ (voir (46)) qui est important. Tandis que pour l'équation de Schrödinger, c'est celui de l'opérateur $-\Delta$ sur \mathbb{T}^d qui devient pertinent. Or les valeurs propres de $\sqrt{-\Delta}$ sur \mathbb{T} et $-\Delta$ sur \mathbb{T}^d sont dans les deux cas uniformément séparées deux à deux.

En combinant les travaux quasilineaires de Delort et Szeftel d'une part et ceux semi-linéaires de Bambusi et Grébert d'autre part, ces quatre auteurs ont obtenu l'existence presque globale sur les variétés de Zoll. Il nous est apparu que nous pouvions adapter l'analyse du travail Bambusi-Delort-Grébert-Szeftel [BDGS07] dans un contexte pseudo-différentiel plus général. Comme expliqué dans la partie 2.1.3, la périodicité du flot géodésique d'une variété riemannienne compacte X est essentiellement équivalente à la périodicité du flot hamiltonien du symbole principal de Δ sur la variété symplectique T^*X . Le cas des variétés de Zoll est un cas particulier d'une théorie pseudo-différentielle écrite par Boutet de Monvel et Guillemin dans le livre [BdMG81]. Ce cadre est le suivant : on considère une variété compacte X et une sous-variété symplectique non dégénérée $\Omega \subset T^*X$. On peut alors associer à Ω un projecteur auto-adjoint $\pi : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$. Le triplet (X, Ω, π) est appelé une structure de Toeplitz. Il ne nous est pas nécessaire de définir précisément π (ou plutôt les propriétés de π) car nous préférons nous concentrer sur la notion d'opérateurs pseudo-différentiels sur (X, Ω, π) . La légère différence avec le cadre classique est que les symboles principaux des opérateurs pseudo-différentiels sont des fonctions définies sur $\Omega \subset T^*X$ et non sur le fibré cotangent entier T^*X . Les deux cas importants sont les suivants :

- i) le cas $(\Omega, \pi) = (T^*X, \text{Id})$ correspond à la théorie pseudo-différentielle usuelle sur la variété compacte X ;

- ii) considérons la sphère de dimension impaire $X = \mathbb{S}^{2d-1} \subset \mathbb{C}^d$, il existe une sous-variété conique symplectique non dégénérée naturelle $\Omega \subset T^*X$ de sorte que l'image du projecteur $\pi : L^2(\mathbb{S}^{2d-1}) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^{2d-1})$ soit l'espace de Hardy des fonctions de $L^2(\mathbb{S}^{2d-1})$ prolongeables holomorphiquement dans la boule unité de \mathbb{C}^d (on dit que π est le projecteur de Szegö).

Dans ce second cas, il existe au moins deux opérateurs elliptiques naturels d'ordre 1 sur la structure de Toeplitz $(\mathbb{S}^{2d-1}, \Omega, \pi)$: l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ et l'opérateur usuellement noté ∂_θ défini par

$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{S}^{2d-1}) \quad \forall x \in \mathbb{S}^{2d-1} \quad \partial_\theta f(x) = (T_x f)(ix),$$

où $T_x f$ désigne l'application tangente de f sur l'espace tangent $T_x \mathbb{S}^{2d-1}$ (qui contient effectivement ix car x et ix sont orthogonaux dans \mathbb{C}^d). Dans le contexte des structures de Toeplitz, il existe un principe "des bicaractéristiques périodiques" : soit φ un opérateur pseudo-différentiel auto-adjoint elliptique d'ordre 1 sur (X, Σ, π) , les deux assertions suivantes sont essentiellement équivalentes⁽¹⁾

- H1) le flot hamiltonien du symbole principal de φ sur la variété symplectique Ω est périodique;
H2) le spectre de φ vérifie une propriété de localisation analogue à celle du théorème 2.1.5.

C'est par exemple le cas pour les opérateurs $\sqrt{-\Delta}$ et $-i\partial_\theta$ sur la structure de Toeplitz non triviale sur \mathbb{S}^{2d-1} . En fait, les valeurs propres de $-i\partial_\theta$ sont particulièrement simples car données par les équations aux modes propres

$$\forall (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \quad -i\partial_\theta(z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}) = (k_1 + \dots + k_n)z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}.$$

Comme d'habitude, on peut aussi définir des espaces de Sobolev naturellement associés à la structure de Toeplitz (X, Ω, π) par $H_\pi^s(X) = H_s(X) \cap \text{Im}(\pi)$.

Pour revenir à l'équation de Klein-Gordon, nous avons montré l'extension suivante du résultat d'existence presque globale de Bambusi-Delort-Grébert-Szeftel [BDGS07] sur les variétés de Zoll.

Théorème 3.10.1. — [2] *Supposons H1). Fixons une fonction lisse $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ s'annulant en 0 au moins à l'ordre 3. Pour presque tout $m > 0$, pour tout $A > 1$ et pour tout $s \gg 1$, les petites solutions de l'équation de Klein-Gordon généralisée*

$$(67) \quad w_{tt} + \varphi^2 w + m^2 w = \pi(\partial_{\bar{w}} f(w)), \quad (x, t) \in X \times \mathbb{R},$$

avec conditions initiales d'ordre $\varepsilon \ll 1$ dans $H_\pi^{s+1}(X) \times H_\pi^s(X)$ sont uniformément bornées par $K\varepsilon$ sur un intervalle $[-C_A \varepsilon^{-A}, +C_A \varepsilon^{-A}]$.

Faisons quelques remarques sur l'énoncé précédent :

- i) puisque f est d'ordre 3 en l'origine, la non-linéarité $\partial_{\bar{w}} f(w)$ est au moins quadratique;
- ii) les solutions w sont à valeurs complexes contrairement à l'équation de Klein-Gordon usuelle. Cette assertion n'est peut-être pas très réaliste mais est inévitable si l'on veut considérer des non-linéarités contenant le projecteur de Szegö π ;
- iii) ajoutons que ce sont les papiers [GG10, GG11] de Gérard et Grellier sur l'équation complètement intégrable de Szegö $i\partial_t \psi = \pi(|\psi|^2 \psi)$ sur \mathbb{T} qui nous ont fait remarquer la conservation du caractère hamiltonien pour des équations semi-linéaires faisant intervenir des projecteurs pourvu que l'on travaille dans des espaces de Sobolev adaptés. De façon précise, le hamiltonien de l'équation (67) est

$$\mathcal{H}(w) := \int_X |w_t|^2 + |\varphi w|^2 - f(w) dx.$$

En effet, de manière formelle, la dérivation en t de la quantité précédente est

$$\int_X 2\text{Re}(\bar{w}_t w_{tt} + (\varphi \bar{w}_t) \varphi w) - w_t \partial_w f - \bar{w}_t \partial_{\bar{w}} f dx.$$

Or f est supposée à valeurs réelles de sorte que $\partial_w \bar{f} = \partial_{\bar{w}} f$. Le caractère auto-adjoint de φ nous amène à réduire le calcul précédent à

$$2\text{Re} \int_X \bar{w}_t w_{tt} + \bar{w}_t \varphi^2 w - \bar{w}_t \partial_{\bar{w}} f dx = 2\text{Re} \langle w_{tt} + \varphi^2 w - \partial_{\bar{w}} f, w_t \rangle_{L^2(X)}.$$

C'est ici qu'intervient le choix des espaces de Sobolev. Puisque w_t est à valeurs dans $H_\pi^s(X)$, il est clair que l'on a $\langle \partial_{\bar{w}} f, w_t \rangle = \langle \pi(\partial_{\bar{w}} f), w_t \rangle$, ou encore $\frac{d}{dt} \mathcal{H}(w) = 0$.

⁽¹⁾En réalité, le sens H1) \Rightarrow H2) nécessite une hypothèse supplémentaire sur le sous-symbole principal de φ , voir [BdMG81, Page 102].

CHAPITRE 4

RANDOMISATION DE FONCTIONS PROPRES DANS L^p

4.1. Énoncés originaux et littérature existante

Nous utiliserons les conventions suivantes : Ω désignera un espace probabilisé de référence muni d'une mesure de probabilité \mathbf{P} , on notera ω un élément de Ω et \mathbf{E} l'opérateur d'espérance. En outre, $(\varepsilon_n)_{n \in I}$ désignera toujours une suite i.i.d., indexée par l'ensemble I , de variables aléatoires de Rademacher : $\mathbf{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}$.

Commençons par énoncer les deux théorèmes suivants dûs à Paley et Zygmund [**PZ**].

Théorème 4.1.1. — *Pour toute suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{Z})$,
- ii) la série de Fourier aléatoire $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n a_n e^{inx}$ converge presque sûrement dans $L^p(-\pi, \pi)$ pour tout $p \in [2, +\infty[$.

Théorème 4.1.2. — *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite complexe vérifiant*

$$\exists \gamma > 1 \quad \sum_{|n| \geq 2} |a_n|^2 \ln^\gamma(n) < +\infty.$$

Alors la série de Fourier aléatoire $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n a_n e^{inx}$ converge presque sûrement dans $L^\infty(-\pi, \pi)$.

Pour des raisons évidentes, on appellera les deux précédents résultats respectivement “théorème de Paley-Zygmund $L^p(\mathbb{T})$ ” (sous-entendu pour $p < +\infty$) et “théorème de Paley-Zygmund $L^\infty(\mathbb{T})$ ”. Les deux précédents théorèmes doivent être comparés aux deux injections de Sobolev :

$$\begin{aligned} \forall p \in [2, +\infty[\quad \forall s \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \quad H^s(\mathbb{T}) &\subset L^p(\mathbb{T}) \\ \forall s > \frac{1}{2} \quad H^s(\mathbb{T}) &\subset L^\infty(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Par exemple, le théorème 4.1.1 permet un gain de $\frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ dérivées en ce sens qu'il transforme en probabilité l'inclusion $H^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$. Les théorèmes de Paley-Zygmund ont engendré une longue généalogie de travaux :

- i) analyse harmonique : extension par Figà-Talamanca et Rider lorsque le tore \mathbb{T} est remplacé par un groupe compact ([**FTR66**, Theorem 4] et [**FTR67**, Corollary 4]). Ces travaux ont été largement étendus par Marcus et Pisier dans [**MP81**].
- ii) analyse fonctionnelle et probabilités : étant donnée une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un espace de Banach B , trouver des conditions nécessaires ou/et suffisantes pour que la série aléatoire $\sum \varepsilon_n f_n$ converge presque sûrement dans B . Que se passe-t-il lorsque les variables de Rademacher sont remplacées par des gaussiennes. La littérature est très large mais nous serons seulement intéressés par les articles de Maurey [**Mau74**] et Maurey-Pisier [**MP76**].
- iii) EDP non linéaires : puisque le théorème de Paley-Zygmund permet d'améliorer les injections de Sobolev, il peut être utile pour construire des solutions en régime sur-critique à des équations de type ondes ou Schrödinger. À ce propos, le fait de remplacer des variables de Rademacher ε_n par des variables aléatoires gaussiennes n'est pas un point de vue purement probabiliste. En effet, le

cas gaussien intervient directement dans les méthodes de construction de mesures de Gibbs (comme évoqué dans l'introduction).

- iv) EDP linéaires : peut-on remplacer les fonctions $x \mapsto e^{inx}$ par des fonctions propres d'un opérateur elliptique tel l'opérateur de Laplace-Beltrami ou l'oscillateur harmonique [AT08, Gri10, Tzv09, BL13].

Nous expliquerons dans les prochaines parties certaines de nos contributions par rapport à ces axes de recherche. Pour le moment, énonçons un théorème qui donne un éclairage instantané du théorème de Paley-Zygmund $L^p(\mathbb{T})$.

Théorème 4.1.3 (Maurey). — *Considérons un espace mesuré σ -fini X . Soit $p \in [1, +\infty[$ et fixons une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^p(X)$. Alors la série aléatoire $\sum \varepsilon_n f_n$ converge presque sûrement dans $L^p(X)$ si et seulement si l'on a*

$$\sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|^2} \in L^p(X).$$

Ce résultat important est démontré dans [Mau74, pages 21-22] (voir aussi [LT79, Theorem 1.d.6, Corollary 1.f.9]). En fait, le théorème 4.1.3 était peut-être connu avant 1973 mais l'intérêt de l'article [Mau74] est de mettre en évidence les propriétés géométriques pertinentes des espaces $L^p(X)$ (c'est la notion de cotype fini sur laquelle nous reviendrons dans la partie suivante). La preuve du théorème 4.1.3 repose sur les inégalités suivantes, dites de Kahane-Khintchine et démontrées dans [Kah68] : pour tous réels $p > q \geq 1$, il existe une constante $K_{p,q} \geq 1$ telle que, pour tout espace de Banach B et tous éléments u_0, \dots, u_N de B , les moments des variables aléatoires $\left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon_n u_n \right\|_B$ sont du même ordre de grandeur au sens suivant

$$(68) \quad \mathbf{E} \left[\left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon_n u_n \right\|_B^q \right]^{\frac{1}{q}} \leq \mathbf{E} \left[\left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon_n u_n \right\|_B^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq K_{p,q} \mathbf{E} \left[\left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon_n u_n \right\|_B^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, on a une estimation de la forme $K_{p,q} \leq K_{p,1} \lesssim \sqrt{p}$. Faisons quelques remarques :

- i) dans le cas où $B = \mathbb{R}$, il est bien connu que l'on a $\mathbf{E} \left[\left| \sum_{n=0}^N \varepsilon_n u_n \right|^2 \right] = \sum_{n=0}^N |u_n|^2$. D'ailleurs l'argument est valide en remplaçant \mathbb{R} par un espace de Hilbert.
- ii) la complétude de l'espace vectoriel normé B n'intervient pas vraiment dans (68) puisque tout espace vectoriel normé s'injecte linéairement isométriquement dans un espace de Banach (par exemple son bidual).

Le théorème 4.1.3 clôt a priori tout problème de randomisation unidimensionnelle dans les espaces $L^p(X)$ avec $p < +\infty$. Nous verrons dans la partie 4.4 que de nouvelles difficultés interviennent lorsque les fonctions f_n sont des fonctions propres.

Quittons un instant l'analyse fonctionnelle pour revenir à la physique mathématique. Nous avons déjà mentionné plus haut que le théorème de Paley-Zygmund $L^p(\mathbb{T})$ fut étendu à tout groupe compact dans les années 60-70. À notre connaissance, il faudra attendre les années 2000 pour avoir une extension au cas des variétés riemanniennes compactes. Pour des raisons de présentation de ce mémoire, nous reviendrons dans la partie 4.5 sur les contributions de Tzvetkov, Ayache-Tzvetkov et Grivaux. Pour finir cette partie, nous énonçons l'extension obtenue par Burq et Lebeau sur les sphères (mais en fait plus généralement sur toute variété riemannienne compacte sans bord).

Théorème 4.1.4. — [BL13] *Soit X une variété riemannienne compacte sans bord. Considérons la suite de fenêtres spectrales $(\alpha k, \alpha k + \alpha]$ de l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ donné par le corollaire 2.1.7. Considérons maintenant une fonction $u \in L^2(X)$ et décomposons $u = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ suivant les fenêtres spectrales précédentes.*

C'est-à-dire, après correction en $k = 0$, que l'on a

$$u_0 = \mathbf{1}_{[0, \alpha]}(\sqrt{-\Delta})(u) \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \quad u_k = \mathbf{1}_{(\alpha k, \alpha k + \alpha]}(\sqrt{-\Delta})(u).$$

Considérons maintenant une suite indépendante de fonctions aléatoires $(u_k^\omega)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $\omega \mapsto u_k^\omega$ suit la loi uniforme sur la sphère de $L^2(X)$, centrée en 0, et de rayon $\|u_k\|_{L^2(X)}$. Alors, la série aléatoire $\sum u_k^\omega$ converge presque sûrement dans chaque $L^p(X)$ avec $p \in [2, +\infty)$.

L'énoncé précédent dit donc que, d'un point de vue probabiliste, presque toute fonction dans $L^2(X)$ appartient à tout $L^p(X)$, avec $p < +\infty$. On peut dire que le théorème 4.1.4 est un "théorème de Paley-Zygmund $L^p(X)$ ".

4.2. Extension multidimensionnelle du théorème de Maurey

À la lumière du théorème d'analyse fonctionnelle 4.1.3 et du théorème de physique mathématique 4.1.4, la question la plus naturelle est de les unifier dans un même cadre. De façon précise, puisque le théorème de Maurey éclaire le classique théorème de Paley-Zygmund $L^p(\mathbb{T})$, peut-on écrire une version multidimensionnelle du théorème de Maurey qui implique le théorème de Burq-Lebeau 4.1.4 sur toute variété riemannienne compacte? Cette question se pose d'autant plus que les arguments des preuves des théorèmes 4.1.3 et 4.1.4 sont très différents : dans le premier cas, ce sont les inégalités (68) qui sont prépondérantes tandis que des inégalités probabilistes de grandes déviations sont systématiques dans [BL13]. Nous répondons à cette question dans [6].

Pour énoncer notre résultat, rappelons très brièvement quelques notations usuelles d'algèbre linéaire : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on note $|A| = \sqrt{tAA}$ et $\sigma(A)$ la plus petite valeur singulière de A , il s'agit aussi de la plus petite valeur propre de $|A|$. Enfin $\|A\|_{op}$ sera la norme d'opérateurs associée à la norme euclidienne.

Notre forme multidimensionnelle du théorème de Maurey est la suivante.

Théorème 4.2.1. — [6, Théorème 2.2] *Considérons un espace mesuré σ -fini X . Fixons un réel $p \in [1, +\infty[$ et une suite de sous-espaces non nuls $(E_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(X) \cap L^p(X)$ de dimension finie. On notera $d_n = \dim(E_n)$ et $(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,d_n})$ une base hilbertienne de E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit de plus*

$$(69) \quad \forall x \in X \quad e_n(x) = |\phi_{n,1}(x)|^2 + \dots + |\phi_{n,d_n}(x)|^2.$$

Fixons de plus une suite de matrices aléatoires $M_n : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ indépendantes, orthogonalement invariantes à gauche et vérifiant

$$(70) \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) > 0 \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E} \left[\|M_n\|_{op}^{\max(2,p)} \right] < +\infty.$$

Pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$, avec $u_n \in E_n$, on définit la série aléatoire

$$(71) \quad \sum_n \left(\sum_{i,j=1}^{d_n} M_{n,i,j} \langle u_n, \phi_{n,j} \rangle \phi_{n,i} \right).$$

Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :

- i) *la fonction $x \mapsto \sqrt{\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_{L^2(X)}^2 \frac{e_n(x)}{d_n}}$ appartient à $L^p(X)$,*
- ii) *la série aléatoire (71) converge presque sûrement dans $L^p(X)$.*

Le même énoncé est valide si les matrices aléatoires $M_n : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{C})$ sont supposées unitairement invariantes.

