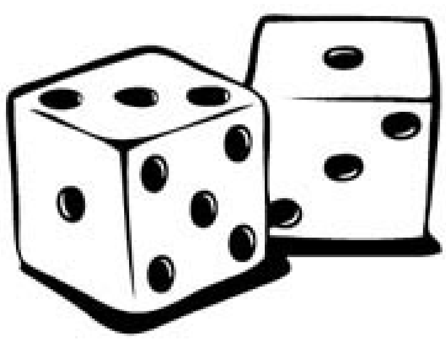
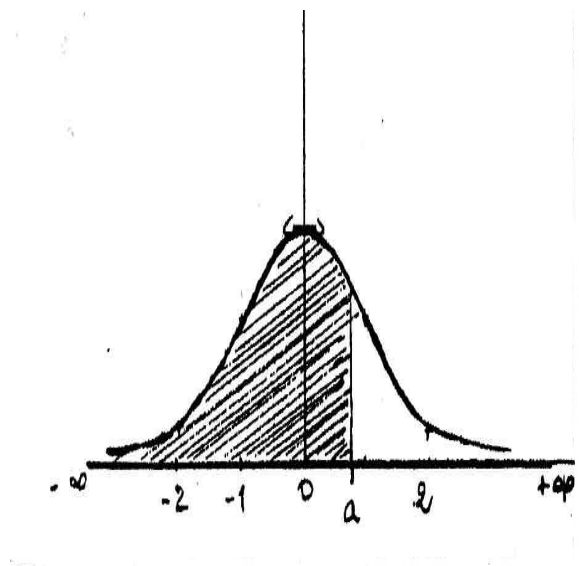
Cours et receuil d'exrcices
Cycle Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs
Mathématiques
2ème année Biologie-Géologie (BG2)





Mohamed Mehdi Tekitek

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Tunis

Janvier 2016

Table des matières

Introduction

Ce manuscrit est issu de mes enseignements à la Faculté des Sciences de Tunis. Il est destiné aux étudiants de deuxième année des cycles préparatoires aux études d'ingénieurs section Biologie Géologie (BG2). Il peut être utile à tous ceux qui seraient désireux d'acquérir ou de revoir les notions de bases des probabilités.
Cet ouvrage comporte des rappels de cours sans démonstration, des exerces classiques de difficultés progressives, ainsi que des problèmes plus complexes, extraits des anciennes épreuves du concours national. Il est découpé en chapitres mais il comporte fondamentalement trois grandes parties :

- Une première partie est dédiée à l'analyse.
- Une deuxième partie est consacré à l'algébre linéaire.
- Une troisieme partie concerne les probabilités.

Finalement c'est la première version de ce ploycopié du cours et j'ai probablement du laisser des erreurs. Toutes les remarques, commentaires et critiques sont les bienvenus.

Chapitre 1

Les séries numériques

1 Définitions et premières propriétés :

Définition 1.1 *soit* $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ *une suite de nombre réels ou complexes. On appelle série de terme général* u_n*, que l'on abrège par* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *telle que :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots$$

Remarque : une série est donc une somme infinie de nombres réels ou complexes.

Définition 1.2 (Suite des sommes partielles associée à une série) *Soit* $\sum u_n$ *une série de terme général* u_n*. La suite* $(S_N)_{(N\in\mathbb{N})}$ *est dite la suite des sommes partielles associée à la série* $\sum u_n$*.*

La série $\sum u_n$ est dite convergente si et seulement si la suite $(S_N)_{(N\in\mathbb{N})}$ est convergente et dans ce cas :

$$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \lim_{N\to\infty} S_N$$

δ est appelée alors la somme de la série convergente $\sum u_n$.
La série $\sum u_n$ est dite divergente si et seulement si la suite $(S_N)_{(N\in\mathbb{N})}$ est divergente.
Rappel : la nature d'une série est soit convergente, soit divergente.
Remarque : la nature d'une série numérique reste inchangée lorsqu'on modifie ou lorsqu'on supprime un nombre fini de termes de la série.

Théorème 1.1 (Condition nécessaire de convergence :) *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. *(La réciproque n'est pas vraie en général).*

Démonstration : $\sum u_n$ est convergente et soit $\delta = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.
Conséquences : si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ alors on ne peut rien dire sur la nature de la série $\sum u_n$.
Si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum u_n$ est divergente.

2 Séries particulières

2.1 Séries géométriques

Définition 2.1 *La série* $\sum u_n$ *dont le terme général* u_n *est défini de la manière suivante :*

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a.q^n \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}^* \text{ et } q \in \mathbb{R}$$

Est appelée une série géométrique de raison q *et de premier terme* a.

Théorème : La série géométrique $\sum u_n$ de raison q définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}; \quad u_n = a.q^n$$

est :

- Convergente lorsque $|q| < 1$
- Divergente lorsque $|q| > 1$

2.2 Séries de Riemann

Définition 2.2 *La série* $\sum u_n$ *dont le terme général* u_n *est défini de la manière suivante :*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

est une série de Riemann.