Pour retrouver le théorème 4.1.4, il s'agit d'appliquer le théorème précédent aux sous-espaces E_n images des projecteurs $\mathbf{1}_{(\alpha n, \alpha n + \alpha]}(\sqrt{-\Delta})$ et de constater les deux points suivants :

- i) le corollaire 2.1.7 implique que les fonctions $x \mapsto \frac{e_n(x)}{d_n}$ sont essentiellement constantes, si bien que la condition i) devient $\sum \|u_n\|_{L^2(X)}^2 < +\infty$, ou encore $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \in L^2(X)$.
- ii) l'expression abstraite (71) correspond précisément au terme $\sum u_n^\omega$ du théorème 4.1.4 dans le cas où les matrices aléatoires M_n suivent des lois uniformes dans les groupes orthogonaux (si bien que les hypothèses (70) sont triviales : $\sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) = 1$ et $\mathbf{E}[\|M_n\|_{op}^{\max(2,p)}] = 1$).

Finissons cette partie en signalant que notre preuve du théorème 4.2.1 n'utilise pas d'arguments de grandes déviations ou le principe de concentration de la mesure (comme dans [BL13]). Notre preuve repose sur les extensions multidimensionnelles des inégalités de Kahane-Khintchine (68) démontrées par Marcus et Pisier [MP81]. En fait, le livre [MP81] est presque entièrement consacré à la convergence des séries de Fourier aléatoires dans l'espace L^∞ d'un groupe compact. Sauf si le groupe est abélien (par exemple \mathbb{T}^d), les séries de Fourier considérées sont par nature multidimensionnelles. C'est pour cette

raison que Marcus et Pisier ont développé des versions multidimensionnelles des inégalités (68) qui sont valides sur tout espace de Banach et nous les utilisons dans [6] sur l'espace $L^p(X)$ avec $p < +\infty$.

Proposition 4.2.2. — [MP81, Page 91, Corollary 2.12] *Fixons une suite d'entiers naturels non nuls $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et notons $(\mathcal{E}_n)_n$ une suite de matrices aléatoires indépendantes. On supposera que la matrice aléatoire \mathcal{E}_n suit une loi uniforme dans le groupe orthogonal $O_{d_n}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit de même W_n en remplaçant les groupes orthogonaux $O_{d_n}(\mathbb{R})$ par les groupes unitaires $U_{d_n}(\mathbb{C})$.*

Pour tous réels $p > q \geq 1$, il existe une constante $K_{p,q} \geq 1$ telle que, pour tout espace de Banach B , pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ et toute suite de matrices carrées $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(B)$, nous avons

$$(72) \quad \mathbf{E} \left[\left\| \sum_{n=0}^N \mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n) \right\|_B^q \right]^{\frac{1}{q}} \leq \mathbf{E} \left[\left\| \sum_{n=0}^N \mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n) \right\|_B^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq K_{p,q} \mathbf{E} \left[\left\| \sum_{n=0}^N \mathbf{tr}(\mathcal{E}_n b_n) \right\|_B^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Des inégalités similaires sont valides en remplaçant la suite (\mathcal{E}_n) par (W_n) . Enfin, Il existe une constante numérique $K \geq 1$ telle que l'on a $K_{p,q} \leq K_{p,1} \leq K\sqrt{p}$.

On remarquera que l'énoncé précédent n'impose aucune condition de croissance polynomiale sur la suite des dimensions $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4.3. Universalité des mesures sur $L^2(X)$ et cotype fini

On explique dans cette partie un lien entre un théorème de Maurey-Pisier publié en 1976 [MP76] et un résultat obtenu par Burq-Lebeau en 2013 dans [BL13]. Pour y arriver, on doit rappeler la notion de cotype d'un espace de Banach.

Définition 4.3.1. — *Considérons un réel $q \in [2, +\infty[$, un espace de Banach complexe B est de cotype q s'il existe $c > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $(u_n)_{1 \leq n \leq N} \in B^N$ on a*

$$(73) \quad \left(\sum_{n=1}^N \|u_n\|_B^q \right)^{1/q} \leq c \mathbf{E} \left[\left\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n u_n \right\|_B \right].$$

S'il existe un réel $q \in [2, +\infty[$ tel que l'inégalité précédente se réalise, alors on dit que B est de cotype fini.

La propriété de cotype fini est une propriété géométrique d'un espace de Banach. En utilisant le théorème 4.1.3, on peut facilement vérifier que $L^p(X)$ est un espace de Banach de cotype $\max(2, p)$, c'est-à-dire le même exposant intervenant dans (70) (nous verrons à la fin de cette partie que ce n'est pas une coïncidence). Maurey et Pisier ont mis en évidence que les séries aléatoires d'un espace de Banach de cotype fini jouissent de propriétés très intéressantes. De façon précise, la preuve du théorème de Maurey-Pisier [MP76, corollaire 1.3] donne en fait le résultat suivant.

Théorème 4.3.2 (Maurey-Pisier). — *Soit B un espace de Banach complexe. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- B est de cotype fini,*
- pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B et toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles, centrées, indépendantes et vérifiant*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|] > 0 \quad \text{et} \quad \forall q \in [2, +\infty[\quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^q] < +\infty,$$

les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- la série aléatoire $\sum X_n u_n$ converge presque sûrement dans B ,*
- la série aléatoire $\sum \varepsilon_n u_n$ converge presque sûrement dans B .*

En d'autres termes, l'universalité de la randomisation *unidimensionnelle* dans $L^p(X)$ a lieu précisément parce que $L^p(X)$ est un espace de Banach de cotype fini.

Signalons que le théorème 4.3.2 est souvent énoncé sous une forme plus forte pour le sens b) \Rightarrow a) en n'incluant que les variables aléatoires gaussiennes. Pour notre propos, c'est le sens a) \Rightarrow b) qui nous intéresse et c'est pour cette raison que nous incluons toutes les variables aléatoires autorisées par la preuve de [MP76].

Faisons à présent le lien annoncé avec un fait constaté par Burq et Lebeau dans [BL13, Appendice C]. En fait, Burq et Lebeau n'ont pas écrit le théorème 4.1.4 sous la forme présentée dans ce mémoire mais

une forme équivalente en termes de mesures. Expliquons comment ces mesures sont construites dans le cas $X = \mathbb{S}^d$. Notons $(E_n)_{n \geq 0}$ la suite des sous-espaces propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ sur $L^2(\mathbb{S}^d)$ et considérons une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $]0, +\infty[$ vérifiant les estimations uniformes de grandes déviations

$$(74) \quad \exists \gamma > 0 \quad \exists C > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall \rho > 0 \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(X_n \geq \rho) \leq C e^{-c\rho^\gamma}.$$

On supposera que les variables aléatoires X_n et les matrices unitaires aléatoires W_n sont indépendantes dans leur ensemble (où W_n est défini dans la proposition 4.2.2). Considérons maintenant une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de $L^2(\mathbb{S}^d)$ vérifiant $u_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les mesures de Burq-Lebeau sont tout simplement les mesures images (c'est-à-dire les lois) des fonctions aléatoires

$$(75) \quad \begin{aligned} \Omega &\rightarrow L^2(\mathbb{S}^d) \\ \omega &\mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i,j=1}^{d_n} X_n(\omega) W_{n,i,j}(\omega) \langle u_n, \phi_{n,j} \rangle \phi_{n,i} \right), \end{aligned}$$

où $(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,d_n})$ est une base orthonormée du sous-espace propre E_n et Ω un univers probabilisé de référence. Par indépendance des variables aléatoires en jeu, cette construction équivaut à définir une mesure de probabilité sur $L^2(\mathbb{S}^d)$ comme un produit tensoriel infini de certaines mesures de probabilités respectivement supportées dans les sous-espaces E_n (voir [BL13, pages 955]).

Avec ce vocabulaire, Burq et Lebeau ont démontré que *beaucoup* de ces mesures ν sur $L^2(\mathbb{S}^d)$, même étrangères deux à deux, vérifient la propriété $\nu(L^p(\mathbb{S}^d)) = 1$ pour tout $p \in [2, +\infty[$. En termes de séries aléatoires, cela signifie qu'il existe *beaucoup* de séries aléatoires de la forme (75) qui convergent presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$. Cette reformulation de [BL13, Appendice C] ressemble donc énormément à l'équivalence i) \Leftrightarrow ii) du théorème 4.3.2. On se propose d'expliquer l'intervention de la notion de cotype fini pour expliquer la construction des mesures de Burq-Lebeau.

Un corollaire immédiat du théorème 4.2.1 est le résultat suivant qui s'apparente à une forme *multidimensionnelle* du théorème de Maurey-Pisier :

Théorème 4.3.3. — [6, Théorème 1.8] *Fixons X un espace mesuré σ -fini et un réel $p \in [1, +\infty[$. Considérons une suite de sous-espaces non nuls $(E_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(X) \cap L^p(X)$ de dimension finie. On notera $d_n = \dim(E_n)$ et $(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,d_n})$ une base hilbertienne de E_n . Considérons aussi une suite de matrices aléatoires $M_n : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{d_n}(\mathbb{R})$ indépendantes et orthogonalement invariantes à gauche telles que*

$$(76) \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\mathbf{E}[|M_n|]) > 0 \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E} \left[\|M_n\|_{op}^{\max(2,p)} \right] < +\infty.$$

Alors, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $u_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) la série aléatoire $\sum_n \left(\sum_{i,j=1}^{d_n} M_{n,i,j} \langle u_n, \phi_{n,j} \rangle \phi_{n,i} \right)$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$,
- ii) la série aléatoire $\sum_n \left(\sum_{i,j=1}^{d_n} W_{n,i,j} \langle u_n, \phi_{n,j} \rangle \phi_{n,i} \right)$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Dans ce qui précède, on convient que $W_n : \Omega \rightarrow U_{d_n}(\mathbb{C})$ suit une loi uniforme dans le groupe unitaire et que les matrices aléatoires $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes.

La même conclusion est valide en remplaçant "orthogonalement invariante" par "unitairement invariante".

Démonstration. — Cela découle du fait que la condition i) du théorème 4.2.1 ne fait pas intervenir les matrices M_n ! □

Faisons quelques remarques :

- i) L'assertion (74) est beaucoup plus restrictive que la condition $\sup_{n \geq 0} \mathbf{E}[|X_n|^{\max(2,p)}] < +\infty$. Le théorème 4.3.3 permet donc de construire des mesures de Burq-Lebeau sur $L^2(\mathbb{S}^d)$ qui ne sont pas accessibles par les arguments de grandes déviations utilisés dans [BL13, appendice C].

- ii) Le théorème 4.3.3 est indépendant d'une quelconque géométrie riemannienne sur X . Du point de vue de l'analyse fonctionnelle, ce n'est pas l'ensemble des points de X qui est déterminant mais plutôt l'espace fonctionnel $L^p(X)$. Cela explique au passage pourquoi les mesures de Burq-Lebeau [BL13] peuvent être construites sur toute variété riemannienne compacte sans bord.
- iii) Les conditions (76) apparaissent sous une forme analogue dans l'étude des séries de Fourier aléatoires dans l'espace fonctionnel $L^\infty(G)$ sur un groupe compact G mais $\|M_n\|_{op}^{\max(2,p)}$ est remplacé par $\|M_n\|_{op}^2$ (voir [MP81, page 97, Theorem 3.5]).

En terme de techniques, notre preuve du théorème 4.3.3 n'est pas un prolongement de celle du théorème de Maurey-Pisier [MP76, corollaire 1.3]. En effet, bien que les inégalités de Kahane-Khintchine interviennent naturellement dans [MP76], elles sont combinées à des outils plus robustes (en l'occurrence le théorème de factorisation de Pietsch). Notre preuve est plus simple car spécifique aux espaces de Banach L^p (et non aux espaces de Banach de cotype fini). En réalité, dans une première tentative, nous avons échoué à démontrer le théorème 4.3.3 par la technique de [MP76]. L'obstacle est le suivant : on veut démontrer un résultat de nature multidimensionnelle alors que la définition même d'un espace de Banach de cotype fini fait intervenir la randomisation unidimensionnelle (voir le membre droit de (73)).

Venons-en maintenant à la remarque suivante : alors que notre preuve du théorème 4.3.3 diffère de celle de [MP76], on retrouve l'exposant $\max(2,p)$ dans (76), c'est-à-dire le cotype de l'espace $L^p(X)$. La seule explication raisonnable est que la notion de cotype se cache dans notre preuve du théorème 4.3.3. C'est effectivement le cas. Sans énoncer de résultats précis dans ce mémoire, signalons que nous montrons dans [6, Partie 2.4] que la construction des mesures de Burq-Lebeau, c'est-à-dire l'universalité de la randomisation *multidimensionnelle* dans $L^p(X)$ est aussi une manifestation du fait que $L^p(X)$ dispose de la propriété de cotype fini.

Enfin, le résultat suivant permet de construire des exemples non triviaux de matrices aléatoires vérifiant les hypothèses (76).

Proposition 4.3.4. — [6, Proposition 1.10] *Considérons des variables aléatoires $X_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ centrées, i.i.d. et où (i, j) parcourt \mathbb{N}^{*2} . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note la matrice aléatoire $M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}[X_{ij}]$. On suppose que $X_{1,1}$ n'est pas, presque sûrement, nulle et admet un moment d'ordre $p \geq 4$. Alors les deux inégalités suivantes sont valides*

$$(77) \quad \inf_{n \geq 1} \sigma(\mathbf{E}[\|M_n\|]) > 0 \quad \text{et} \quad \sup_{n \geq 1} \mathbf{E} \left[\|M_n\|_{op}^p \right] < +\infty.$$

Remarquons que pour forcer l'invariance orthogonale ou unitaire, on peut multiplier M_n à gauche par une matrice aléatoire, qui lui est indépendante, et qui suit une loi uniforme à valeur dans un groupe orthogonal ou unitaire.

En fait, [6, Proposition 1.10] contient des estimations matricielles plus précises qui sont peut-être nouvelles mais qui ne sont probablement pas surprenantes par rapport à la littérature existante. Faisons deux commentaires relatifs aux preuves :

- Dans [6], nous montrons que la majoration de (77) est une conséquence de la preuve de l'inégalité de Latała :

$$(78) \quad \mathbf{E} \left[\|M_n\|_{op} \right] \leq C \mathbf{E} [|X_{1,1}|^4]^{\frac{1}{4}}.$$

et des inégalités (68) de Kahane-Khintchine dans l'espace de Banach $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{op})$. Sans rentrer dans les détails techniques, on peut expliquer l'intervention des inégalités de Kahane-Khintchine dans le cas particulier de la matrice aléatoire $M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}[\varepsilon_{ij}]$ de taille $n \times n$ et dont les coefficients ε_{ij} sont des variables aléatoires i.i.d. qui suivent une loi de Rademacher. D'après (68), on a

$$\forall p \in [1, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{E} \left[\|M_n\|_{op}^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq K_{p,1} \mathbf{E} \left[\|M_n\|_{op} \right].$$

Par ailleurs, la théorie des matrices aléatoires explique que le moment $\mathbf{E} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \|\varepsilon_{ij}\|_{op} \right]$ est borné par rapport à n (voir [Tao12, Part 2.3]).

- Quant à la minoration de (77), sa preuve est seulement une mise à jour du cas gaussien [MP81, page 78, Proposition 1.5] en incorporant l'inégalité de Latała (78) (dont la publication [Lat05] est plus récente que [MP81]).

4.4. Interpolation des espaces de Lebesgue probabilistes

Rappelons que le théorème 4.1.3, classique en analyse fonctionnelle, ramène la question probabiliste de l'étude de la série aléatoire $\sum_{n \in \mathbb{N}} \pm f_n$ dans $L^p(X)$, avec $p < +\infty$ à l'étude de la norme $\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|^2 \right\|_{L^{p/2}(X)}$.

Le théorème 4.2.1 est sa version multidimensionnelle et donne donc une caractérisation abstraite des séries aléatoires multidimensionnelles convergeant presque sûrement dans $L^p(X)$. Nous expliquons dans cette partie que cette caractérisation amène à définir de nouveaux espaces de Banach dont l'interpolation n'est pas triviale. De façon précise nous introduisons la définition suivante.

Definition 4.4.1. — *Considérons un espace mesuré σ -fini X . Fixons un réel $p \in [1, +\infty[$ et une suite de sous-espaces non nuls $(E_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(X) \cap L^p(X)$ de dimension finie. On notera $d_n = \dim(E_n)$ et $(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,d_n})$ une base hilbertienne de E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On notera aussi*

$$\forall x \in X \quad e_n(x) = |\phi_{n,1}(x)|^2 + \dots + |\phi_{n,d_n}(x)|^2.$$

On note $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$ l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n \geq 0}$, avec $u_n \in E_n$ pour tout $n \geq 0$, qui satisfont les assertions équivalentes i) et ii) du théorème 4.2.1. On appelle $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$ l'espace de Lebesgue probabiliste associé à la suite de sous-espaces $(E_n)_{n \geq 0}$ et on le munit de la norme

$$\|(u_n)\|_{\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)} := \left\| \sqrt{\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_{L^2(X)}^2 \frac{e_n(x)}{\dim(E_n)}} \right\|_{L^p(X)}.$$

Faisons quelques remarques sur cette définition :

- rappelons que la fonction e_n est indépendante de la base $(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,d_n})$ et ne dépend que du sous-espace E_n .
- bien que défini abstraitement, nous verrons que dans les cas qui nous intéressent, on pourra identifier $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$ à un espace de distributions (par exemple sur $X = \mathbb{S}^d$ ou $X = \mathbb{R}^d$).
- puisque les fonctions $\frac{1}{d_n} e_n$ sont des densités de probabilité sur X , on a l'égalité

$$(79) \quad \mathbf{PL}^2(X, \oplus E_n) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad u_n \in E_n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^2(X)}^2 < +\infty \right\}.$$

En fait, l'égalité précédente est la généralisation multidimensionnelle du fait suivant : soit H un espace de Hilbert et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de H , alors $\sum \pm h_n$ converge presque sûrement si et seulement si la série $\sum \|h_n\|_H^2$ est convergente (voir le théorème 4.1.3 pour $p = 2$).

Si p est différent de 2, alors il semble nécessaire d'exploiter des propriétés des fonctions e_n afin de mieux comprendre l'espace $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$. Rappelons que l'interpolation (réelle ou complexe) est un outil standard en analyse. Puisque les espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$ sont modélés à partir de L^p et de ℓ^2 , on s'attend à ce qu'ils soient stables par interpolation. Nous nous sommes rendu compte que cela est faux en toute généralité. De façon précise, l'interpolation des espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$ n'est pas gratuite et implique des propriétés sur les fonctions spectrales e_n comme le montre la proposition 4.4.2 ci-après.

Rappelons brièvement que les espaces interpolés des espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$ sont définis de façon abstraite mais peuvent être vus comme des sous-espaces vectoriels du même espace ambiant, à savoir $\prod_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Dans la suite, on notera $[\cdot, \cdot]_\theta$ et $[\cdot, \cdot]_{\theta,p}$ les méthodes d'interpolation complexe et réelle.

Proposition 4.4.2. — *Considérons un espace mesuré σ -fini X . Fixons des réels $p_1 < p < p_2$ appartenant à $[1, +\infty[$ et soit $\theta \in]0, 1[$ le nombre défini par la relation $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$. Considérons une suite de sous-espaces non nuls $(E_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(X) \cap L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$ de dimension finie et supposons que l'on a l'égalité d'espaces vectoriels*

$$\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n) = [\mathbf{PL}^{p_1}(X, \oplus E_n), \mathbf{PL}^{p_2}(X, \oplus E_n)]_\theta$$

et que les normes des deux précédents espaces sont équivalentes. Alors

$$(80) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_1}(X)}^{1-\theta} \|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_2}(X)}^\theta}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^p(X)}} < +\infty.$$

La même conclusion est valide en remplaçant la méthode d'interpolation complexe $[\cdot, \cdot]_\theta$ par la méthode d'interpolation réelle $[\cdot, \cdot]_{\theta,p}$.

Démonstration. — On considère pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ le “projecteur sur E_k ” défini par

$$\begin{aligned} \Lambda_k : \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n &\rightarrow L^2(X) \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto u_k. \end{aligned}$$

Le calcul de la norme d’opérateur de $\Lambda_k : \mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n) \rightarrow L^2(X)$ est immédiat

$$\|\Lambda_k\|_{\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n) \rightarrow L^2(X)} = \sup_{(u_n) \neq 0} \frac{\|u_k\|_{L^2(X)}}{\left\| \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^2(X)}^2 \frac{e_n}{d_n}} \right\|_{L^p(X)}} = \frac{\sqrt{d_k}}{\|\sqrt{e_k}\|_{L^p(X)}}.$$

Par interpolation, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\|\Lambda_k\|_{\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n) \rightarrow L^2(X)} \leq K \|\Lambda_k\|_{\mathbf{PL}^{p_1}(X, \oplus E_n) \rightarrow L^2(X)}^{1-\theta} \|\Lambda_k\|_{\mathbf{PL}^{p_2}(X, \oplus E_n) \rightarrow L^2(X)}^\theta.$$

□

Prenons un exemple simple pour illustrer la proposition précédente : on considère $X = \mathbb{S}^d$ la sphère de \mathbb{R}^{d+1} avec $d \geq 2$ et l’on note $E_n = \mathbb{C}Z_n$ la droite linéaire engendrée par la fonction propre zonale Z_n de Δ (voir (12)). Ainsi, les espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus \mathbb{C}Z_n)$ codent entièrement la convergence presque sûre des combinaisons aléatoires des fonctions propres zonales Z_n dans $L^p(\mathbb{S}^d)$. De plus, on a $e_n = |Z_n|^2 / \|Z_n\|_{L^2(\mathbb{S}^d)}^2$. D’après les estimations L^p des fonctions zonales (voir (13)) et la proposition précédente en choisissant $p_1 < p < \frac{2d}{d-1} < p_2$, il apparaît que l’espace $\mathbf{PL}^p(X, \oplus \mathbb{C}Z_n)$ n’est pas obtenu par interpolation de $\mathbf{PL}^{p_1}(X, \oplus \mathbb{C}Z_n)$ et $\mathbf{PL}^{p_2}(X, \oplus \mathbb{C}Z_n)$.

L’inégalité (80) renverse l’inégalité usuelle $\|\sqrt{e_n}\|_{L^p(X)} \leq \|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_1}(X)}^{1-\theta} \|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_2}(X)}^\theta$. La question naturelle qui se pose est la suivante : est-ce que la seule hypothèse (80) suffit pour interpoler les espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$? Nous ignorons la réponse à cette question mais nous pouvons obtenir des résultats positifs d’interpolation avec une hypothèse supplémentaire nécessitant l’espace de Lorentz $L^{1,\infty}(X)$. Il s’agit de l’espace vectoriel des fonctions mesurables $f : X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ telles que

$$\forall t > 0 \quad \mu \{x \in X, |f(x)| > t\} = \mathcal{O}(t^{-1}),$$

où μ est la mesure de l’espace mesuré X . L’inclusion $L^1(X) \subset L^{1,\infty}(X)$ est toujours vraie et est généralement stricte. Le contre-exemple typique est $|x|^{-d} \in L_x^{1,\infty}(\mathbb{R}^d) \setminus L_x^1(\mathbb{R}^d)$. On peut maintenant énoncer un théorème d’interpolation des espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$.

Théorème 4.4.3. — [6, Théorème 2.5] *Soit X un espace mesuré σ -fini. Considérons $p_1 < p_2$ deux nombres appartenant à $]1, +\infty[$ et vérifiant la condition $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1$. Considérons une suite de sous-espaces non nuls $(E_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(X) \cap L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$ de dimension finie. On suppose que les fonctions e_n satisfont les propriétés suivantes*

$$(81) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\sqrt{e_n}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_1}(X)}} \right)^{p_1} + \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\sqrt{e_n}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_2}(X)}} \right)^{p_2} \in L^{1,\infty}(X)$$

$$(82) \quad \exists p_0 \in]p_1, p_2[\quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_1}(X)}^{1-\theta_0} \|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_2}(X)}^{\theta_0}}{\|\sqrt{e_n}\|_{L^{p_0}(X)}} < +\infty,$$

où $\theta_0 \in]0, 1[$ est déterminé par la relation $\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta_0}{p_1} + \frac{\theta_0}{p_2}$.

Alors les espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$, pour p parcourant $]p_1, p_2[$, sont stables par interpolation **complexe** : en d’autres termes, si l’on a

$$p_1 < p'_1 < p < p'_2 < p_2, \quad \theta \in]0, 1[, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p'_1} + \frac{\theta}{p'_2},$$

alors on a l’égalité $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n) = [\mathbf{PL}^{p'_1}(X, \oplus E_n), \mathbf{PL}^{p'_2}(X, \oplus E_n)]_\theta$ avec équivalence des normes.

De même, les espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$, pour p parcourant $]p_1, p_2[$, sont stables par d’interpolation **réelle** : on a l’égalité $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n) = [\mathbf{PL}^{p_1}(X, \oplus E_n), \mathbf{PL}^{p_2}(X, \oplus E_n)]_{\theta, p}$ avec équivalence des normes.

Signalons que dans les exemples issus de la physique mathématique qui font intervenir des polynômes orthogonaux, on a très souvent des propriétés de concentration qui forcent $\|\sqrt{e_n}\|_{L^p(X)}$ à être équivalent à $n^{(a+\frac{b}{p})}$, pour un certain couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si p parcourt un intervalle donné $]p_1, p_2[$. Ainsi, (82) sera vérifié.

Finissons cette partie par expliquer les grandes lignes de la preuve du théorème d'interpolation 4.4.3. Il existe en général deux stratégies pour montrer qu'une famille d'espaces de Banach est stable par interpolation :

- revenir à la définition abstraite de l'interpolation complexe ou réelle.
- se ramener à une famille d'espaces de Banach déjà existante. Cette technique porte le nom de méthode du rétracte ou méthode de la rétraction (voir [Tri78]).

C'est la seconde stratégie que nous employons dans [6]. La définition 4.4.1 montre que $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$ s'identifie à un sous-espace fermé de l'espace de Bochner-Lebesgue $L^p(X, \oplus E_n)$ où $\oplus E_n$ désigne un espace de Hilbert produit. L'idée est donc d'exploiter le fait que les espaces de Banach $L^p(X, \oplus E_n)$, ou ce qui revient au même $L^p(X, \ell^2(\mathbb{N}))$, forment une famille stable par interpolation. La méthode du rétracte nécessite de vérifier qu'il existe un projecteur borné R de $L^p(X, \oplus E_n)$ dont l'image est $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_n)$ (identifié comme sous-espace de $L^p(X, \oplus E_n)$). De plus, pour valider la procédure d'interpolation, le projecteur R doit avoir une expression indépendante de p . La construction de R est expliquée dans les parties 2.5 à 2.10 de [6]. Mentionnons seulement trois étapes de cette construction :

- on cherche d'abord une définition formelle de R , c'est-à-dire avec la seule condition $R^2 = R$, sans se soucier de sa continuité.
- on montre que le candidat R est borné de $L^{p,1}(X, \oplus E_n)$ dans $L^{p,\infty}(X, \oplus E_n)$ (où ces deux espaces de Banach sont les variantes "Bochner" des espaces de Lorentz $L^{p,1}(X)$ et $L^{p,\infty}(X)$ à valeurs dans l'espace de Hilbert $\oplus E_n$). C'est cette étape qui explique pourquoi l'hypothèse additionnelle (81) fait intervenir un espace de Lorentz (et non un espace de Lebesgue).
- par interpolation réelle, la précédente étape montre la bornitude du projecteur R de $L^p(X, \oplus E_n)$ dans lui-même.

Sous des hypothèses plus fortes que celles du théorème 4.4.3, on peut aussi obtenir des résultats positifs de dualité (voir [6, Théorème 2.6]).

4.5. Théorèmes de Paley-Zygmund unidimensionnels

4.5.1. Cas L^p , avec $1 \leq p < \infty$, interpolation et concentration. — Nous rappelons des résultats dûs à Ayache-Tzvetkov [AT08], Tzvetkov [Tzv09] et Grivaux [Gri10] ainsi que certains de nos résultats prouvés dans [8] et [6]. En particulier, nous expliquons l'intérêt de disposer d'une boîte à outils d'interpolation/dualité des espaces de Lebesgue probabilistes. De façon précise, la philosophie du papier [6] est qu'une concentration de fonctions propres implique des propriétés d'interpolation/dualité des espaces de Lebesgue probabilistes associés, qui à leur tour nous permettent de compléter l'analyse L^p probabiliste.

Décrivons le problème qui nous intéresse. Prenons comme cadre général une variété riemannienne compacte X (que l'on supposera toujours lisse, sans bord et de dimension $d \geq 2$). On fixe une suite $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, une famille orthonormée $(\phi_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(X)$ constituée de fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ sur X et une distribution $\sum_{n \geq 0} a_n \phi_n$ supportée par la suite (ϕ_n) . Peut-on trouver une condition nécessaire et suffisante pour assurer la convergence presque sûre dans $L^p(X)$ de la série aléatoire $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n a_n \phi_n$?

Le théorème 4.1.3 répond a priori à la question (dans le cas $p < \infty$). Mais la réponse est trop abstraite pour être lisible dans des exemples concrets issus de la physique mathématique. Avant d'examiner des exemples précis, remarquons une conséquence immédiate du théorème 4.1.3 :

Proposition 4.5.1. — *Pour tout $p \in [2, +\infty[$, les deux assertions suivantes sont vraies :*

- i) *si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \|\phi_n\|_{L^p(X)}^2$ converge alors la série aléatoire $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n a_n \phi_n$ converge presque sûrement dans $L^p(X)$,*

ii) si $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(X)$, alors on a l'équivalence

$$(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n a_n \phi_n \text{ converge presque sûrement dans } L^p(X).$$

Démonstration. — Pour i), il suffit d'invoquer l'inégalité triangulaire dans $L^{p/2}(X)$.

$$\forall p \in [2, +\infty[\quad \left\| \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 |\phi_n|^2} \right\|_{L^p(X)} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \|\phi_n\|_{L^p(X)}^2 \right)^{1/2}.$$

Par conséquent, seul le sens \Leftarrow de ii) nécessite un argument : la convergence presque sûre dans $L^p(X)$ implique celle dans $L^2(X)$ car X est de mesure finie. Mais d'après la remarque après (79) et le fait que les fonctions ϕ_n sont orthonormées dans $L^2(X)$, on obtient que $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. \square

L'énoncé précédent signifie que le comportement dans $L^p(X)$ de la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a un impact sur la convergence de la série aléatoire $\sum \varepsilon_n \phi_n$ dans $L^p(X)$.

Rappelons à présent une amélioration probabiliste des injections de Sobolev obtenues par Tzvetkov [Tzv09, Theorem 4]. On utilisera l'expression *injection de Sobolev probabiliste* (selon la terminologie introduite par Burq et Lebeau dans [BL13]) : pour tout réel $p \in]2, +\infty[$, on note $\delta(d, p)$ l'exposant employé dans les inégalités $\|\phi_n\|_{L^p(X)} \lesssim \lambda_n^{\delta(d, p)}$ de Sogge (voir (11)). Alors on a

$$(83) \quad \sum_{n \geq 0} a_n \phi_n \in H^{\delta(d, p)}(X) \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n a_n \phi_n \text{ converge p.s. dans } L^p(X).$$

Il importe de remarquer que l'on a l'inégalité $\delta(d, p) < d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)$ si bien que (83) améliore l'*injection de Sobolev déterministe*

$$\sum_{n \geq 0} a_n \phi_n \in H^{d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)}(X) \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n \phi_n \in L^p(X).$$

La preuve de Tzvetkov n'invoque pas le théorème de Maurey mais il est clair que la proposition 4.5.1, conséquence du théorème de Maurey, permet de retrouver l'implication (83).

Nous avons déjà signalé que les inégalités de Sogge sont saturées par des suites bien connues sur \mathbb{S}^d (à savoir les fonctions propres zonales Z_n et équatoriales Y_n , voir la partie 2.1.4). Nous montrons dans [6] que ces mêmes fonctions permettent de prouver l'optimalité de l'injection de Sobolev probabiliste de Tzvetkov (83). Afin de situer nos résultats dans la littérature existante, mentionnons que Ayache et Tzvetkov obtiennent le point ii) de la proposition 4.5.1 dans [AT08, Theorem 1], si les variables de Rademacher ε_n sont remplacées par des gaussiennes complexes centrées réduites. Signalons au passage que le théorème 4.3.2 (dû à Maurey-Pisier) permet de prévoir que la conclusion de la proposition 4.5.1 demeure inchangée dans le cas gaussien.

Ayache et Tzvetkov analysent ce fait comme un éclairage gaussien du théorème de Paley-Zygmund $L^p(\mathbb{T})$ (théorème 4.1.1). Autrement dit, le théorème de Paley-Zygmund $L^p(\mathbb{T})$ est une conséquence de la bornitude des fonctions trigonométriques $x \mapsto e^{inx}$ dans $L^p(\mathbb{T})$ (alors que les preuves usuelles du théorème 4.1.1 exploitent l'égalité plus forte $|e^{inx}| = 1$). Par conséquent, seule l'explosion des normes $\|\phi_n\|_{L^p(X)}$ peut contredire la conclusion d'un théorème de Paley-Zygmund. Il se trouve que ce phénomène d'explosion est parfaitement courant dans bon nombre de modèles linéaires, par exemple avec les fonctions zonales Z_n de la sphère \mathbb{S}^d (voir la partie 2.1.4), et il est donc naturel d'étudier ces situations problématiques. En fait, Ayache et Tzvetkov étudient dans [AT08] les modes propres radiaux ψ_n de l'opérateur Laplacien Δ avec condition de Dirichlet au bord sur la boule fermée unité $\overline{\mathbb{B}_d(0, 1)}$ de \mathbb{R}^d . Mais leur analyse se transfère sans souci aux fonctions zonales Z_n de la sphère \mathbb{S}^d avec $d \geq 2$ (voir la remarque qui suit [AT08, Theorem 4]). Signalons de plus que les modes propres radiaux ψ_n et les fonctions zonales Z_n ont des propriétés de concentration polaire assez similaires (voir la partie 2.4.2). Aussi, nous allons étudier ces dernières fonctions propres. Notons (g_n) une suite i.i.d. de variables aléatoires identiquement distribuées suivant une loi gaussienne $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$. On peut distinguer deux cas :

- Pour tout $p \in [2, \frac{2d}{d-1}[$, rappelons que la suite (Z_n) est bornée dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ (voir (13)). D'après [AT08] ou la proposition 4.5.1, cela implique que pour toute suite $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$, la série aléatoire $\sum g_n a_n Z_n$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$.
- En ce qui concerne les exposants $p > \frac{2d}{d-1}$, la suite (Z_n) explose dans $L^p(\mathbb{S}^d)$. Ayache et Tzvetkov obtiennent alors une réponse partielle [AT08, Theorem 4] au problème qui nous intéresse : pour des

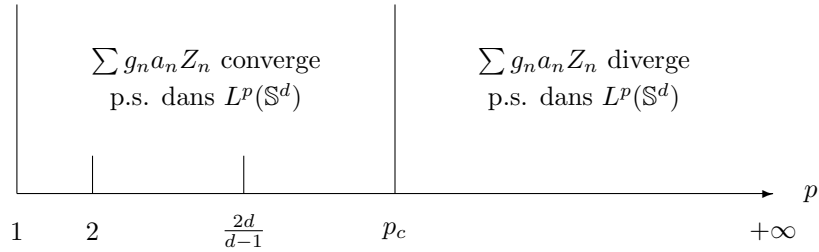
suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant certaines estimations asymptotiques, il existe un exposant explicite $p_c > 2$ vérifiant

$$\begin{aligned} p < p_c &\Rightarrow \text{la série aléatoire } \sum g_n a_n Z_n \text{ converge p.s. dans } L^p(\mathbb{S}^d), \\ p > p_c &\Rightarrow \text{la série aléatoire } \sum g_n a_n Z_n \text{ diverge p.s. dans } L^p(\mathbb{S}^d). \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que les fonctions propres zonales Z_n se concentrent autour de deux boules centrées aux pôles $(\pm 1, 0, \dots, 0)$ de rayon d'ordre $\frac{1}{n}$ avec une amplitude d'ordre $n^{\frac{d-1}{2}}$. En exploitant cette concentration polaire, la méthode de Grivaux [Gri10] permet de s'émanciper des conditions asymptotiques sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de [AT08] et montre que, sous la seule hypothèse $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, l'exposant critique p_c se calcule comme suit :

$$(84) \quad p_c := \sup \left\{ p \geq \frac{2d}{d-1}, \quad \frac{1}{n^{d+1}} \left(\sum_{k=1}^n k^{d-1} |a_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \right\}.$$

Cette formule est bien explicite puisque si $a_n \sim \frac{1}{n^\gamma}$ avec $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{d}{2}$ alors $p_c = \frac{2d}{d-2\gamma}$ (résultat qu'on pourrait d'ailleurs obtenir avec la méthode de [AT08]). Autrement dit, on a le schéma suivant :



Ouvrons une parenthèse pour mentionner que la méthode de Grivaux permet d'obtenir des formules similaires à (84) dans d'autres contextes où l'on dispose d'une concentration polaire (voir la partie 2.4.2).