Théorème : La série de Riemann $\sum u_n$ définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}; \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

est :

- Convergente lorsque $\alpha < 1$
- Divergente lorsque $\alpha \geq 1$

2.3 Séries téléscopiques (ou sommes téléscopiques)

Si (a_n) est une suite, la série télescopique correspondante est la série de terme général $a_{n+1} - a_n$. La convergence de la série télescopique équivaut à la convergence de la suite (a_n) en effet :

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_0.$$

En faisant tendre n vers l'infini on voit que :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_0),$$

d'où le résultat.

3 Opérations sur les séries

Opérations linéaires :

(i) Addition :
Si la série $\sum u_n$ est convergente et la série $\sum v_n$ est convergente alors la série $\sum(u_n + v_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
Si la série $\sum u_n$ est convergente (resp. divergente) et la série $\sum v_n$ est divergente (resp. convergente) alors la série $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n)$ est divergente.
Si la série $\sum u_n$ est divergente et la série $\sum v_n$ est divergente et si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même signe alors la série $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n)$ est divergente.

(ii) Multiplication par un scalaire :
Si la série $\sum u_n$ est convergente alors quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum(\alpha u_n)$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha u_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Si la série $\sum u_n$ est divergente alors quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum(\alpha u_n)$ est divergente.

4 Critères de convergence des séries à termes positifs

Définition 4.1 (Série à termes positifs) *On appelle série à termes positifs toute série $\sum u_n$ de terme général u_n vérifiant la condition suivante : il* *existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0$, on a, $u_n \geq 0$ (c'est à dire u_n est positif à partir d'un certain rang).*

Premier critère : (Théorème de comparaison)
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant la condition suivante : Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$ on a $u_n \leq v_n$ alors :

- Si la série $\sum v_n$ est convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente .
- Si la série $\sum u_n$ est divergente alors la série $\sum v_n$.

Deuxième critères : (Théorème de l'équivalence)
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant la condition suivante :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n,$$

alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (c'est à dire les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

5 Règles de convergence

Règle de d'Alembert
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs vérifiant la condition :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

- Si $0 \leq l < 1$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ est divergente.
- Si $l = 1$ alors on ne peut rien dire sur la nature de la série $\sum u_n$.

Règle de Cauchy
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs vérifiant la condition :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{u_n} = l.$$

- Si $0 \leq l < 1$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ est divergente.
- Si $l = 1$ alors on ne peut rien dire sur la nature de la série $\sum u_n$

Règles "$n^\alpha u_n$"
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs vérifiant la condition suivante : Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = l$ où $l \geq 0$

- Si $l = 0$ et $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $l \neq 0$ ou $l = \infty$ et $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum u_n$ est divergente.

6 Convergence absolue

Définition 6.1 *La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si el seulement si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème : Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème : Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente. La réciproque n'est pas vraie en général.

7 Séries alternées

Définition 7.1 *On appelle série alternée toute série $\sum u_n$ dont le terme général u_n est alternativement positif et négatif. Le terme général u_n d'une telle série s'écrit sous la forme suivante :*

$$u_n = (-1)^n a_n \qquad \textit{ou} \qquad u_n = (-1)^{n+1} a_n$$

avec a_n une suite à termes positifs.

Théorème des séries alternées : Si $\sum u_n$ est une série alternée telle que :

$$u_n = (-1)^n a_n \qquad \text{ou} \qquad u_n = (-1)^{n+1} a_n,$$

avec a_n une suite à termes positifs. Et vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (a_n) \text{ décroissante}, \\ \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0, \end{cases}$$

alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Remarque : Lorsque la série alternée est absolument convergente elle est convergente et il est inutile de lui appliquer le théorème des séries alternées. On applique le théorème des séries alternées que lorsque la série alternées ne converge pas absolument.

8 Exercices :

Exercice 1 :

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Etudier la suite (S_n).

Exercice 2 :

1. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Etudier la suite (S_n).

Exercice 3 :

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k})$. Etudier la suite (S_n).

Exercice 4 :

Etudier les séries $\sum u_n$ de terme génèral u_n suivants :

1. $u_n = \frac{2n+1}{3n+2}$
2. $u_n = \sin n$

Exercice 5 :

Etudier les séries $\sum u_n$ dns chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n|\sin n|}$
2. $u_n = \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})$
3. $u_n = \frac{n^3+n+2}{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}$
4. $u_n = \frac{1}{n+2^n}$
5. $u_n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})$

Exercice 6 :

Etudier les séries $\sum u_n$ dns chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n)}}$
2. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
3. $u_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$
4. $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$
5. $u_n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})$

Exercice 7 :

Etudier les séries $\sum u_n$ dns chacun des cas suivants :

1. $u_n = e^{-n^2}$
2. $u_n = \frac{\ln n}{n^3}$

Exercice 8 :

On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.

1. Montrer que $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi} \mathrm{d}t$.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge.