Théorème 4.5.2. — [8, Theorem 2.3] Notons $(\psi_n)_{n \geq 0}$ la suite des fonctions propres radiales de l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$ sur \mathbb{R}^d avec $d \geq 2$ (ainsi $(-\Delta + |x|^2)\psi_n = (4n + d)\psi_n$). Pour toute suite $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, on note

$$(85) \quad p'_c := \sup \left\{ p \geq \frac{2d}{d-2}, \quad \sum_{k=0}^n k^{\frac{d}{2}-1} |a_k|^2 = \mathcal{O}(n^{\frac{d}{p}}) \right\}.$$

Alors la série aléatoire $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n a_n \psi_n$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in]2, p'_c[$ et diverge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p > p'_c$.

Remarque 4.5.3. — Dans le cas particulier $d = 2$, on convient évidemment que $\frac{2d}{d-2} = +\infty$, si bien que $p'_c = +\infty$. Dans le cas $d \geq 3$, l'exposant minimal $p = \frac{2d}{d-2}$ n'est pas quelconque, il s'agit précisément du plus petit exposant vérifiant $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < +\infty$ (voir [8, Proposition 2.4]). Cela est cohérent avec le point ii) de la proposition 4.5.1.

Pour revenir au problème initial, c'est-à-dire déterminer la nature d'une série aléatoire de fonctions propres zonales dans L^p , il reste à déterminer ce qu'il se passe en $p = p_c$? Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème 4.5.4. — [6, Théorème 1.1] On considère une suite complexe $(a_n)_{n \geq 1}$ à croissance polynomiale et un réel $p \in]\frac{2d}{d-1}, +\infty[$. La série aléatoire $\sum g_n a_n Z_n$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ si et seulement si

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{d+1}} \left(\sum_{k=1}^n k^{d-1} |a_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} < +\infty.$$

Autrement dit, la condition précédente donne une condition nécessaire et suffisante pour que la distribution $\sum_{n \geq 1} a_n Z_n$ appartient à $\mathbf{PL}^p(\mathbb{S}^d, \oplus \mathbf{CZ}_n)$ (voir la définition 4.4.1).

La preuve du théorème précédent nécessite une nouvelle idée d'interpolation réelle, à savoir l'utilisation du théorème 4.4.3, qui sera expliquée dans la partie suivante. Le théorème 4.5.4 nous permet de préciser la formule (84). Il est plausible que la stratégie de preuve du théorème précédent permette aussi de compléter le théorème 4.5.2. Examinons par exemple des coefficients de la forme

$$\alpha_n = \frac{1}{n^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \ln^{\frac{\beta}{p}}(n)}, \quad \beta \geq 0, \quad p > \frac{2d}{d-1}, \quad n \geq 2.$$

La suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ et l'on calcule facilement l'équivalent

$$\frac{1}{n^{d+1}} \left(\sum_{k=2}^n k^{d-1} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \sim \left(\frac{p}{2d} \right)^{\frac{p}{2}} \frac{1}{n \ln^{\beta}(n)}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

La borne supérieure (84) vaut donc p pour toute valeur de β , mais le théorème 4.5.4 permet d'affirmer que la série aléatoire $\sum_{n \geq 2} g_n \alpha_n Z_n$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ si et seulement si $\beta > 1$.

Revenons à présent sur l'injection de Sobolev probabiliste (83) obtenue par Tzvetkov. Cette dernière se reformule en l'inclusion $H^{\delta(d,p)}(X) \subset \mathbf{PL}^p(X, \oplus \mathbb{C}\phi_n)$ d'après la définition 4.4.1 des espaces de Lebesgue probabilistes. Dans le cas $p \geq \frac{2(d+1)}{d-1}$, l'exposant $\delta(d,p)$ vaut $\frac{d-1}{2} - \frac{d}{p}$ (voir (11)) et l'inclusion $H^{\delta(d,p)}(X) \subset \mathbf{PL}^p(X, \oplus \mathbb{C}\phi_n)$ s'avère optimale par rapport à l'exposant $\delta(d,p)$ grâce au corollaire suivant du théorème 4.5.4.

Corollaire 4.5.5. — [6, Proposition 3.1] *Pour tout $p \in]\frac{2d}{d-1}, +\infty[$, les injections de Sobolev probabilistes des fonctions Z_n sont données par les inclusions*

$$(86) \quad H_{zon}^{\frac{d-1}{2} - \frac{d}{p}}(\mathbb{S}^d) \subset \mathbf{PL}^p(\mathbb{S}^d, \oplus \mathbb{C}Z_n) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} H_{zon}^{\frac{d-1}{2} - \frac{d}{p} - \varepsilon}(\mathbb{S}^d),$$

où l'on note

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad H_{zon}^s(\mathbb{S}^d) := \left\{ \sum_{n \geq 1} a_n Z_n, \quad \sum_{n \geq 1} n^{2s} |a_n|^2 < +\infty \right\} \subset H^s(\mathbb{S}^d).$$

Nos arguments permettent aussi de traiter la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ des fonctions propres “de plus haut poids” de \mathbb{S}^d , avec $d \geq 2$, qui se concentrent sur une géodésique (voir partie 2.1.4).

Théorème 4.5.6. — [6, Théorème 1.2] *On considère une suite complexe $(a_n)_{n \geq 1}$ à croissance polynomiale. Pour tout réel $p \in]1, +\infty[$, la série aléatoire $\sum g_n a_n Y_n$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ si et seulement si*

$$(87) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{d+1}{2}}} \left(\sum_{k=1}^n k^{\frac{d-1}{2}} |a_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} < +\infty.$$

Comme application immédiate, on obtient le fait suivant qui contraste avec le théorème de Paley-Zygmund sur \mathbb{T} : la fonction $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n \ln(n)}} Y_n$ appartient à $L^2(\mathbb{S}^d)$ mais la série aléatoire $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{g_n}{\sqrt{n \ln(n)}} Y_n$ diverge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ pour tout réel $p > 2$.

La preuve du théorème 4.5.6 consiste aussi à exploiter le théorème 4.4.3 d'interpolation des espaces $\mathbf{PL}^p(X, \oplus \mathbb{C}Y_n)$. Pour traiter le cas général $p \in]1, +\infty[$, on raisonnera par interpolation avec $p \in 2\mathbb{N}$ puis par dualité. Mentionnons seulement que c'est la concentration gaussienne des fonctions propres Y_n autour de la géodésique $\{x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{S}^d$ qui permet de valider les hypothèses du théorème 4.4.3.

De même que pour les fonctions propres zonales Z_n , les fonctions propres Y_n permettent de justifier l'optimalité de l'injection de Sobolev probabiliste (83) pour $p \in [2, \frac{2(d+1)}{d-1}]$. Comme déjà mentionné plus haut, cela est cohérent car les preuves de [Tzv09] sont obtenues grâce aux inégalités de Sogge (11) qui sont précisément saturées pour les fonctions Y_n et Z_n .

4.5.2. Quelques idées de preuve. — On explique les grandes lignes de la preuve du théorème 4.5.4. D'après le théorème 4.1.3, il s'agit de prouver l'équivalence

$$(88) \quad \left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n Z_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}^p \simeq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{d+1}} \left(\sum_{k=1}^n k^{d-1} |a_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Notons $\Theta := \arccos(x_1) \in [0, \pi]$ la distance géodésique d'un point $x \in \mathbb{S}^d$ au pôle $(1, 0, \dots, 0)$. Des estimations classiques des polynômes de Jacobi permettent de montrer les estimations suivantes :

$$(89) \quad \Theta \in \left[0, \frac{c}{n}\right] \cup \left[\pi - \frac{c}{n}, \pi\right] \Rightarrow \frac{n^{\frac{d-1}{2}}}{C(d)} \leq |Z_n(x)| \leq C(d)n^{\frac{d-1}{2}},$$

$$(90) \quad \Theta \in \left]\frac{c}{n}, \pi - \frac{c}{n}\right[\Rightarrow |Z_n(x)| \leq \frac{C(d)}{\sin(\Theta)^{\frac{d-1}{2}}}.$$

C'est d'ailleurs avec ces estimations que l'on peut obtenir les estimations (13) des normes dans $L^p(\mathbb{S}^d)$ des fonctions Z_n . Ces dernières disent que seule la concentration au voisinage des pôles est significative dans l'échelle des espaces $L^p(\mathbb{S}^d)$, avec $p > \frac{2d}{d-1}$. Il est donc naturel de comparer Z_n à sa restriction \tilde{Z}_n définie comme suit

$$\tilde{Z}_n(x) := \mathbf{1}_{[0, \frac{\varepsilon}{n}]}(\Theta) \times Z_n(x).$$

En découpant la sphère \mathbb{S}^d en tranches, on peut effectuer le calcul suivant :

$$(91) \quad \left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n \tilde{Z}_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}^p \simeq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{d+1}} \left(\sum_{k=1}^n k^{d-1} |a_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Cela constitue la moitié de la preuve de (88) en vertu de l'inégalité triviale $|\tilde{Z}_n| \leq |Z_n|$. Pour conclure, il suffirait d'obtenir

$$\left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n Z_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}^p \lesssim \left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n \tilde{Z}_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}^p.$$

Si l'on essaie d'injecter les inégalités (89) et (90), alors un calcul permettrait d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n Z_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}^p \lesssim \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n+1)}{n^{d+1}} \left(\sum_{k=1}^n k^{d-1} |a_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Ainsi on commet une perte logarithmique. Nous n'avons pas trouvé d'astuce calculatoire pour faire disparaître le coefficient logarithmique. Nous allons contourner cet obstacle par un argument d'interpolation réelle. De façon précise, si l'on utilise les espaces de Lorentz $L^{p, \infty}(\mathbb{S}^d)$ et que l'on injecte de nouveau les approximations (89) et (90) alors, un nouveau calcul permettrait de retrouver (91) :

$$\left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n Z_n|^2} \right\|_{L^{p, \infty}(\mathbb{S}^d)}^p \lesssim \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{d+1}} \left(\sum_{k=1}^n k^{d-1} |a_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \simeq \left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n \tilde{Z}_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}^p.$$

Comme p parcourt un intervalle ouvert, à savoir $]\frac{2d}{d-1}, +\infty[$, la théorie de l'interpolation réelle devrait pouvoir auto-renforcer l'inégalité précédente de type $L^p \rightarrow L^{p, \infty}$ pour obtenir l'inégalité $L^p \rightarrow L^p$ manquante

$$\left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n Z_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}^p \lesssim \left\| \sqrt{\sum_{n \geq 1} |a_n \tilde{Z}_n|^2} \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}^p.$$

En réalité, on commet un abus d'interpolation réelle car l'argument précédent, d'un point de vue linéaire, porte sur la suite des coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En d'autres termes, nous avons besoin de la stabilité par interpolation réelle des espaces $\mathbf{PL}^p(\mathbb{S}^d, \oplus \mathbb{C}\tilde{Z}_n)$. C'est maintenant que l'on invoque la concentration polaire des fonctions zonales Z_n via notre théorème d'interpolation :

Lemme 4.5.7. — *La famille d'espaces de Banach $(\mathbf{PL}^p(\mathbb{S}^d, \oplus \mathbb{C}\tilde{Z}_n))_{p \in]1, +\infty[}$ est stable par interpolation réelle au sens du théorème 4.4.3.*

Démonstration. — Il s'agit d'appliquer le théorème 4.4.3 avec $E_n = \mathbb{C}\tilde{Z}_n$ et $\sqrt{e_n(x)} = \frac{|\tilde{Z}_n(x)|}{\|\tilde{Z}_n\|_{L^2(\mathbb{S}^d)}}$. D'une part, on a le comportement asymptotique

$$\forall p > 1 \quad \left\| \tilde{Z}_n \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)} \simeq_{d,p} n^{\frac{d-1}{2} - \frac{d}{p}},$$

ce qui nous assure la validité de (82). Quant à l'hypothèse (81), on peut écrire d'après (89) pour tout $x \in \mathbb{S}^d$:

$$\sup_{n \geq 1} \frac{|\tilde{Z}_n(x)|}{\left\| \tilde{Z}_n \right\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}} \leq C(d, p) \sup_{n \geq 1} \frac{|\tilde{Z}_n(x)|}{n^{\frac{d-1}{2} - \frac{d}{p}}} = C(d, p) \sup_{n \geq 1} n^{\frac{d}{p}} \mathbf{1}_{[0, \frac{\varepsilon}{n}]}(\Theta) \leq \frac{C(d, p)}{\sin(\Theta)^{\frac{d}{p}}}.$$

Or on peut vérifier que la fonction $x \mapsto \sin(\Theta)^{-\frac{d}{p}}$ appartient à $L^{p, \infty}(\mathbb{S}^d)$. En effet, le comportement est similaire à la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^{d/p}}$ de $L^{p, \infty}(\mathbb{R}^d)$. \square

4.5.3. Cas L^∞ et propriété de concentration finie. — La principale difficulté du cas L^∞ est l'absence d'analogie simple du théorème 4.1.3. Ainsi, les théories L^p , avec $p < +\infty$, et L^∞ sont radicalement différentes. On peut même dire que la première ne nécessite que la théorie de la mesure (voir les énoncés des théorèmes 4.2.1, 4.3.3 et 4.4.3) tandis que la seconde nécessite de travailler sur des espaces métriques puisqu'elle concerne la convergence uniforme. On se propose d'exposer un théorème qui généralise le théorème de Paley-Zygmund $L^\infty(\mathbb{T})$ et qui présente l'avantage d'être applicable à d'autres cas de fonctions propres de la physique mathématique. Cela nous permettra au passage de faire intervenir les inégalités de Bernstein. Le résultat suivant est la version unidimensionnelle de [7, Corollary 6.2].

Théorème 4.5.8. — *Soit X un espace métrique. Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions complexes continues et bornées sur X vérifiant*

- i) *une propriété de "concentration finie" : pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un ensemble fini $\mathcal{X}_N \subset X$ de cardinal polynomialement borné en N tel que*

$$\forall u \in \text{Vect}\{\phi_0, \dots, \phi_N\} \quad \|u\|_{L^\infty(X)} \leq 2 \sup_{x \in \mathcal{X}_N} |u(x)|.$$

- ii) *une hypothèse "à la Paley-Zygmund L^∞ " :*

$$(92) \quad \exists \gamma > 1 \quad \sum_{n \geq 2} \|\phi_n\|_{L^\infty(X)}^2 \ln^\gamma(n) < +\infty$$

Alors, les séries aléatoires $\sum \varepsilon_n \phi_n$ et $\sum g_n \phi_n$ convergent presque sûrement dans $L^\infty(X)$.

Faisons trois remarques :

- en négligeant le facteur logarithmique dans (92), on retrouve la condition i) de la proposition 4.5.1 si p tend vers $+\infty$;
- prolongeons le point précédent en supprimant le facteur logarithmique, c'est-à-dire que l'on suppose seulement la convergence de $\sum \|\phi_n\|_{L^\infty(X)}^2$. On obtient alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la convergence presque sûre de la série aléatoire $\sum \varepsilon_n \phi_n(x)$ (voir la remarque qui suit (79));
- la preuve du théorème 4.5.8 est valide pour des séries aléatoires plus générales de la forme $\sum X_n(\omega) \phi_n$ où X_n est une suite indépendante de variables aléatoires centrées vérifiant $\inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|] > 0$ et

$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^2] < +\infty$. Il est important de remarquer que ceci n'est pas une conséquence du théorème

de Maurey-Pisier (théorème 4.3.2) car $L^\infty(X)$ n'appartient pas à la famille des espaces de Banach de cotype fini (si X est infini)! En réalité, ceci n'est pas totalement vrai et nécessite d'ouvrir une petite parenthèse d'analyse fonctionnelle. Dans le cas $L^\infty(\mathbb{T})$, un théorème assez profond dû à Marcus et Pisier montre que l'espace des séries de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ qui donnent lieu presque sûrement, après

randomisation $a_n \rightarrow \varepsilon_n a_n$, à des fonctions continues est un espace de Banach de cotype fini. On pourrait d'ailleurs noter cet espace $\mathbf{PL}^\infty(\mathbb{T}, \oplus \mathbb{C} e^{inx})$ par comparaison avec la définition 4.4.1 mais il est usuellement noté \mathcal{C}_{as} ou \mathcal{C}^{ps} (voir [LT91, LQ04]). Ainsi, le théorème 4.3.2 explique que l'on peut bien remplacer les variables de Rademacher ε_n par d'autres variables aléatoires (modulo quelques hypothèses de moments) pour la convergence dans $L^\infty(\mathbb{T})$. Une telle interprétation nous paraît pour l'instant inaccessible dans le cadre de fonctions propres quelconques d'un opérateur elliptique.

Illustrons le théorème 4.5.8 dans le cas zonal, c'est-à-dire $\phi_n = a_n Z_n$ où (Z_n) est la suite des fonctions zonales de \mathbb{S}^d , avec $d \geq 2$. La condition (92) devient l'hypothèse suivante de convergence sur les coefficients de Fourier :

$$\exists \gamma > 1 \quad \sum_{n \geq 2} |a_n|^2 n^{d-1} \ln(n)^\gamma < +\infty.$$

Seule la condition de concentration finie mérite d'être examinée. Il s'agit d'invoquer l'inégalité de Bernstein (32) sur la sphère \mathbb{S}^d :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in \text{Vect}(Z_1, \dots, Z_N) \quad \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{S}^d)} \leq CN \|u\|_{L^\infty(\mathbb{S}^d)}.$$

En utilisant la compacité de \mathbb{S}^d , on peut trouver un maillage fini $\mathcal{X}_N \subset \mathbb{S}^d$ maximal pour la propriété suivante : pour tous éléments $x \neq x'$ de \mathcal{X}_N , les boules ouvertes $B(x, \frac{1}{4CN})$ et $B(x', \frac{1}{4CN})$ sont disjointes. Comme \mathbb{S}^d est de volume fini, le nombre de ces boules, c'est-à-dire le cardinal de \mathcal{X}_N , est contrôlé par $N^{\dim(X)}$. Fixons maintenant $y \in \mathbb{S}^d$ qui maximise $|u|$ et considérons $x \in \mathcal{X}_N$ tel que $y \in B(x, \frac{1}{2CN})$. Ainsi, on peut écrire

$$|u(x) - \|u\|_{L^\infty(\mathbb{S}^d)}| = |u(x) - u(y)| \leq \frac{CN}{2CN} \|u\|_{L^\infty(X)} = \frac{1}{2} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{S}^d)}.$$

Par conséquent, on a $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{S}^d)} \leq 2|u(x)|$ et la propriété de concentration finie est bien réalisée.

L'argumentation précédente peut être transférée à d'autres suites de fonctions propres d'une variété riemannienne compacte. Examinons à présent un cas non compact, à savoir la suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des fonctions propres radiales de l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$ sur \mathbb{R}^d avec $d \geq 2$ (voir le théorème 4.5.2). On a de nouveau une inégalité de Bernstein (voir (35)) :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_N) \quad \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C\sqrt{N} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Mais l'on rencontre un nouvel obstacle : comme \mathbb{R}^d n'est pas compact l'argumentation précédente de maillage avec des boules de rayon d'ordre $\frac{1}{\sqrt{N}}$ fournirait un ensemble *dénombrable non fini* \mathcal{X}_N . C'est alors qu'intervient la propriété de concentration affirmant qu'une fonction *spectralement* localisée dans $[0, CN]$, par rapport à $-\Delta + |x|^2$, est essentiellement *spatialement* localisée dans une boule fermée $\overline{B}(0, C'\sqrt{N})$ (voir les propositions 2.2.1 et 2.3.1). On peut donc dans un premier temps se ramener au cas compact, puis faire usage de l'inégalité de Bernstein pour justifier l'existence d'un maillage fini \mathcal{X}_N . De nouveau, la propriété de concentration finie est réalisée.

Bien que les méthodes d'approche entre L^p , $p < \infty$, et L^∞ sont différentes, essayons de faire un lien avec le théorème 4.5.2 qui a trait à l'espace L^p avec $p < \infty$. On fixe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ et on souhaite une condition suffisante de convergence presque sûre dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ de la série aléatoire $\sum \varepsilon_n a_n \psi_n$. Quelle que soit la condition que l'on impose, elle devrait impliquer que l'exposant limite p'_c du théorème 4.5.2 soit égal à $+\infty$. La condition i) du théorème 4.5.8 et l'estimation $\|\psi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \simeq n^{\frac{d}{4} - \frac{1}{2}}$ (voir [8, Proposition 2.4]) fournissent la condition

$$\exists \gamma > 1 \quad \sum_{n \geq 2} |a_n|^2 n^{\frac{d}{2} - 1} \ln^\gamma(n) < +\infty.$$

Cela implique bien $p'_c = +\infty$ d'après la formule (85).

4.5.4. Quelques idées de preuve. — On explique les grandes lignes de la preuve du théorème 4.5.8 dans le cas Rademacher ε_n . Il s'agit essentiellement de prouver une estimation de la forme suivante pour tout entier $N \geq 2$

$$\mathbf{E} \left[\left\| \sum_{n=2}^N \varepsilon_n \phi_n \right\|_{L^\infty(X)} \right]^2 \lesssim \sum_{n \geq 2} \|\phi_n\|_{L^\infty(X)}^2 \ln^\gamma(n).$$

La propriété de concentration finie montre qu'il suffit de prouver l'inégalité

$$\mathbf{E} \left[\sup_{x \in \mathcal{X}_N} \left| \sum_{n=2}^N \varepsilon_n \phi_n(x) \right| \right]^2 \lesssim \sum_{n \geq 2} \|\phi_n\|_{L^\infty(X)}^2 \ln^\gamma(n).$$

Commençons par écrire pour tout $p \in [1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\sup_{x \in \mathcal{X}_N} \left| \sum_{n=2}^N \varepsilon_n \phi_n(x) \right| \right] &\leq \mathbf{E} \left[\left(\sum_{x \in \mathcal{X}_N} \left| \sum_{n=2}^N \varepsilon_n \phi_n(x) \right|^p \right)^{1/p} \right] \\ &\leq \mathbf{E} \left[\sum_{x \in \mathcal{X}_N} \left| \sum_{n=2}^N \varepsilon_n \phi_n(x) \right|^p \right]^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{x \in \mathcal{X}_N} \mathbf{E} \left[\left| \sum_{n=2}^N \varepsilon_n \phi_n(x) \right|^p \right] \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

On invoque le fait que les constantes de Kahane-Khintchine $K_{p,2}$ sont contrôlées par \sqrt{p} (voir (68)) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\sup_{x \in \mathcal{X}_N} \left| \sum_{n=2}^N \varepsilon_n \phi_n(x) \right| \right] &\lesssim \sqrt{p} \left(\sum_{x \in \mathcal{X}_N} \mathbf{E} \left[\left| \sum_{n=2}^N \varepsilon_n \phi_n(x) \right|^2 \right]^{p/2} \right)^{1/p} \\ &\lesssim \sqrt{p} \text{Card}(\mathcal{X}_N)^{1/p} \sup_{x \in \mathcal{X}_N} \left(\sum_{n=2}^N |\phi_n(x)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En optimisant en $p \sim \ln(\text{Card}(\mathcal{X}_N))$ et en invoquant que $\text{Card}(\mathcal{X}_N)$ est polynomialement borné en N , ce qui précède devient

$$\mathbf{E} \left[\sup_{x \in \mathcal{X}_N} \left| \sum_{n=2}^N \varepsilon_n \phi_n(x) \right| \right] \lesssim \sqrt{\ln(N)} \left(\sum_{n=2}^N \|\phi_n\|_{L^\infty(X)}^2 \right)^{1/2}.$$

On peut alors s'inspirer d'un argument classique de décomposition à très hautes fréquences (déjà présent dans [Kah68]) : à l'aide de l'inégalité précédente et de l'hypothèse (92), on peut montrer que l'on a

$$\mathbf{E} \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{2^{2^k} \leq n < 2^{2^{k+1}}} \varepsilon_n \phi_n \right\|_{L^\infty(X)} \right] < +\infty.$$

Sans rentrer dans les détails, ce type d'inégalité permet de démontrer la convergence presque sûre de la série aléatoire $\sum \varepsilon_n \phi_n$ dans $L^\infty(X)$.

Remarquons qu'il existe des preuves du théorème de Paley-Zygmund $L^\infty(\mathbb{T})$ par des arguments de grandes déviations. Cela est caché dans la perte logarithmique $\sqrt{\ln(N)}$ qui est caractéristique des majorations sous-gaussiennes (voir [LQ04, page 32]).

4.6. Théorèmes de Paley-Zygmund multidimensionnels pour Δ

4.6.1. Cas L^p , avec $p \in [1, +\infty[$, et convergence ponctuelle. — Dans le cas du tore \mathbb{T} , il y a un lien entre convergence dans $L^p(\mathbb{T})$ et convergence ponctuelle au sens probabiliste. En effet, rappelons le résultat suivant qui se déduit des méthodes présentes dans le livre [Kah68] et généralise aussi le théorème de Paley-Zygmund $L^p(\mathbb{T})$.

Théorème 4.6.1. — [Kah68, page 46] *Considérons une distribution f sur \mathbb{T} et soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ sa série de Fourier. Fixons de plus un réel $p \in [1, +\infty[$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) *la série de Fourier aléatoire $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n a_n e^{inx}$ représente presque sûrement une fonction de $L^p(\mathbb{T})$,*
- ii) *la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$ est convergente,*
- iii) *avec probabilité 1, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n a_n e^{inx}$ converge pour presque tout $x \in \mathbb{T}$.*

Rappelons que le théorème 4.1.4 de Burq et Lebeau donne déjà une généralisation du théorème de Paley-Zygmund $L^p(\mathbb{T})$ sur toute variété riemannienne compacte sans bord. Il s'avère que la preuve de notre forme multidimensionnelle du théorème de Maurey (théorème 4.2.1), combinée aux estimations de la fonction spectrale d'une variété riemannienne compacte de Hörmander (déjà présentes dans [BL13]), nous permet de généraliser le théorème 4.6.1.

Pour énoncer notre résultat, fixons quelques notations : on note X une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $d \geq 2$, on note E_n le sous-espace des fonctions spectralement localisées dans $[\alpha n, \alpha n + \alpha)$ (où $\alpha > 0$ vient du corollaire 2.1.7) :

$$(93) \quad E_n := \{f \in L^2(X), \quad \text{Sp}(f) \subset [\alpha n, \alpha n + \alpha)\}.$$

Ainsi, $d_n := \dim(E_n)$ est un nombre strictement positif qui se comporte comme n^{d-1} quand $n \rightarrow +\infty$. Notons alors $(\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,d_n})$ une base hilbertienne de E_n .

On fixe maintenant une distribution sur X de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ avec $f_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que cela signifie que la suite $(\|f_n\|_{L^2(X)})_{n \in \mathbb{N}}$ est à croissance polynomiale en n . On choisit d'introduire

un aléa dans la distribution $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ de la façon suivante :

$$(94) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) f_n^\omega \quad \text{avec} \quad f_n^\omega := \sum_{i=1}^{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} W_{n,i,j}(\omega) \langle f_n, \phi_{n,j} \rangle \phi_{n,i},$$

où $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire et $W_n : \Omega \rightarrow U_{d_n}(\mathbb{C})$ est une matrice aléatoire suivant une loi uniforme dans le groupe compact $U_{d_n}(\mathbb{C})$. On suppose de plus que toutes les variables aléatoires considérées sont indépendantes dans leur ensemble. En fait ce type de randomisation est précisément celui considéré par Burq et Lebeau après interprétation de leurs mesures comme des lois de séries aléatoires multidimensionnelles (voir (75)). Le théorème 4.2.1 permet de considérer des matrices aléatoires plus générales mais la notation $X_n(\omega) f_n^\omega$ nous paraît bien plus simple et claire. Dans le cadre riemannien, le théorème 4.6.1 prend la forme suivante.

Théorème 4.6.2. — [7, Theorem 2.3] *Avec les notations précédentes, on suppose de plus*

- *que les variables aléatoires X_n vérifient pour un réel $p \in [1, +\infty)$ les conditions*

$$0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|] \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^{\max(2,p)}] < +\infty,$$

- *que ν est une mesure borélienne de probabilité sur X .*

Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- la série $\sum \|f_n\|_{L^2(X)}^2$ converge, c'est-à-dire que $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ appartient à $L^2(X)$,*
- la série aléatoire $\sum X_n(\omega) f_n^\omega$ converge presque sûrement dans $L^p(X, \nu)$,*
- il existe $x \in X$ tel que la série aléatoire $\sum X_n(\omega) f_n^\omega(x)$ converge presque sûrement dans \mathbb{C} .*

On peut aussi ajouter l'assertion suivante

- pour tout $x \in X$, la série aléatoire $\sum X_n(\omega) f_n^\omega(x)$ converge presque sûrement dans \mathbb{C} .*

Faisons quelques commentaires à propos du théorème 4.6.2 :

- dans le cas où la mesure ν est proportionnelle au volume riemannien de X , on obtient un éclairage du théorème de Paley-Zygmund $L^p(X)$ dû à Burq et Lebeau (voir le théorème 4.1.4).
- dans la partie 4.3, nous avons expliqué comment les résultats de randomisation peuvent être universels, c'est-à-dire invariants par changement de lois. Le théorème 4.6.2 montre un autre type d'universalité, à savoir une universalité spatiale. En effet, pour toute paire (ν_1, ν_2) de mesures boréliennes de probabilité sur X , on a l'équivalence

$$\begin{aligned} & \sum X_n(\omega) f_n^\omega \quad \text{converge p.s. dans } L^1(X, \nu_1) \\ \Leftrightarrow & \sum X_n(\omega) f_n^\omega \quad \text{converge p.s. dans } L^1(X, \nu_2). \end{aligned}$$

Se rappelant que E_n , défini en (93), est invariant par isométrie de X , l'équivalence précédente n'est pas surprenante si ν_2 est une mesure image isométrique de ν_1 . Il est donc plus intéressant d'examiner le cas où ν_1 et ν_2 sont deux mesures étrangères et si le groupe des isométries de X est très petit ou inaccessible.

- la condition *iii)* est très faible car elle ne porte que sur un seul point $x \in X$. Remarquons maintenant qu'une simple application du théorème de Fubini-Tonelli sur l'espace produit $X \times \Omega$ montre que *iv)* et *iii)* sont équivalentes à

“avec probabilité 1, pour presque tout $x \in X$, la série aléatoire $\sum X_n(\omega) f_n^\omega(x)$ converge dans \mathbb{C} ”.

Ainsi, on retrouve la dernière assertion du théorème 4.6.1.

4.6.2. Quelques idées de preuve. — Comme annoncé après l'énoncé du théorème 4.6.1, la preuve du théorème 4.6.2 est une application assez directe non pas du théorème 4.2.1 mais plutôt de sa preuve. En fait, le théorème de Maurey (théorème 4.1.3) prend la forme multidimensionnelle suivante :

Théorème 4.6.3. — *Considérons (X, ν) un espace mesuré σ -fini, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement positifs, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices telles que $b_n \in \mathcal{M}_{d_n}(L^p(X, \nu))$ pour un réel $p \in [1, +\infty)$, et une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes satisfaisant :*

$$0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|] \quad \text{and} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^{\max(2,p)}] < +\infty.$$

alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) la fonction $x \mapsto \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} |b_{n,i,j}(x)|^2$ appartient à $L^{\frac{p}{2}}(X, \nu)$,

b) la série aléatoire $\sum X_n(\omega) \sqrt{d_n} \mathbf{tr}(W_n(\omega) b_n)$ converge presque sûrement dans $L^p(X, \nu)$.

Finalement, sous la seule hypothèse $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^{\max(2,p)}] < +\infty$, alors l'implication a) \Rightarrow b) est vraie.

Démonstration. — Il s'agit de [6, Théorème 2.1] avec la matrice aléatoire $M_n = X_n W_n$. Finalement, la dernière phrase découle de [6, Corollaire 2.14]. \square

Il s'agit d'appliquer le théorème précédent à la matrice b_n définie par $b_{n,i,j}(x) = \frac{1}{\sqrt{d_n}} \langle f_n, \phi_{n,j} \rangle \phi_{n,i}(x)$ pour tout $x \in X$. Ainsi, on a $X_n(\omega) \sqrt{d_n} \mathbf{tr}(W_n(\omega) b_n) = X_n(\omega) f_n^\omega$ d'après (94). Si l'on travaille maintenant sur X muni de la mesure ν ou d'une masse de Dirac δ_x , alors on est amené à étudier la convergence de la série

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} |b_{n,i,j}(x)|^2 &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=1}^{d_n} |\langle f_n, \phi_{n,j} \rangle|^2 \right) \frac{|\phi_{n,1}(x)|^2 + \dots + |\phi_{n,d_n}(x)|^2}{d_n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{L^2(X)}^2 \frac{|\phi_{n,1}(x)|^2 + \dots + |\phi_{n,d_n}(x)|^2}{d_n}. \end{aligned}$$

On invoque alors le corollaire 2.1.7 qui assure que la somme de la série précédente est comparable à $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{L^2(X)}^2$. Cela prouve donc le théorème 4.6.2.

4.6.3. Cas L^∞ et BMO , exposant logarithmique critique. — On conserve les notations de la partie précédente concernant le formalisme d'une variété riemannienne compacte X . Ainsi, E_n désignera encore le sous-espace des fonctions spectralement localisées dans $[\alpha n, \alpha n + \alpha)$ par rapport à $\sqrt{-\Delta}$ (voir (93)). Nous avons expliqué dans la partie 4.5.3 quel type d'énoncé on peut espérer dans le cas L^∞ . En particulier, nous avons eu besoin d'une propriété très générale que nous avons appelée la concentration finie (qui finalement repose sur une inégalité de Bernstein). Si l'on adapte l'esquisse de preuve expliquée dans la partie 4.5.4 en remplaçant les inégalités de Kahane-Khintchine par leurs versions multidimensionnelles (72) prouvées par Marcus et Pisier, alors on peut obtenir le résultat suivant.