Exercice 9 :

Soit (x_n) une suite.

1. Montrer que (x_n) converge $\Leftrightarrow \sum(x_n - x_{n-1})$ converge.
2. On pose $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. Montrer que (x_n) converge.

Exercice 10 :

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante.
On pose $x_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que (x_n) est décroissante.
2. En déduire que (x_n) converge.
3. Montrer que $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(t)\mathrm{d}t$ existe.
4. Montrer que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

Exercice 11 :

Soit (x_n) la suite définie par $0 < x < 1$ et $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ $\forall n$.

1. Montrer que la suite (x_n) converge vers zéro.
2. Montrer que la série $\sum x_n^2$ converge et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n^2$.
3. Vérifier que $\ln(1 - x_n) = \ln(x_{n+1}) - \ln(x_n)$ $\forall n$.
4. Montrer que la série $\sum \ln(1 - x_n)$ diverge.
5. En déduire que $\sum x_n$ diverge.

Chapitre 2

Les séries entières

1 Définitions

Définition 1.1 *On appelle série entière, toute série de fonctions* $\sum u_n(x)$, *dont le terme général* $u_n(x)$ *est de la forme suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) = a_n x^n \text{ où } a_n \in \mathbb{R}.$$

Exemple :

$$u_n(x) = \frac{n+1}{n^2+2} x^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2 Rayon de convergence & intervalle de convergence :

Soit $\sum u_n(x) = \sum a_n\, x^n$ une série entière donnée . En appliquant la règle de d'Alembert ou la règle de Cauchy à la série $\sum |u_n(x)|$, on obtient :

- $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| \to \ell|x|$ lorsque $n \to \infty$ où $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.
- $\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x| \to \ell|x|$ lorsque $n \to \infty$ où $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

On a toujours $\ell \geq 0$ et trois cas peuvent avoir lieu :

• **Premier cas :** si ℓ est non nulle et finie ($\ell \neq 0$ et $\ell \neq +\infty$) alors la règle de d'Alembert ou la règle de Cauchy implique que $\sum u_n(x)$ converge absolument et donc

- Converge pour les valeurs de x telle que : $\ell|x| < 1 \iff -\frac{1}{\ell} < x < \frac{1}{\ell} \iff x \in]-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}[$.

– Diverge pour les valeurs de x telle que : $\ell|x| > 1 \iff x < -\frac{1}{\ell}$ ou $x > \frac{1}{\ell} \iff x \in]-\infty, -\frac{1}{\ell}[\cup]\frac{1}{\ell}, +\infty[$.
– On ne peut rien dire pour les valeurs de x telle que $\ell|x| = 1 \iff x = -\frac{1}{\ell}$ ou $x = \frac{1}{\ell}$.

Dans ce cas on pose $R = \frac{1}{\ell}$: R est appelé le rayon de convergence de la série $\sum u_n(x)$ et on a donc : la série $\sum u_n(x)$ converge sur $]-R, +R[$, diverge sur $]-\infty, -R[\cup]+R, +\infty[$ et pour les valeurs $x = -R$ et $x = +R$ on ne peut rien dire. On étudie alors les séries numériques $\sum a_n(-R)^n$ et $\sum a_n(R)^n$ et on note par I_C l'intervalle de convergence de la série entière $\sum u_n(x)$.

• **Deuxième cas :** si ℓ est nulle ($\ell = 0$)
La règle de d'Alembert ou la règle de Cauchy implique que $\sum u_n(x)$ converge absolument et donc converge pour les valeurs de $x \in]-\infty, +\infty[$. Dans ce cas on pose $R = +\infty$: R est le rayon de convergence de la série $\sum u_n(x)$.
$I_C =]-\infty, +\infty[$ est l'intervalle de convergence de la série entière $\sum u_n(x)$.

• **Troisième cas :** si ℓ est infini ($\ell = +\infty$)
alors pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$ on a $\ell\,|x| = +\infty$, la règle de d'Alembert ou la règle de Cauchy implique que la série entiére $\sum u_n(x)$ ne converge pour aucune valeur de x. Dans ce cas on pose $R = 0$: R est rayon de convergence de la série $\sum u_n(x)$.
$I_C = \emptyset$ est l'intervalle de convergence de la série entière $\sum u_n(x)$.

Remarque 2.1 *Le rayon de convergence R est toujours positif ou nul.*

3 Somme d'une série entière

Soit $\sum u_n(x) = \sum a_n\, x^n$ une série entière de rayon de convergence R. La série $\sum u_n(x)$ converge donc pour tout $x \in]-R, +R[$ et on pose alors :

$$\text{pour tout } x \in]-R, +R[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

– La fonction $S(x)$ ainsi obtenue est appelée la somme de la série entière $\sum a_n\, x^n$.
– $\sum a_n x^n$ est appelé alors le développement en série entière au voisinage de zéro que l'on abrège DLSE(0) de la fonction S.

Remarques :
– La fonction $S(x)$ est la somme de fonctions polynôme qui sont de classe C^∞ sur $]-R, +R[$.

– Si $\sum a_n\, x^n$ est une série entière de rayon de convergence R telle que a_n est exprimé en fonction de n, selon la parité de n, alors sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\text{pour tout } x \in]-R, +R[,\ S(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = x^n$.

1. Rayon de convergence : $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x| \to |x|$ lorsque $n \to \infty$ donc $R = 1$.
2. Somme : pour tout $x \in]-1, +1[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ car $\lim\limits_{N\to\infty} x^N = 0$ puisque $-1 < x < 1$. D'où pour tout $x \in]-1, +1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

4 Opérations sur les séries entières

4.1 Addition

Si $\sum u_n(x) = \sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R_1 et $\sum v_n(x) = \sum b_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R_2 alors la série $\sum (u_n + v_n)(x) = \sum (a_n + b_n) x^n$ est une série entière de rayon de convergence R tel que $R = \min(R_1, R_2)$ lorsque $R_1 \neq R_2$ et $R \geq \min(R_1, R_2)$ lorsque $R_1 = R_2$
on a alors pour tout $x \in]-R, +R[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Exemple dans le cas $R_1 = R_2$ avec $R > \min(R_1, R_2)$
On considère les deux séries entières : $u_n(x) = x^n$ et $v_n(x) = \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) x^n$. Les séries $\sum u_n(x)$ et $\sum v_n(x)$ ont le même rayon de convergence $R_1 = R_2 = 1$, mais la série entière $u_n(x) + v_n(x) = \left(1 + \frac{1}{2^n} - 1\right) x^n = \frac{1}{2^n} x^n$ a pour rayon de convergence $R = 2$.

Remarque : lorsque $R_1 = R_2 = +\infty$ alors $R = +\infty$.

4.2 Produit

Si $\sum u_n(x) = \sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R_1 et $\sum v_n(x) = \sum b_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R_2 alors la série produit $\Big(\sum u_n(x)\Big)\Big(\sum v_n(x)\Big)$ est une série entière de rayon de convergence R tel que $R \geq \min(R_1, R_2)$. On a pour tout $x \in]-R, +R[$:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}\Big)x^n.$$

4.3 Changement de variable

Le changement de variable de la forme $t = a\,x^k$ où $k \in \mathbb{N}^*$ permet de déterminer le DLSE(0) de plusieurs fonctions.
Exemples : dans le DLSE(0) de $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $R = 1$ le changement de variable :

1. $t = -x$ permet d'obtenir de DLSE(0) de $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $(R = 1)$.
2. $t = -x^2$ permet d'obtenir le DLSE(0) de $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $(R = 1)$.
3. $t = x^2$ permet d'obtenir le DLSE(0) de $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, $(R = 1)$.

4.4 Dérivation et intégration

a Dérivation

Soit $\sum u_n(x) = \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et telle que pour tout $x \in]-R, +R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Par dérivation on obtient alors pour tout $x \in]-R, +R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

La dérivée de la somme $S(x)$ est égale à la somme des dérivées des $a_n.x^n$ et le rayons de convergence R est conservé par dérivation.

Exemple : on sait que pour tout $x \in]-1, +1[$

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ avec } \quad R = 1,$$

par dérivation on a pour tout $x \in]-1, +1[$

$$S'(x) = (\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

et le rayon de convergence $R = 1$ est conservé.

b Intégration

Soit $\sum u_n(x) = \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et telle que : pour tout $x \in]-R,+R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $t \in]-R,+R[$, $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et par intégration on obtient alors pour tout $x \in]-R,+R[$:

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

L'intégrale de 0 à x de la somme $S(t)$ est égale à la somme des intégrales de 0 à x des $a_n.t^n$ et le rayon de convergence R est conservé par intégration.
Important : Si on connait l'expression de $S'(x)$ pour tout $x \in]-R,+R[$ alors pour déterminer celle de $S(x)$ on utilise la formule suivante :

$$\text{pour tout } x \in]-R,+R[, \quad S(x) = \int_0^x S'(t)dt + S(0).$$

Exemple : on sait que le DLSE (0) de

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{avec} \quad R = 1.$$

Par intégration on a pour tout $x \in]-1,+1[$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

5 Fonction développable en série entière

Définition 5.1 *Une fonction f est dite développable en série entière en* 0 *si et seulement si f est définie sur un intervalle I contenant* 0 *et il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$ tel que $]-R,+R[\subset I$ et*

$$\textit{pour tout } x \in]-R,+R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Remarque : la somme d'une série entière de rayon de convergence R est une fonction de classe C^∞ sur $]-R,+R[$ ainsi pour qu'une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 soit développable en série entière au voisinage de 0, il faut que la fonction f soit une fonction de classe C^∞ sur $]-R,+R[$.