Théorème 4.6.4. — [7, Theorem 2.1] *Supposons que les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^2] < +\infty$. Considérons une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $f_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et*

$$(95) \quad \exists \gamma > 1 \quad \sum_{n \geq 2} \|f_n\|_{L^2(X)}^2 \ln^\gamma(n) < +\infty.$$

Alors la série aléatoire $\sum X_n(\omega) f_n^\omega$ converge presque sûrement dans $L^\infty(X)$ (où la fonction aléatoire f_n^ω est définie en (94)).

Ainsi, on obtient une généralisation du théorème 4.1.2 (théorème de Paley-Zygmund $L^\infty(\mathbb{T})$). Du fait que la randomisation utilisée dans le théorème précédent est multidimensionnelle (grâce au terme f_n^ω), il s'avère que l'on obtient une amélioration de [Tzv09, Corollary 6]. En fait, on peut dire que la randomisation multidimensionnelle permet de mieux profiter des regroupements des fonctions propres par paquets (ce qui amène à estimer des fonctions spectrales tronquées comme dans le corollaire 2.1.7) alors que la randomisation unidimensionnelle force à majorer les fonctions propres individuellement (on commet alors une perte multiplicative égale à la dimension de E_n).

Dans [Tzv09], Tzvetkov pose la question de l'optimalité de la condition $\gamma > 1$ qui apparaît dans un théorème de Paley-Zygmund L^∞ sur une variété riemannienne compacte de dimension $d \geq 2$ (voir (95)). En dimension $d = 1$, c'est-à-dire sur le tore \mathbb{T} , cette optimalité découle de l'existence d'ensembles très particuliers de fréquences, appelés ensembles de Sidon [PZ, page 350]. Nous n'avons pas réussi à transférer ce type d'argument sur une variété compacte générale de dimension $d \geq 2$. Mais nous pouvons contourner cette difficulté en exploitant une propriété qui ne se produit qu'en dimension $d \geq 2$, à savoir le fait que les dimensions $\dim(E_n) \simeq n^{d-1}$ tendent vers $+\infty$. Cette propriété nous permet de montrer dans [7] que la conclusion du théorème 4.6.4 est fautive dans le cas $\gamma < 1$, ce qui prouve que la condition $\gamma > 1$ est presque optimale.

En ce qui concerne le cas $\gamma = 1$, nous ignorons ce qu'il en est de la convergence L^∞ . Nous pensons qu'il est plausible que la conclusion du théorème 4.6.4 soit encore fautive (c'est-à-dire le même résultat qu'en dimension $d = 1$). Pour y voir un peu plus clair, mentionnons que dans le cas du tore \mathbb{T} , l'article [Sle81] nous apprend que le cas $\gamma = 1$ est intimement lié à la convergence dans $BMO(\mathbb{T})$.

Le théorème 4.6.5 ci-dessous énonce précisément la “presque-optimalité” de la condition $\gamma > 1$ dans L^∞ et l’optimalité de la condition $\gamma \geq 1$ dans BMO . Rappelons que l’espace BMO naît dans l’article [JN61] et est considéré comme un bon substitut à l’espace L^∞ . Sur une variété riemannienne compacte X sans bord, notre référence est l’article [BN95] de Brézis-Nirenberg. Une fonction intégrable $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $BMO(X)$ si la semi-norme suivante est finie

$$(96) \quad \|f\|_{BMO(X)} := \sup_{\substack{0 < \varepsilon < r_0(X) \\ x \in X}} \frac{1}{\text{Vol}(B(x, \varepsilon))} \int_{B(x, \varepsilon)} |f(y) - f_{B(x, \varepsilon)}| dy,$$

où $r_0(X)$ est un nombre appelé rayon d’injectivité de X et où $f_{B(x, \varepsilon)}$ désigne la moyenne de f sur la boule géodésique $B(x, \varepsilon)$. La définition précise du rayon d’injectivité n’est pas vraiment utile car on obtient une semi-norme équivalente en remplaçant $r_0(X)$ par un autre nombre $r \in]0, r_0(X)[$ (voir [BN95, Page 203]). On peut maintenant énoncer le résultat suivant qui explique que $\gamma = 1$ est l’exposant logarithmique critique pour la convergence presque sûre dans $BMO(X)$ ou $L^\infty(X)$.

Théorème 4.6.5. — [7, Theorem 2.2] *Avec les notations précédentes, nous considérons une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $f_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifiant*

$$(97) \quad \sum_{n \geq 2} \|f_n\|_{L^2(X)}^2 \ln(n) < +\infty.$$

Alors, la série aléatoire $\sum f_n^\omega$ converge presque sûrement dans $BMO(X)$.

Réciproquement, dans le cas $\dim(X) \geq 2$, il existe une suite (f_n) vérifiant

$$\forall \gamma \in [0, 1) \quad \sum_{n \geq 2} \|f_n\|_{L^2(X)}^2 \ln^\gamma(n) < +\infty$$

et telle que la série aléatoire $\sum f_n^\omega$ diverge presque sûrement dans $BMO(X)$ (et a fortiori dans $L^\infty(X)$) à cause de l’inégalité triviale $\|\cdot\|_{BMO(X)} \leq 2 \|\cdot\|_{L^\infty(X)}$.

Le théorème précédent peut être comparé à l’injection de Sobolev $H^{d/2}(X) \subset BMO(X)$ (voir [BN95, page 210]).

4.6.4. Preuves à la Littlewood-Paley pour BMO . — Expliquons quelques éléments de preuve du théorème 4.6.5. L’ingrédient principal est la théorie de Littlewood-Paley de $BMO(X)$ décrite par la proposition 4.6.7 ci-après. Pour l’obtenir, nous adaptons une stratégie utilisée par Burq-Gérard-Tzvetkov dans [BGT04] qui permet de transférer une théorie de Littlewood-Paley sur \mathbb{R}^d vers une variété riemannienne compacte sans bord. Pour fixer les idées, considérons une partition dyadique de l’unité $\tilde{\theta} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ au sens de Littlewood-Paley :

$$\forall \lambda \geq 0 \quad \tilde{\theta}(\lambda) + \sum_{j \geq 1} \theta(2^{-2j} \lambda) = 1.$$

L’article [BGT04] a été notre source d’inspiration car il contient la théorie de Littlewood-Paley L^p sur une variété compacte, avec $p \in [2, +\infty[$. Ce dernier résultat s’énonce comme suit.

Proposition 4.6.6. — [BGT04, Corollary 2.3] *Pour tout $p \in [2, +\infty[$ et pour toute distribution f sur la variété riemannienne compacte X sans bord, on a*

$$\|f\|_{L^p(X)}^2 \lesssim \left\| \tilde{\theta}(-\Delta) f \right\|_{L^p(X)}^2 + \sum_{j \geq 1} \left\| \theta(-2^{-2j} \Delta) f \right\|_{L^p(X)}^2.$$

Sur \mathbb{R}^d et si $p \rightarrow +\infty$, il est bien connu que l’on ne retrouve pas du tout le cas L^∞ mais plutôt BMO (de façon précise, c’est sa version inhomogène usuellement notée bmo qui intervient). Cela est formalisé rigoureusement par un résultat de Triebel sur \mathbb{R}^d (voir [Tri83, page 93, Theorem 2]). La stratégie de la preuve de la proposition 4.6.6 est réutilisable et nous permet de montrer le résultat suivant

Proposition 4.6.7. — [7, Theorem 9.1] *Fixons une fonction lisse $\sigma \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. Pour toute distribution f sur la variété riemannienne compacte X , on a*

$$(98) \quad \sup_{0 < h \leq 1} \left\| \sigma(-h^2 \Delta) f \right\|_{L^\infty(X)}^2 \lesssim \|f\|_{BMO(X)}^2 \lesssim \left\| \tilde{\theta}(-\Delta) f \right\|_{L^\infty(X)}^2 + \sum_{j \geq 1} \left\| \theta(-2^{-2j} \Delta) f \right\|_{L^\infty(X)}^2.$$

Faisons deux remarques sur l’énoncé précédent relatives à la condition $\sigma(0) = 0$:

- l'énoncé serait faux si le support de σ n'évitait pas 0 puisqu'il aurait impliqué la fausse estimation $\|f\|_{BMO(X)} \simeq \|f\|_{L^\infty(X)}$. Par contre, l'énoncé précédent dit qu'une telle inégalité est vraie si f est spectralement localisée entre deux hautes fréquences dyadiques.
- rappelons que la semi-norme $BMO(X)$ s'annule sur les fonctions constantes (voir (96)). Cela est bien cohérent avec l'égalité $\sigma(0) = 0$ (c'est-à-dire $\sigma(-h^2\Delta)1 = 0$) et la minoration de (98).

L'utilisation d'opérateurs $\Psi(-\Delta)$ obtenus par calcul fonctionnel \mathcal{C}_c^∞ est plus maniable en pratique car elle ouvre l'accès à la formule de Helffer-Sjöstrand (40). Mais une fois les résultats voulus obtenus, on peut plus ou moins facilement se ramener au cas où Ψ est de la forme $\mathbf{1}_{[a,b]}$. On peut en effet prouver le résultat suivant :

Corollaire 4.6.8. — [7, Proposition 10.1 and Lemma 11.1] *Considérons une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de $L^2(X)$, avec $f_n \in E_n$ pour tout $n \geq 1$ (voir (93)). Alors on a*

$$(99) \quad \|f_n\|_{L^\infty(X)} \simeq \|f_n\|_{BMO(X)} \quad \text{et} \quad \left\| \sum_{n \geq 1} f_n \right\|_{BMO(X)}^2 \lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} f_n \right\|_{L^\infty(X)}^2.$$

C'est ce dernier corollaire qui permet d'attaquer la preuve du théorème 4.6.5 :

- 1) la première partie du théorème 4.6.5 utilise la majoration de (99) et une estimation de la forme

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{E} \left[\left\| \sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} f_n^\omega \right\|_{L^\infty(X)}^2 \right] \lesssim \sum_{n \geq 2} \|f_n\|_{L^2(X)}^2 \ln(n).$$

l'estimation de chaque terme nécessite d'exploiter la propriété de concentration finie (voir le théorème 4.5.8 et la partie 4.5.4);

- 2) pour la seconde partie du théorème 4.6.5, on doit exploiter la première partie de (99) et l'argument additionnel de travailler en dimension $d \geq 2$. Cela permet d'utiliser un résultat dû à Burq-Lebeau affirmant que l'on a $\mathbf{E}[\|f_n^\omega\|_{L^\infty(X)}] \simeq \sqrt{\ln(n)} \|f_n\|_{L^2(X)}$ (voir [BL13, Théorème 5, page 930]).

4.7. Équation des ondes en régime sur-critique et conditions initiales aléatoires

Nous avons déjà évoqué la motivation du gain d'intégrabilité pour construire des solutions d'EDP en régime surcritique (voir notamment le séminaire Bourbaki [dB14]). Nous expliquons ici l'intérêt de considérer des méthodes de randomisation très générales. De façon précise, on se propose d'étudier l'équation cubique des ondes défocalisante sur une variété compacte sans bord X de dimension 3 :

$$(\partial_t^2 - \Delta)v + v^3 = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times X.$$

Cette équation est $\frac{1}{2}$ -critique en dimension 3 et il est donc intéressant de construire des solutions dans $H^s(X) \times H^{s-1}(X)$ pour $s \in]0, \frac{1}{2}[$. En fait, l'équation est localement mal posée dans $H^s \times H^{s-1}$ avec $s \in]0, \frac{1}{2}[$ et localement bien posé pour $s \geq \frac{1}{2}$ (voir [BT08a]). D'un point de vue probabiliste, l'équation précédente a été étudiée sur le tore $X = \mathbb{T}^3$ dans [BT14] puis pour la sphère $X = \mathbb{S}^3$ dans [dS14]. L'analyse des deux précédents papiers repose sur une propriété assez miraculeuse de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les deux variétés \mathbb{T}^d et \mathbb{S}^d : à savoir qu'il admet une base hilbertienne $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions propres uniformément bornée dans chaque espace $L^p(X)$ avec $p < +\infty$. Cette propriété de bornitude est évidemment triviale sur \mathbb{T}^d grâce aux fonctions trigonométriques mais n'est pas du tout évidente sur la sphère \mathbb{S}^d (voir une preuve probabiliste dans [BL13, dS14] par des arguments de grandes déviations). Sur une variété riemannienne compacte sans bord, une telle propriété est inconnue à notre connaissance. Mentionnons qu'une fois ce type de base hilbertienne obtenue, notée $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors l'approche de Burq et Tzvetkov [BT08a, BT08b, BT14] introduit des *conditions initiales aléatoires* de la forme

$$(100) \quad v_0^\omega := \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) c_n \phi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad c_n \in \mathbb{R},$$

et de même pour la condition initiale aléatoire de la dérivée (que nous passons sous silence pour le moment). Pour atteindre le régime surcritique, le point important à vérifier et que, sous des conditions à préciser sur la suite des coefficients (c_n) , la condition initiale aléatoire v_0^ω est bien à valeurs dans $H^s(X)$ (et évite $H^{s+\varepsilon}(X)$ pour tout $\varepsilon > 0$). En fait, Burq et Tzvetkov montrent dans [BT08a, Lemma B.1] que sous l'hypothèse probabiliste assez faible

$$(101) \quad \exists C > 0 \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(|X_n| \geq C) > 0,$$

on a l'équivalence entre les deux assertions suivantes pour tout $s \in \mathbb{R}$:

- i) $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \phi_n \in H^s(X)$,
- ii) presque sûrement, $v_0^\omega \in H^s(X)$.

Revenons à l'obstacle de l'existence de bases hilbertiennes de modes propres uniformément bornées dans tout $L^p(X)$. En rédigeant ce mémoire, nous nous sommes rendu compte que nous pourrions très certainement contourner cet obstacle en faisant appel au théorème 2.1.8. Dans [7], nous proposons un autre point de vue qui est à rapprocher de l'article [BL13] et de la discussion tenue dans la partie 4.3. La condition initiale aléatoire (100) fait manifestement intervenir une série aléatoire unidimensionnelle. Pour atteindre toutes les variétés riemanniennes compactes sans bord, on se propose d'utiliser les séries aléatoires multidimensionnelles intervenant dans nos théorèmes de Paley-Zygmund (théorèmes 4.6.2 et 4.6.4).

Redéfinissons donc nos nouvelles conditions initiales aléatoires. Ainsi, E_n est le sous-espace des fonctions spectralement localisées dans $[\alpha n, \alpha n + \alpha]$ (pour un certain paramètre $\alpha > 0$ suffisamment grand fixé à l'avance). Pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $(v_0, v_1) \in H^s(X) \times H^{s-1}(X)$, nous décomposons $v_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_{0,n}$ et $v_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_{1,n}$ selon la somme directe orthogonale $L^2(X) = \oplus E_n$ et nous définissons

$$\forall \omega \in \Omega \quad v_0^\omega := \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) v_{0,n}^\omega \quad \text{et} \quad v_1^\omega := \sum_{n \in \mathbb{N}} X'_n(\omega) v_{1,n}^\omega.$$

Comme précédemment, $v_{0,n}^\omega$ et $v_{1,n}^\omega$ sont définis en (94). On suppose que toutes les variables aléatoires en jeu sont indépendantes. Comme dans le cas unidimensionnel, on doit vérifier que v_0^ω et v_1^ω ont presque sûrement la même régularité que v_0 et v_1 . C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.7.1. — [7, Proposition 3.1] *Sous les hypothèses*

$$(102) \quad 0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|] \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^2] < +\infty,$$

les deux assertions suivantes sont équivalentes

- i) v_0 appartient à $H^s(X)$,
- ii) v_0^ω appartient presque sûrement à $H^s(X)$.

On peut alors adapter l'argument de [BT14] pour obtenir le résultat suivant

Théorème 4.7.2. — [7, Theorem 3.2] *Supposons $\dim(X) = 3$ et fixons $s \in (0, \frac{1}{2})$ ainsi que deux suites de variables aléatoires indépendantes X_n et X'_n vérifiant*

$$(103) \quad 0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|], \quad 0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X'_n|], \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^3 + |X'_n|^3] < +\infty.$$

Pour tout $(v_0, v_1) \in H^s(X) \times H^{s-1}(X)$, la fonction aléatoire (v_0^ω, v_1^ω) appartient presque sûrement à $H^s(X) \times H^{s-1}(X)$ et l'équation cubique des ondes

$$(\partial_t^2 - \Delta)v + v^3 = 0, \quad v(0, \cdot) = v_0^\omega, \quad \dot{v}(0, \cdot) = v_1^\omega,$$

admet une unique solution globale v vérifiant

$$v(t) - \cos(t\sqrt{-\Delta})v_0^\omega - \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}v_1^\omega \in \mathcal{C}_t^0(\mathbb{R}, H^1(X)) \cap \mathcal{C}_t^1(\mathbb{R}, L^2(X)).$$

L'unicité de v découle du fait que la construction repose sur un argument de point fixe. L'argumentation de [BT14] contient deux idées :

- un résultat d'existence locale reposant sur l'injection de Sobolev $H^1(X) \subset L^6(X)$,
- se ramenant à $H^1(X)$, on exploite la conservation de l'énergie pour globaliser la solution.

Mentionnons que nous ne modifions pas cette stratégie non-linéaire et que notre modeste apport est seulement de mettre en évidence que l'on peut s'émanciper de la géométrie de la variété sous-jacente grâce à des séries aléatoires multidimensionnelles.

Finissons cette partie par une comparaison entre les hypothèses (101) et (102). La seconde hypothèse est plus familière des travaux sur les séries aléatoires (voir [MP81] ou [LQ04, Théorème III.4, page 125]) mais il se trouve qu'il n'y a essentiellement aucune différence mathématique à supposer l'une ou l'autre. Remarquons déjà que l'hypothèse $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^2] < +\infty$ apparaît implicitement dans les travaux

de Burq-Tzvetkov car impliquée par des hypothèses bien plus fortes de grandes déviations. Ensuite, une inégalité attribuée à Paley et Zygmund énonce que l'on a

$$\mathbf{P}\left(|X_n| \geq \frac{1}{2}\mathbf{E}[|X_n|]\right) \geq \frac{\mathbf{E}[|X_n|]^2}{4\mathbf{E}[|X_n|^2]}.$$

On en déduit facilement l'équivalence

$$0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|] \quad \text{and} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^2] < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (101) \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|^2] < +\infty.$$

4.8. Théorèmes de Paley-Zygmund multidimensionnels pour $-\Delta + |x|^{2\alpha}$

4.8.1. Oscillateur harmonique. — Nous présentons quelques résultats obtenus dans [6, 7, 8]. Dans le cas des variétés riemanniennes compactes sans bord, le point crucial est l'étude asymptotique de la fonction spectrale associée au sous-espace des fonctions spectralement localisées dans $[\alpha n, \alpha n + \alpha]$ si $n \rightarrow +\infty$. D'après un résultat de Hörmander, cette fonction spectrale est essentiellement constante (voir le corollaire 2.1.7).