Remarque : Soit f est une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I contenant 0. Si pour tout $x \in I$ on a $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\right) = 0$ où $\theta \in]0,1[$ alors la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 et son DLSE(0) est donnée par :

$$\text{pour tout } x \in]-R,+R[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n.$$

où R est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ telle que $]-R,+R[\subset I$.

Exemples ;

• Soit $f(x) = e^x$, f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = e^x$ d' où $f^{(n)}(0) = 1$. Donc le DLSE(0) de f s'ecrit :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

• Soit $g(x) = \cos(x)$, g une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g^{(2n)}(0) = (-1)^n$ et $g^{(2n+1)}(0) = 0$. Donc le DLSE(0) de g s'ecrit :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

• Soit $h(x) = \sin(x)$, h une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h^{(2n)}(0) = 0$ et $h^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Donc le DLSE(0) de h s'ecrit :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

6 Méthodes pratiques pour le calcul de la somme de certaines séries entiers

Pour déterminer la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur l'intervalle $]-R,+R[$ d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R, on utilise les procédés suivants pour se ramener aux développements en séries entières au voisinage de 0 (DLSE (0)) des fonctions usuelles.

– Multiplication ou division par : $x, x^2, x^3, \ldots$

- Dérivation ou intégration.
- Changement de variable.
- Décalage d'indices.
- Décomposition en éléments simples de a_n, lorsque a_n est rationnelle en n.
- On montre que $S(x)$ est la solution d'une certaine équation différentielle que l'on résoudra.
- Ajouter des termes qui manquent ou retrancher des termes qui sont de trop. Etc...

Exemple : on montre que le rayon de convergence $R = +\infty$ de la série entière $\frac{x^{2n+1}}{n!}$ et que

$$\text{pour tout } x \in]-\infty, +\infty[, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x\, e^{x^2}.$$

7 Utilisation de séries entières pour le calcul de certaines séries

La théorie des séries permet de calculer la somme de certaines séries numériques. En effet, si pour tout $x \in]-R, +R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R, alors pour toute valeur $\lambda \in]-R, +R[$ fixée, la série numérique $\sum a_n \lambda^n$ de terme général $a_n \lambda^n$ est convergente et sa somme S est donnée par :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n = S(\lambda).$$

Exemple : On a déjà vu que la série numérique de terme général $\frac{1}{n!}$ est convergente (Régle de d'Alembert). Sa somme S est donnée par le DLSE (0) de la fonction exponentielle en prenant $x = 1$:

$$S = e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}.$$

7.1 Applications, sur des exemples, des séries entières pour la résolution de certaines équations différentielles

Exemple 1 : on considère l'équation différentielle du premier ordre (E) , suivante :

$$(E) : \qquad 2x(1-x)y'(x) + (1-2x)y(x) = 1$$

On suppose que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une série entière, de rayon de convergence R, solution de l'équation différentielle (E).

1. Monter que (a_n) vérifie la relation de récurrence suivante :

$$a_0 = 1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1}$$

   et en déduire le rayon de convergence R.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n.

8 Exercices

Exercice 1 :

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{1}{2^n} x^n$
2. $\sum n x^{2n+1}$
3. $\sum \frac{x^n}{n}$
4. $\sum \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) x^n$
5. $\sum \frac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n} z^{2n+1}$

Exercice 2 :

Etudier les séries entières :

1. $\sum (\sin n) x^n$
2. $\sum (\cos n) x^n$

Exercice 3 :

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{x^n}{n+2}$
2. $\sum \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) x^n$
3. $\sum \frac{x^{2n-1}}{n}$
4. $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \int_0^1 t^n e^{-t} \mathrm{d}t$

Exercice 4 :

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$. Montrer que f est C^∞ sur $]-1, 1[$.

Exercice 5 :

Calculer pour $x \in]-1,1[$

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$

Exercice 7 :

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-1}}$

Exercice 8 :

Déterminer le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction f.

1. $f(x) = \frac{1}{1-3x}$
2. $f(x) = \frac{1}{2-x}$
3. $f(x) = \ln(3+x)$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2+x+2}$

Exercice 9 :

1. Trouver a, b, c tel que $n^2 + 2n + 3 = a + bn + cn(n-1)$.
2. Déterminer le rayon et la somme de $\sum (n^2 + 2n + 3)x^n$.

Exercice 10 :

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

1. Déterminer D_f.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$.
3. Calculer $xf(x)$.
4. En déduire une expression simple de $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

Exercice 11 :

Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{5^n}$

Exercice 12 :

Donner le développement en série entière de $f(x) = arctan(x)$.

9 Exercices Concours

Exercice 1 : (Concours 2004)

1. Soit la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ de la variable réelle x.
   Montrer que son rayon de convergence vaut 1.
   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, pour $x \in]-1, 1[$.
2. a) Calculer $S''(x)$, pour $|x| < 1$.
   b) En déduire l'expression de $S'(x)$ puis celle de $S(x)$ pour $|x| < 1$.
3. Donner les valeurs des sommes suivantes :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)2^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
4. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge-t-elle pour $|x| = 1$?
5. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 2 : (Concours 2004)

On cherche une fonction $y(x)$ développable en série entière sur un intervalle $]-\rho, \rho[$ avec $\rho > 0$, qui soit solution de l'équation différentielle

$$(*) \begin{cases} xy''(x) + y'(x) + xy(x) & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

1. Montrer que si $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ vérifie $(*)$ sur $]-\rho, \rho[$, alors on a :

$$a_0 = 1, a_1 = 0 \text{ et } a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}, \text{ pour } n \geq 2.$$

2. Déterminer alors l'expression de $y(x)$ et donner son rayon de convergence.

Exercice 3 : (Concours 2005)

1. Montrer que $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, pour $x \in]-1, 1[$.
2. On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$.

   a) Montrer que son rayon de convergence vaut 1.

   b) Est-elle convergente pour $|x| = 1$?
3. On pose pour $x \in]-1, 1[$, $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$.

   a) Vérifier que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$.

   b) En déduire que pour $x \in]-1, 1[$, $S(x) = \frac{(x+1)^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{4}$.
4. Donner les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)2^n} \; ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)2^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Chapitre 3

Intégarles généralisées.

1 Introduction

On a défini $\int_a^b f(t)dt$ pour une fonction f continue sur $[a,b]$.
On voudrait étendre la notion pour intégrer des fonctions continues définies sur I, où I est un intervalle quelconque. (par exemple $I = [a, +\infty[$ ou $I = [a, b[$, $I =]a, b[$ ...)

2 Définitions et propriétés

Définition 2.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I avec $I = [a, b[$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ainsi, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est définie pour tout $x \in I$.*
On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si $F(x)$ admet une limite finie en b.
Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$. Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Intégrale de Riemann

Reimann en $+\infty$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge, si et seulement si, $\alpha > 1$.
Reimann en 0 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge, si et seulement si, $\alpha < 1$.
Reimann en $b \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_b^1 \frac{dt}{(t-b)^\alpha}$ converge, si et seulement si, $\alpha < 1$.

3 Théorème de majoration

Proposition 3.1 *Soit* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue et positive sur* $[a, b[$ *(avec* $a < b$*). On note*

$$F : \begin{array}{rcl} [a,b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)dt. \end{array}$$

Si F *est majorée alors l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente.*
Sinon $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = +\infty$.

4 Théorème de comparaison

Proposition 3.2 *Soient* $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues et positives. On suppose :*

$$\textit{il existe } c \in [a,b[, \quad \textit{pour tout } x \geq c, \quad f(x) \leq g(x).$$

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ *est convergente alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est convergente.*
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est divergente alors* $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ *est divergente.*

Exemple : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1+\cos(t)}{2t^2} dt$ est convergente. En effet :

$$0 \leq \frac{1+\cos(t)}{2t^2} \leq \frac{1}{t^2},$$

comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Reimann en 0 avec $\alpha = 2 > 1$). Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1+\cos(t)}{2t^2} dt$ converge.

5 Théorème d'équivalence

Proposition 3.3 *Soient* $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues et positives. On suppose :* $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$ *et* g *garde un signe constant sur* $[a, b[$. *Alors,* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *et* $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ *sont de même nature.*

6 Absolue convergence

Définition 6.1 *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si et seulement si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.*

Proposition 3.4 *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.*

7 Règle de $t^\alpha f(t)$

1. On supose que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ et $\alpha > 1$ alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
2. On supose que $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t) = 0$ et $\alpha < 1$ alors l'intégrale $\int_0^b f(t)dt$ est convergente.

8 Exercices

Exercice 1 :

Dèterminer si les intègrales gènèralisèes sont convergentes et calculer leur valeur (si possible) :

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1 \,\mathrm{d}t$
4. $\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x+2-\sqrt{x^2+4x+1})\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(e-(1+\frac{1}{x})\right)^x \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 :

Dèterminer si les intègrales gènèralisèes sont convergentes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{t^2-t}$
5. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$

Exercice 3 :

Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ et de $b \in \mathbb{R}$, la convergence des intègrales suivantes :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x^b)}\mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{sinx}{x^a}\mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{\pi/2} (tan(x))^a\mathrm{d}x$$

Exercice 4 :

On note f la fonction dèfinie pour tout rèel $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$I_n = \displaystyle\int_{n}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$

1. Montrer que l'intègrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
2. Montrer que $I_n \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer que la sèrie $\sum f(n)$ est convergente.

Exercice 5 :

Soit f la fonction dèfinie par $f(x) = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t.$

1. Dèterminer le domaine de dèfinition de f.
2. Quel est le sens de variation de f ?
3. On admet que f est continue sur son domaine de dèfinition :
   (a) Dèterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
   (b) En déduire la limite de f en 0.