Pour l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$ sur \mathbb{R}^d , avec $d \geq 2$, la suite naturelle de sous-espaces est celle des sous-espaces propres $E_{d,n}$ de $-\Delta + |x|^2$ associés au spectre $d+2\mathbb{N}$ (voir la partie 2.2.1). En notant $e_{d,n}$ la fonction spectrale de $E_{d,n}$, la proposition 2.2.1 nous apprend que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, la suite $(e_{d,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ se comporte comme $n^{\frac{d}{2}-1}$ sur une boule épointée $B(0, C\sqrt{n}) \setminus \{0\}$ et est exponentiellement négligeable à l'extérieur de cette boule. Cela nous permet d'obtenir un analogue du théorème 4.6.2.

Théorème 4.8.1. — [7, Theorem 4.1] *Supposons $d \geq 2$ et considérons*

- une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $f_n \in E_{d,n}$,
- un nombre réel $p \in [1, +\infty)$,
- une mesure borélienne ν de probabilité sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Alors, les assertions suivantes sont équivalentes

- i) la série $\sum \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 n^{-\frac{d}{2}}$ converge (ce qui signifie que $\sum f_n$ appartient à l'espace de Sobolev $\mathcal{H}_1^{-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$, voir (24)),
- ii) la série aléatoire $\sum f_n^\omega$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d, \nu)$ (où f_n^ω est défini comme dans (94)),
- iii) il existe $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que la série aléatoire $\sum f_n^\omega(x)$ converge presque sûrement dans \mathbb{C}

On peut aussi renforcer le théorème précédent comme le théorème 4.6.2 : remplacer f_n^ω par $X_n(\omega)f_n^\omega$ ou considérer tout $x \in \mathbb{R}^d$ dans iii).

On notera que le point ii) du théorème précédent interdit le cas intéressant où ν est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . En fait, nous avons le résultat suivant qui tranche avec le théorème 4.6.2 :

Proposition 4.8.2. — [7, Proposition 4.2] *Il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $f_n \in E_{d,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant les assertions i), ii) et iii) du théorème 4.8.1 mais telle que la série aléatoire $\sum f_n^\omega$ diverge presque sûrement dans chaque $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty)$.*

Puisque nous disposons d'une inégalité à deux sens pour $e_{d,n}(x)$ grâce à la proposition 2.2.1, nous pouvons utiliser notre forme multidimensionnelle du théorème de Maurey afin de décrire complètement les séries aléatoires qui convergent presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ à p fixé.

Théorème 4.8.3. — [6, Théorème 1.4] *Supposons $d \geq 2$ et considérons une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $f_n \in E_{d,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $p \in [1, +\infty[$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) la série aléatoire $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^\omega$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$,
- ii) la série numérique $\sum_{k \geq 1} k^{\frac{d}{2}-1} \left(\sum_{n \geq k} \frac{\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}{n^{\frac{d}{2}}} \right)^{\frac{p}{2}}$ est convergente.

Par conséquent, pour tout $p \in [2, +\infty[$ on a l'injection de Sobolev probabiliste

$$(104) \quad \sum_{n \geq 1} n^{-d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^\omega \text{ converge p.s. dans } L^p(\mathbb{R}^d).$$

En fait, nous avons déjà obtenu une forme plus faible de l'implication (104) dans [8, Theorem 2.2].

Il est temps à présent de comparer les injections de Sobolev et leurs améliorations probabilistes. Rappelons que toute distribution tempérée f sur \mathbb{R}^d se décompose sous la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n(f)$ avec $\Pi_n(f) \in E_{d,n}$. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, le théorème 4.8.3 amène à identifier l'espace abstrait $\mathbf{PL}^p(X, \oplus E_{d,n})$ (voir la définition 4.4.1) au sous-espace des distributions tempérées f vérifiant

$$(105) \quad \|\Pi_0(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left[\sum_{k \geq 1} k^{\frac{d}{2}-1} \left(\sum_{n \geq k} \frac{\|\Pi_n(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}{n^{\frac{d}{2}}} \right)^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

Par exemple, dans le cas le plus simple, l'implication (104) donne une inclusion de type Paley-Zygmund :

$$\forall p \in [2, +\infty[\quad L^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d, \oplus E_{d,n}),$$

ou ce qui revient au même

$$f \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \Rightarrow \quad \forall p \in [2, +\infty[\quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n(f)^\omega \text{ converge p.s. dans } L^p(\mathbb{R}^d).$$

Dans la partie suivante, le corollaire 4.8.6 montre que l'on peut aussi englober le cas $p = +\infty$ dans l'implication précédente.

Rappelons que les espaces de Sobolev $\mathcal{H}_1^s(\mathbb{R}^d)$ associés à $-\Delta + |x|^2$ sont définis en (24). La condition (105) implique déjà quelques faits non intuitifs :

- pour tout $p \in [1, +\infty[$ on a l'inclusion $\mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d, \oplus E_{d,n}) \subset \mathcal{H}_1^{-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ (voir la caractérisation spectrale (25) des espaces de Sobolev). Cela signifie qu'il faut un minimum de régularité pour espérer arriver presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.
- pour tous réels $p_1 < p_2$ de $[1, +\infty[$ on a l'inclusion stricte $\mathbf{PL}^{p_1}(\mathbb{R}^d, \oplus E_{d,n}) \subset \mathbf{PL}^{p_2}(\mathbb{R}^d, \oplus E_{d,n})$. Cela contraste fortement avec le fait que $L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas inclus dans $L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$.

Enfin, les injections de Sobolev probabilistes de l'oscillateur harmonique multidimensionnel s'énoncent comme suit.

Théorème 4.8.4. — [6, Théorème 4.4] *Supposons $d \geq 2$. Pour tout réel $p \in]2, +\infty[$, on note $q = \frac{p}{p-1} \in]1, 2[$. Nous avons les inclusions*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{-d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}(\mathbb{R}^d) &\subset \mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d, \oplus E_{d,n}) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_1^{-d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) - \varepsilon}(\mathbb{R}^d), \\ \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_1^{d(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}) + \varepsilon}(\mathbb{R}^d) &\subset \mathbf{PL}^q(\mathbb{R}^d, \oplus E_{d,n}) \subset \mathcal{H}_1^{d(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})}(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

D'après (24), dans le cas $p \in]2, +\infty[$, les injections de Sobolev déterministes s'écrivent :

$$\mathcal{H}^{d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d).$$

En autorisant un aléa pour arriver dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, l'injection de Sobolev probabiliste $\mathcal{H}^{-d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{PL}^p(\mathbb{R}^d, \oplus E_{d,n})$ assure donc presque sûrement un gain de $2d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)$ dérivées.

4.8.2. Oscillateur superquadratique $-\Delta + |x|^{2\alpha}$. — Pour tout entier $\alpha \geq 2$, nous avons expliqué dans la partie 2.3.1 que le sous-espace naturel E_n à examiner est le sous-espace des fonctions spectralement localisées dans $[\kappa n^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \kappa(n+1)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}[$ avec $\kappa \gg 1$ fixé à l'avance (voir (21)). D'un point de vue technique, la différence fondamentale entre l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$ et l'opérateur $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ avec $\alpha \geq 2$ est un aveu de faiblesse. En effet, nous ne connaissons pas de minoration adéquate et ponctuelle de la fonction spectrale e_n de E_n . Par conséquent, les majorations connues (voir la proposition 2.3.1 ou [RT15]) permettent seulement de donner des conditions suffisantes de convergence presque sûre. Autrement dit, les résultats sont à sens unique.

Commençons par un théorème de Paley-Zygmund L^∞ pour lequel nous avons obtenu une version plus faible dans [8, Theorem 2.6] pour l'oscillateur harmonique.

Théorème 4.8.5. — [7, Theorem 4.3] *Supposons $d \geq 2$ et considérons une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $f_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et*

$$(106) \quad \exists \gamma > 1 \quad \sum_{n \geq 2} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 n^{-\frac{d}{\alpha+1}} \ln^\gamma(n) < +\infty.$$

Alors la série aléatoire $\sum f_n^\omega$ converge presque sûrement dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Le schéma de preuve du théorème précédent est assez similaire à celui du théorème 4.6.4 :

- la randomisation multidimensionnelle f_n^ω est gérée grâce aux inégalités de Kahane-Khintchine-Marcus-Pisier (72),
- comme expliqué dans les parties 4.5.3 et 4.5.4, nous avons besoin de la propriété de concentration finie (voir le théorème 4.5.8). Cette dernière est obtenue grâce à l'inégalité de Bernstein (35) et le fait qu'une fonction *spectralement* localisée dans $[0, N]$ (par rapport à $-\Delta + |x|^{2\alpha}$) est essentiellement *spatialement* localisée dans une boule $B(0, CN^{\frac{1}{2\alpha}})$ (modulo un reste sous-exponentiel).
- la principale différence avec le théorème 4.6.4 est que nous avons besoin d'une majoration globale de la fonction spectrale e_n de E_n qui précise la proposition 2.3.1. En l'occurrence, grâce à [RT15], on a $\|e_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim n^{\frac{\alpha d}{\alpha+1}-1}$. Cette dernière estimation est optimale comme nous l'avons expliqué plus haut (voir (27)).

En exploitant la fin de l'énoncé du théorème 4.6.3, nous pourrions aussi obtenir des conditions suffisantes de convergence (ponctuelle ou L^p) presque sûre analogues à celle de l'oscillateur harmonique (ce sont nos résultats [7, Theorem 4.5 and 4.6]).

Nous préférons finir cette partie en présentant une conséquence du théorème 4.8.5 qui diffère du cas des variétés compactes. En randomisant une fonction L^2 sur une variété compacte, les théorèmes de Paley-Zygmund 4.1.1, 4.1.4, 4.6.1 et 4.6.2 nous permettent d'atteindre presque sûrement chaque espace L^p avec $p < +\infty$. Mais L^∞ est presque sûrement hors d'atteinte comme le montre la seconde assertion du théorème 4.6.5. Il est donc intéressant de constater que le théorème 4.8.5 implique un fort effet *hypercontractif* de la randomisation multidimensionnelle de l'opérateur superquadratique $-\Delta + |x|^{2\alpha}$.

Corollaire 4.8.6. — [7, Corollary 4.4] *Supposons $d \geq 2$ et considérons une fonction $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ appartenant à $L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $f_n \in E_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Alors la série aléatoire $\sum f_n^\omega$ converge presque sûrement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [2, +\infty) \cup \{+\infty\}$.*

Démonstration. — Avec probabilité 1, la série $\sum f_n^\omega$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ car les fonctions f_n^ω sont orthogonales et vérifient $\|f_n^\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ (voir (94)). La convergence dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ découle immédiatement de (106). Nous concluons par interpolation. \square

CHAPITRE 5

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

• Nous avons étudié dans deux champs distincts la possibilité de transférer des résultats sur des tores (utilisant l'analyse harmonique sous-jacente) vers des variétés riemanniennes compactes sans bord. Les outils additionnels employés furent les suivants :

- i) exploitation de la loi de Weyl en vue de séparer des valeurs propres par paquets ou de compter le nombre de valeurs propres sur une fenêtre spectrale suffisamment grande.
- ii) exploitation des estimations optimales de la fonction spectrale (résultat de [Hör68]).
- iii) utilisation du calcul fonctionnel semi-classique des opérateurs de Laplace-Beltrami.
- iv) transfert des décompositions de Littlewood-Paley de \mathbb{R}^d vers une variété compacte (méthode issue de [BGT04]).

• Expliquons à présent quelques axes qui prolongent l'étude des équations de Klein-Gordon semi-linéaires

$$(\partial_t^2 - \Delta + V + m^2)w = w^{n+1}, \quad (x, t) \in X \times \mathbb{R}, \quad m > 0, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

définies sur une variété riemannienne X et où $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ est un potentiel de sorte que $-\Delta + V$ soit à spectre discret.

- i) on pourrait continuer à étudier des modèles considérés difficiles d'un point de vue spectral comme des tores algébriques $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\sqrt[3]{7}\mathbb{Z}$ ou des oscillateurs harmoniques $-\Delta + Q(x)$ où Q est une forme quadratique définie positive explicite. En effet, notre article [1] ouvre une brèche pour attaquer des spectres algébriques. Bien que le théorème de Schmidt (1970) que nous avons utilisé soit inapplicable, il devrait avoir des variantes plus sophistiquées. En outre, comme expliqué dans l'introduction, c'est l'absence de dérivées qui joue un rôle dans la méthode de forme normale partielle. Cet obstacle a été récemment contourné dans une situation spectrale favorable, à savoir celle du tore unidimensionnel [FHZ17] où l'existence presque globale est obtenue. On peut donc espérer que les non-linéarités utilisées dans [FHZ17] soient réutilisables dans le cadre de la méthode de forme normale partielle.
- ii) pourtant, il faut être lucide que c'est vers le dépassement du seuil ε^{-2n} qu'il faut dépenser des efforts. Cela nécessiterait un nouveau pas technique, à savoir l'itération d'une forme normale dans un cas spectral très défavorable (contrairement aux sphères et variété de Zoll). L'article [2] (voir le théorème 3.6.1) présente un exemple naturel pour lequel nous avons obtenu une réponse partielle. Ces résultats devraient être améliorables par une méthode de séparation de valeurs propres par paquets. Une telle généralisation n'est pas purement technique. Elle nécessiterait de développer un calcul paradifferential adapté à l'oscillateur $-\partial_x^2 + x^{2\alpha}$.
- iii) en prolongement du point précédent, il existe un point qui n'est toujours pas compris, à savoir l'influence de la décomposition spectrale de l'espace de Hilbert $L^2(X)$ sur la méthode de forme normale partielle. En effet, nous avons focalisé notre attention dans ce mémoire sur le principal obstacle, à savoir la faible séparation asymptotique des valeurs propres. Pourtant, sur une variété aussi simple que le tore \mathbb{T}^d , les articles [FZ10, Del09] donnent des résultats différents. La différence réside dans un choix subtil d'une ou plusieurs décompositions spectrales de $L^2(\mathbb{T}^d)$. Suivant les méthodes de [BL13, PRT15], on peut ainsi faire un crochet vers des idées probabilistes. Par exemple, pour l'oscillateur harmonique $-\Delta + |x|^2$, on sait construire des bases hilbertiennes de fonctions propres ayant des normes L^p optimales (ou presque optimales dans le cas L^∞). Ces bases peuvent jouer un rôle pour dépasser le seuil ε^{-2n} par exemple en dimension d'espace $d = 2$.

- Au niveau non linéaire, nous espérons exploiter les méthodes générales de randomisation de [6, 7] comme des conditions initiales aléatoires. Nous l'avons fait dans le cas de l'équation cubique des ondes en dimension 3 pour construire des solutions globales. Pour autant, nous aimerions appliquer ces idées pour obtenir des résultats dynamiques plus probants pour des modèles multidimensionnels, par exemple pour étudier la quasi-invariance de certaines mesures (comme initié dans [Tzv15]).

- Nous aimerions approfondir un problème qui apparaît naturel à la lumière des travaux de Tzvetkov [Tzv09], Burq-Lebeau [BL13] et [7] (précisément nos théorèmes 4.6.4 et 4.6.5), à savoir celui de déterminer toutes les fonctions $f \in L^2(X)$ d'une variété riemannienne compacte X telles que la fonction aléatoire $\omega \mapsto f^\omega$ soit continue. Autrement dit, il s'agirait d'étendre les résultats connus sur les groupes (voir le livre [MP81]) vers la variété X . Ce problème semble a priori délicat car les fonctions propres de X ne sont pas aussi rigides que celles d'un groupe (notamment vis-à-vis du produit de fonctions). Il n'est pas déraisonnable de commencer d'abord dans le cas où la fonction randomisée f^ω est gaussienne. Et si les choses se passent comme dans le cas des tores ou des groupes, on peut effectuer le pari (peut-être optimiste) qu'il y ait une universalité probabiliste permettant de passer du cas gaussien à d'autres méthodes de randomisation.

- Dans une voie plus abordable que la précédente, nous aimerions reprendre la question de Tzvetkov [Tzv09] concernant l'optimalité de la condition $\gamma > 1$ dans un théorème de Paley-Zygmund. Sur une variété riemannienne compacte, nous avons donné une réponse essentiellement complète dans le cas BMO . Il est naturel d'espérer un phénomène similaire pour le théorème 4.8.5 ayant trait à l'oscillateur $-\Delta + |x|^{2\alpha}$. L'obstacle est que l'usuel espace $BMO(\mathbb{R}^d)$ n'est probablement pas le bon espace fonctionnel. En effet, il s'avère qu'il existe une certaine littérature relative aux espaces de Hardy et BMO adaptés à certains opérateurs elliptiques sur \mathbb{R}^d (voir [DGM⁺05] et ses références). La principale difficulté est de développer une théorie de Littlewood-Paley adaptée à ces nouveaux espaces BMO . Autrement dit, quel bon substitut de BMO permet de remplacer l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ par $-\Delta + |x|^{2\alpha}$ dans (98) ?

- Permettons-nous de faire une petite comparaison entre le point de vue, désormais classique, des estimations à grandes déviations (ou phénomène de concentration de la mesure) avec l'usage des inégalités de Kahane-Khintchine-Marcus-Pisier (KKMP) exploitées dans [6, 7] :

	grandes déviations	inégalités KKMP
variables aléatoires utilisées	sous-gaussiennes	conditions optimales de moments
étude des séries aléatoires multi-dim	OUI	OUI par nature
accès aux bases hilbertiennes aléatoires	OUI	??