Exercice 6 :

1. Justifier l'existence de

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ t^{x-1}dt \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

2. Montrer que $\Gamma(x) > 0$. Que vaut $\Gamma(1)$?
3. Etablir la relation : pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.
4. Que vaut $\Gamma(n+1)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 :

On pose pour $p, q \in \mathbb{R}$

$$B(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q \mathrm{d}t.$$

1. Etudier la convergence de $B(p,q)$.
2. Montrer que $B(p,q) = B(q,p)$.
3. Montrer que $B(p,q) = \dfrac{q}{p+1}B(p+1, q-1)$.
4. En déduire $B(p,q)$.

Exercice 8 :

Etudier la convegence de intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \cos(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

Chapitre 4

Réduction des endomorphismes

1 Rappel sur les déterminants

Soit A une matrice d'ordre 2 à coefficients réels ou complexes définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice A, noté $\det(A)$ ou encore $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ est donné par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice d'ordre n à coefficients réels ou complexes, avec $n \ge 3$. Le déterminant de la matrice A, noté $\det(A)$, est le nombre réel ou complexe défini par le développement suivant les lignes ou les colonnes :

• suivant la $i$ème ligne avec $i = 1, 2, \ldots, n$; $\det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}$.

• suivant la $j$ème colonne avec $j = 1, 2, \ldots, n$; $\det(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}$,

avec $M_{i,j}$ est la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de la matrice A en supprimant de A la ligne i et la colonne j.

Les matrices $M_{i,j}$ ainsi définies sont appelées les mineures.

2 Propriétés relative aux déterminant

1. Si A est une matrice carrée d'ordre n alors :

$$\det(A) = \det({}^tA),$$

où ${}^tA$ est la matrice transposée de la matrice A.

2. Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors :
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$
3. Attention en général : $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.
4. On note par I_n la matrice idéntité d'ordre n,
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$
on a $\det(I_n) = 1$.
5. Si
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
est une matrice diagonale alors le déterminant de A est donné par :
$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}.$$
6. Si
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
est une matrice triangulaire supérieure ou inférieure alors le déterminant de A est donné par :
$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}.$$
7. Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est inversible ou régulière, si et seulement si,
$$\det(A) \neq 0$$
et dans ce cas :
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

8. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

Remarques

1. Un déterminant qui possède une ligne nulle ou une colonne nulle est nul.
2. Un déterminant qui possède deux lignes où deux colonnes identiques est nul.
3. Lorsqu'on permute deux lignes où deux colonnes dans un déterminant, le déterminant est multiplié par (-1) .
4. La valeur d'un déterminant reste inchangée lorsqu'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.
5. La valeur d'un déterminant reste inchangée lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.
6. Lorsqu'on multiplie un déterminant par un scalaire α on choisit une seule ligne ou bien une seule colonne et on la multiplie par ce α.

3 Matrice des cofacteurs

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels ou complexes. La matrice des cofacteurs de A ou la comatrice de A notée, $com(A)$, est définie de la manière suivante :

$$com(A) = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

avec pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ et $j = 1, 2, \dots, n$ on a :

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}),$$

où M_{ij} est la matrice carrée d'ordre $(n-1)$ obtenue à partir de A en y supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.

3.1 Calcul de l'inverse par la matrice des cofacteurs

Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que $\det(A) \neq 0$, A est inversible et A^{-1} est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t com(A).$$

4 Valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation des matrices

Dans tout ce chapitre on désigne par : E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (resp. C^n) $(n = 2, 3, 4)$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base donnée de E.
Base canonique : on note B_c la base canonique de E.
Si $n = 2$ alors $B_c = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.
Si $n = 3$ alors $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$
Si $n = 4$ alors $B_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ avec $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$

Définition 4.1 *On dit que l'application f est un endomorphisme de E, si f est une application linéaire de E dans E.*

Matrice identité d'ordre n : On note par I_n ($n = 2, 3, 4$) la matrice identité d'ordre n. Exemples :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappels :
• Composantes d'un vecteur dans une base donnée :
Pour tout $X \in E$, ils existent $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ uniques tel que :

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont appelées les composantes ou encore les coordonnées de X dans la base B. On pose alors : $V = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$, V est appelé la matrice colonne de X dans la base B.
• Si $B = B_C$ alors $V = X$.
• Matrice d'un endomorphisme dans une base donnée $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:
$f(e_1) \in E$, alors ils existent $a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1} \in \mathbb{K}$ tels que $f(e_1) = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + \cdots + a_{n,1}e_n$.
$f(e_2) \in E$,alors ils existent $a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2} \in \mathbb{K}$ tels que $f(e_2) = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + \cdots + a_{n,2}e_n$.
$f(e_n) \in E$, alors ils existent $a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{n,n} \in \mathbb{K}$ tels que $f(e_n) = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \cdots + a_{n,n}e_n$.. La matrice carrée d'ordre n obtenue de la manière

suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

est appelée la matrice de l'endomorphisme f dans la base B et on écrit $A = Mat_B(f)$.