Le tableau précédent rend légitime l'espoir d'unifier les deux approches. En effet, l'article [Tal88] de Talagrand montre que les inégalités de Kahane-Khintchine unidimensionnelles (68) sont une conséquence d'une inégalité de concentration de $\{-1, +1\}^N$ vu comme partie de $[-1, 1]^N$. On peut donc espérer étendre [Tal88] en vue de retrouver les inégalités KKMP (72) en imaginant un produit de groupes orthogonaux plongé dans un produit de boules unités.

CHAPITRE 6

BIBLIOGRAPHIE GLOBALE

Références utilisées exceptées celles des travaux du mémoire (page 5). —

- [AG91] S. Alinhac and P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. L'Éditeur: EDP Sciences, 1991.
- [Ana16] N. Anantharaman. Topologie des hypersurfaces nodales de fonctions aléatoires gaussiennes. *Séminaire Bourbaki*, 68(1116), 2015-2016.
- [AT08] A. Ayache and N. Tzvetkov. L^p properties for Gaussian random series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(8):4425–4439, 2008.
- [Bam99] D. Bambusi. On long time stability in Hamiltonian perturbations of non-resonant linear PDEs. *Nonlinearity*, 12(4):823–850, 1999.
- [Bam03] D. Bambusi. Birkhoff normal form for some nonlinear PDEs. *Comm. Math. Phys.*, 234:253–285, 2003.
- [Bam08] D. Bambusi. A Birkhoff normal form theorem for some semilinear PDEs. In *Hamiltonian Dynamical Systems and Applications*, pages 213–247. NATO Sci. Peace Secur. Ser. B Phys. Biophys., Springer, Dordrecht, 2008.
- [BB14a] J. Bourgain and A. Bulut. Almost sure global well posedness for the radial nonlinear Schrödinger equation on the unit ball I: the 2D case. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 31(6):1267–1288, 2014.
- [BB14b] J. Bourgain and A. Bulut. Almost sure global well posedness for the radial nonlinear Schrödinger equation on the unit ball II: the 3D case. *J.Eur. Math. Soc.*, 16:1289–1325, 2014.
- [BB14c] J. Bourgain and A. Bulut. Invariant Gibbs measure evolution for the radial nonlinear wave equation on the 3D ball. *Journal of Functional Analysis*, 266(4):2319–2340, 2014.
- [BDGS07] D. Bambusi, J-M. Delort, B. Grébert, and J. Szeftel. Almost global existence for Hamiltonian semilinear Klein-Gordon equations with small Cauchy data on Zoll manifolds. *Comm. Pure Appl. Math*, 60 no 11:pages 1665–1690, 2007.
- [BdMG81] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin. *The spectral theory of Toeplitz operators*, volume 99. Princeton Univ Pr, 1981.
- [Bes78] A.L. Besse. *Manifolds all of whose geodesics are closed*. Birkhauser, 1978.
- [BG06] D. Bambusi and B. Grébert. Birkhoff normal form for PDEs with tame modulus. *Duke Math. J.*, 135:507–567, 2006.
- [BGM71] M. Berger, P. Gauduchon, and E. Mazet. *Le spectre d'une variété riemannienne*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [BGT04] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *American Journal of Mathematics*, 126(3):569–605, 2004.

- [BL13] N. Burq and G. Lebeau. Injections de Sobolev probabilistes et applications. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 46(6):917–962, 2013.
- [BN95] H. Brezis and L. Nirenberg. Degree theory and BMO; part I: Compact manifolds without boundaries. *Selecta Mathematica, New Series*, 1(2):197–263, 1995.
- [Bon13] J-M. Bony. On the characterization of pseudodifferential operators (old and new). In *Studies in Phase Space Analysis with Applications to PDEs*, pages 21–34. Springer, 2013.
- [Bou94] J. Bourgain. Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures. *Comm. Math. Physics*, 166(1):1–26, 1994.
- [Bou96a] J. Bourgain. Construction of approximative and almost periodic solutions of perturbed linear Schrödinger and wave equations. *Geometric and Functional Analysis*, 6(2):201–230, 1996.
- [Bou96b] J. Bourgain. Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 176:421–445, 1996.
- [Bou11] J-M. Bouclet. Semi-classical calculus on manifolds with ends and weighted L^p estimates. *Ann. Inst. Fourier*, 61(3):1181–1223, 2011.
- [BP11] M. Berti and M. Procesi. Nonlinear wave and Schrödinger equations on compact Lie groups and homogeneous spaces. *Duke Math. J.*, 159:479–539, 2011.
- [BS91] F.A. Berezin and M.A. Shubin. *The Schrödinger Equation*, volume 66. Springer, 1991.
- [BS13] D. Bambusi and Y. Sire. Almost global existence for a fractional Schrödinger equation on spheres and tori. *Dynamics of PDE*, 10(2):171–176, 2013.
- [BT08a] N. Burq and N. Tzvetkov. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations I: local theory. *Inventiones mathematicae*, 173(3):449–475, 2008.
- [BT08b] N. Burq and N. Tzvetkov. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations II: A global existence result. *Inventiones mathematicae*, 173(3):477–496, 2008.
- [BT14] N. Burq and N. Tzvetkov. Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation. *JEMS*, 16(1):1–30, 2014.
- [BTT13] N. Burq, L. Thomann, and N. Tzvetkov. Long time dynamics for the one dimensional non linear Schrödinger equation. *Ann. Inst. Fourier*, 63-6:2137–2198, 2013.
- [BTT14] N. Burq, L. Thomann, and N. Tzvetkov. Remarks on the Gibbs measures for nonlinear dispersive equations. *To appear in Ann. Fac. Sci. Toulouse Math, arXiv preprint arXiv:1412.7499*, 2014.
- [BTT15] N. Burq, L. Thomann, and N. Tzvetkov. Global infinite energy solutions for the cubic wave equation. *Bull. Soc. Math. France*, 143(2):301–313, 2015.
- [BU83] S. Bando and H. Urakawa. Generic properties of the eigenvalue of the laplacian for compact riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 35(2):155–172, 1983.
- [Bug04] Y. Bugeaud. *Approximation by algebraic numbers*, volume 160. Cambridge University Press, 2004.
- [Bus10] P. Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Springer, 2010.
- [dB14] A. de Bouard. Construction de solutions pour des edp sur-critiques à données initiales aléatoires. *Séminaire Bourbaki*, 66(1074), 2013-2014.
- [Del98] J-M. Delort. Temps d’existence pour l’équation de Klein-Gordon semi-linéaire à données petites périodiques. *American Journal of Mathematics*, pages 663–689, 1998.
- [Del09] J-M. Delort. On long time existence for small solutions of semi-linear Klein-Gordon equations on the torus. *Journal d’Analyse Mathématique*, 107(1):161–194, 2009.

- [Den12] Y. Deng. Two-dimensional nonlinear Schrödinger equation with random radial data. *Analysis & PDE*, 5(5):913–960, 2012.
- [DG75] J. Duistermaat and V. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Inventiones mathematicae*, 29(1):39–79, 1975.
- [DGM⁺05] J Dziubański, G Garrigós, T Martínez, JL Torrea, and J Zienkiewicz. BMO spaces related to Schrödinger operators with potentials satisfying a reverse Hölder inequality. *Mathematische Zeitschrift*, 249(2):329–356, 2005.
- [DS99] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268. Cambridge Univ Pr, 1999.
- [DS04] J-M. Delort and J. Szeftel. Long-time existence for small data nonlinear Klein–Gordon equations on tori and spheres. *Internat. Math. Res. Notices*, 37:1897–1966, 2004.
- [DS06] J-M. Delort and J. Szeftel. Long-time existence for semi-linear Klein–Gordon equations with small Cauchy data on Zoll manifolds. *Amer. J. Math*, 128:1187–1218, 2006.
- [dS14] A-S. de Suzzoni. Consequences of the choice of a particular basis of $L^2(S^3)$ for the cubic wave equation on the sphere and the Euclidian space. *CPAA*, 13(3):991–1015, 2014.
- [dV79] Y.C. de Verdiere. Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 54(1):508–522, 1979.
- [FHZ17] D. Fang, Z. Han, and Q. Zhang. Almost global existence for the semi-linear klein–gordon equation on the circle. *Journal of Differential Equations*, 262(9):4610–4634, 2017.
- [FM10] F. Filbir and H.N. Mhaskar. A quadrature formula for diffusion polynomials corresponding to a generalized heat kernel. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 16(5):629–657, 2010.
- [Fou22] J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur, par M. Fourier*. Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.
- [FTR66] A. Figà-Talamanca and D. Rider. A theorem of Littlewood and lacunary series for compact groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 16(3):505–514, 1966.
- [FTR67] A. Figà-Talamanca and D. Rider. A theorem on random Fourier series on noncommutative groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 21(3):487–492, 1967.
- [FZ10] D. Fang and Q. Zhang. Long-time existence for semi-linear Klein-Gordon equations on tori. *J. Differential Equations*, 249(1):151–179, 2010.
- [GG10] P. Gérard and S. Grellier. The cubic Szegő equation. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup*, 32:761–810, 2010.
- [GG11] P. Gérard and S. Grellier. Invariant tori for the cubic Szegő equation. *Inventiones Mathematicae*, 186:1–48, 2011.
- [Gri10] S. Grivaux. Almost sure convergence of some random series. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 348(3-4):155–159, 2010.
- [GY06a] J. Geng and J. You. A KAM theorem for Hamiltonian partial differential equations in higher dimensional spaces. *Comm. Math. Physics*, 262(2):343–372, 2006.
- [GY06b] J. Geng and J. You. KAM tori for higher dimensional beam equations with constant potentials. *Nonlinearity*, 19(10):2405–2423, 2006.
- [Hör68] L. Hörmander. The spectral function of an elliptic operator. *Acta mathematica*, 121(1):193–218, 1968.
- [Hör85] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators vol III : Pseudo-differential operators*. Springer Verlag, 1985.

- [HR81] B. Helffer and D. Robert. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. *Ann. Inst. Fourier*, 31(3):169–223, 1981.
- [HR82a] B. Helffer and D. Robert. Asymptotique des niveaux d'énergie pour des hamiltoniens à un degré de liberté. *Duke mathematical journal*, 49(4):853–868, 1982.
- [HR82b] B. Helffer and D. Robert. Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^n . *Comm. Partial Differential Equations*, 7(7):795–882, 1982.
- [HZ11] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhäuser, 2011.
- [HZZ15] B. Hanin, S. Zelditch, and P. Zhou. Nodal sets of random eigenfunctions for the isotropic harmonic oscillator. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2015(13):4813–4839, 2015.
- [JN61] F. John and L. Nirenberg. On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14(3):415–426, 1961.
- [Kah68] J-P. Kahane. *Some random series of functions*. Heath, (second edition Cambridge 1985), 1968.
- [Kar95] G.E. Karadzhov. Riesz summability of multiple hermite series in L^p spaces. *Mathematische Zeitschrift*, 219(1):107–118, 1995.
- [KT05] H. Koch and D. Tataru. L^p eigenfunction bounds for the Hermite operator. *Duke Math. J.*, 128(2):369–392, 2005.
- [Lat05] R. Latała. Some estimates of norms of random matrices. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 133(5):1273–1282, 2005.
- [Ler10] N. Lerner. *Metrics on the phase space and non-selfadjoint pseudo-differential operators*. Birkhäuser, 2010.
- [LQ04] D. Li and H. Queffélec. *Introduction à l'étude des espaces de Banach*. Société mathématique de France, 2004.
- [LRS88] J.L. Lebowitz, H.A. Rose, and E.R. Speer. Statistical mechanics of the nonlinear schrödinger equation. *Journal of statistical physics*, 50(3):657–687, 1988.
- [LT79] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces: Vol.: 2.: Function Spaces*. Springer-Verlag, 1979.
- [LT91] M. Ledoux and M. Talagrand. *Probability in Banach Spaces: isoperimetry and processes*, volume 23. Springer, 1991.
- [Mau74] B. Maurey. Type et cotype dans les espaces munis de structures locales inconditionnelles, exposés 24-25. *Séminaire Analyse fonctionnelle Ecole Polytechnique*, pages 1–25, 1973-74.
- [MP76] B. Maurey and G. Pisier. Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach. *Studia Math.*, 58:45–90, 1976.
- [MP81] M.B. Marcus and G. Pisier. Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis. *Annals of Math Studies, Princeton University Press, Princeton, NJ*, 101, 1981.
- [Muc70] B. Muckenhoupt. Mean convergence of Hermite and Laguerre series. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 147(2):433–460, 1970.
- [NG07] H. Niu and J. Geng. Almost periodic solutions for a class of higher-dimensional beam equations. *Nonlinearity*, 20(11):2499–2518, 2007.
- [OCP13] J. Ortega-Cerdà and B. Pridhnani. Carleson measures and Logvinenko–Sereda sets on compact manifolds. *Forum Math.*, 1:151–172, 2013.
- [Pau07] B. Pausader. Scattering and the Levandosky–Strauss conjecture for fourth-order nonlinear wave equations. *Journal of Differential Equations*, 241(2):237–278, 2007.

- [Pau10] B. Pausader. Scattering for the beam equation in low dimensions. *Indiana Univ. Math*, 59-3:791–822, 2010.
- [PRT14] A. Poirer, D. Robert, and L. Thomann. Probabilistic global well-posedness for the supercritical nonlinear harmonic oscillator. *Analysis & PDE*, 7(4):997–1026, 2014.
- [PRT15] A. Poirer, D. Robert, and L. Thomann. Random weighted Sobolev inequalities on \mathbb{R}^d and applications to Hermite functions. *Ann. Henri Poincaré, A, Math. Phys.*, 16(2):651–689, 2015.
- [PZ] R.E.A.C. Paley and A. Zygmund. On some series of functions, (1) (2) (3). *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 26 (1930) 337–357, 458–474, 28 (1932) 190–205.
- [Rot55] K. F. Roth. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 2:1–20, 6 1955.
- [RT15] D. Robert and L. Thomann. Random weighted Sobolev inequalities and application to quantum ergodicity. *Comm. Math. Phys.*, 335(3):1181–1209, 2015.
- [Sch47] L. Schwartz. Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques. *Annals of Mathematics*, pages 857–929, 1947.
- [Sch70] Wolfgang M. Schmidt. Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals. *Acta Mathematica*, 125(1):189–201, 1970.
- [Sha85] J. Shatah. Normal forms and quadratic nonlinear Klein Gordon equations. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 38:685–696, 1985.
- [Sle81] W.T Sledd. Random series which are BMO or Bloch. *Michigan Math. J.*, 28(3):259–266, 1981.
- [Sog88] C.D. Sogge. Concerning the L^p Norm of Spectral Clusters for Second-Order Elliptic Operators on Compact Manifolds. *J. of Funct. Anal.*, 77:123–138, 1988.
- [Spr69] VG Sprindzuk. Mahler’s problem in the metric theory of numbers. *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 25, 1969.
- [Str83] R.S. Strichartz. Analysis of the Laplacian on the complete riemannian manifold. *Journal of functional analysis*, 52(1):48–79, 1983.
- [SV97] Y. Safarov and D. Vassilev. *The asymptotic distribution of eigenvalues of partial differential operators*, volume 155. American Mathematical Soc., 1997.
- [SW71] E.M. Stein and G. Weiss. *Introduction to harmonic analysis on Euclidean spaces*. Princeton, Princeton University Press, 1971.
- [SZ11] C.D. Sogge and S. Zelditch. Lower bounds on the Hausdorff measure of nodal sets. *Math. Res. Lett.*, 18-1:25–37, 2011.
- [Sze75] G. Szego. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, Providence, R.I., fourth edition, 1975. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII.
- [Tal88] M. Talagrand. An isoperimetric theorem on the cube and the Kintchine-Kahane inequalities. *Proc. AMS*, 104(3):905–909, 1988.
- [Tao12] T. Tao. *Topics in random matrix theory*, volume 132. American Mathematical Soc., 2012.
- [Tri78] H. Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland, 1978.
- [Tri83] H. Triebel. *Theory of function spaces*. BirkhauserVerlag, Basel, 1983.
- [Tzv08] N. Tzvetkov. Invariant measures for the defocusing nonlinear Schrödinger equation. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(7):2543–2604, 2008.
- [Tzv09] N. Tzvetkov. Riemannian analogue of a Paley-Zygmund theorem. Séminaire EDP X, 2008-2009. Exposé no. XV.

- [Tzv15] N. Tzvetkov. Quasiinvariant gaussian measures for one-dimensional hamiltonian partial differential equations. In *Forum of Mathematics, Sigma*, volume 3. Cambridge University Press, 2015.
- [Uhl76] K. Uhlenbeck. Generic properties of eigenfunctions. *American Journal of Mathematics*, 98(4):1059–1078, 1976.
- [YZ01] K. Yajima and G. Zhang. Smoothing property for Schrödinger equations with Potential Superquadratic at Infinity. *Comm. Math. Phys.*, 221(3):573–590, 2001.
- [YZ04] K. Yajima and G. Zhang. Local smoothing property and Strichartz inequality for Schrödinger operator with potentials superquadratic at infinity. *J. Differential equations 202*, 202(1):81–110, 2004.
- [Zel92] S. Zelditch. Quantum ergodicity on the sphere. *Comm. Math. Physics*, 146(1):61–71, 1992.
- [Zha10a] Q. Zhang. *Long-time existence and growth of Sobolev norms for solutions of semi-linear Klein-Gordon equations and linear Schrödinger equations on some manifolds*. Theses, Université Paris-Nord - Paris XIII, November 2010.
- [Zha10b] Q. Zhang. Long-Time Existence for Semi-Linear Klein-Gordon Equations with Quadratic Potential. *Comm. Partial Differential Equations*, 35(4):630–668, 2010.
- [Zha16a] Q. Zhang. Lifespan estimates for the semi-linear Klein-Gordon equation with a quadratic potential in dimension one. *J. Differential Equations*, 261(12):6982–6999, 2016.
- [Zha16b] Q. Zhang. Long time existence for the quadratic wave equation associated to the harmonic oscillator. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 130:202–213, 2016.