Remarques :

1. Pour obtenir la matrice d'un endomorphisme f par rapport à une base B notée $A = Mat_B(f)$, il suffit de déterminer les images par f des éléments de la base B. Les colonnes de la matrice sont constituées des coordonnées de ces images dans la base B.
2. Pour obtenir la matrice d'une application linéaire f par rapport à une base B (base de l'espace de départ) et à une base B' (base de l'espace d'arriver), il suffit de déterminer les images par f des éléments de la base B. Les colonnes de la matrice sont constituées des coordonnées de ces images dans la base B'.
3. Un endomorphisme peut être défini par sa matrice relativement à une base donnée.

• Image d'un vecteur par un endomorphisme défini par matrice :
Soit f un endomorphisme de E défini par sa matrice dans la base B tel que $A = Mat_B(f)$. On alors $X' = f(X)$, si et seulement si, $V' = A.V$ où V et V' sont resp. les matrices colonnes de X et X' dans la base B. En particulier $B = B_c$ alors $X' = f(X)$, si et seulement si $X' = A.X$.

4.1 Matrice inverse

Soit A une matrice carrée d'ordre n donnée. S'il existe une matrice carrée B d'ordre n vérifiant la condition suivante :

$$A.B = B.A = I_n,$$

alors la matrice A est inversible et B est la matrice inverse de A que l'on note par : $B = A^{-1}$.

4.2 Matrice de passage

Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une autre base de E. On a :
$e'_1 \in E$, alors ils existent $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1} \in \mathbb{K}$ tels que $e'_1 = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 +$

$\cdots + a_{n,1}e_n$.
$e'_2 \in E$, alors ils existent $a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2} \in \mathbb{K}$ tels que $e'_2 = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + \cdots + a_{n,2}e_n$.
$e'_n \in E$, alors ils existent $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{K}$ tels que $e'_n = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \cdots + a_{n,n}e_n$.
La matrice carrée d'ordre n inversible :

$$P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

est appelée la matrice de passage de la base B à la base B'.

Remarques :

- Pour obtenir la matrice de la base B à la base B' il suffit d'écrire en colonne le coordonnées des vecteurs de la base B' par rapport à la base B.
- La matrice inverse de P notée P^{-1} est la matrice de passage de la base B' à la base B.

• Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme :
Soient B et B' deux bases de E. Soit P la matrice de passage de B à B'. Si $A = Mat_B(f)$ et $A' = Mat_{B'}(f)$ alors on a :

$$A' = P^{-1}AP.$$

5 Valeurs propres & Vecteurs propres

Définition 5.1 (Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme) *$\lambda \in \mathbb{K}$ est dite une valeur propre de f, si et seulement si, il existe au moins un vecteur $X \in E$ avec $X \neq 0$ tel que $f(X) = \lambda X$. Le vecteur non nul X est appelé alors un vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

Remarque : Le vecteur nul ne peut pas être un vecteur propre.

Définition 5.2 (Sous espace propre associé à une valeur propre) *Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f. On pose :*

$$E_\lambda(f) = \{X \in E = \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(X) = \lambda X\},$$

$E_\lambda(f)$ est donc l'ensemble de tous les vecteurs propres de f associés à λ auquel on ajoute le vecteur nul 0_E.

Proposition 4.1 *$E_\lambda(f)$ est un sous espace vectoriel de E appelé le sous espace propre de f associé à la valeur propre λ.*

Notation : Lorsque aucune confusion n'est à craindre et pour alléger les écritures on note E_λ au lieu de $E_\lambda(f)$.
Remarque : Le sous espace E_λ contient au moins un vecteur non nul donc $\dim E_\lambda \geq 1$.
Théorème : Si deux endomorphismes f et g de E permutent (c'est-à-dire $g \circ f = f \circ g$) alors $E_\lambda(f)$ est stable par g (c'est à $g(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f)$).

Remarque : Autre forme de E_λ :
$E_\lambda = \{X \in E = \mathbb{R}^n \text{ tel que } (f - \lambda id_E)(X) = 0\} = \ker(f - \lambda id_E)$.
$f - \lambda.id_E$ est un endomorphisme de E (combinaison linéaire d'endomorphisme de E).

6 Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice :

Soit A une matrice carrée d'ordre n donnée. On peut toujours supposer que A est la matrice d'un endomorphisme f quelconque de E relativement à la base canonique B_c.

Définition 6.1 *$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si et seulement si, il existe $X \in E, X$ non nul tel que $AX = \lambda X$.*

On a $\lambda \in \mathbb{K}$ est dite une valeur propre de A si et seulement si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f. c'est à dire il existe $X \in E$, X non nul tel que $f(X) = \lambda X$ c'est à dire il existe $X \in E, X$ non nul tel que $AX = \lambda.X$.

Polynôme caractéristique :
$\lambda \in \mathbb{K}$ est dite une valeur propre de f ou de A, si et seulement si, il existe au moins un vecteur $X \in E$ avec $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, si et seulement si, il existe au moins un vecteur $X \in E(X \neq 0)$ tel que $(A - \lambda I_n)X = 0$. On pose alors

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n),$$

P_A est un polynôme de degré n, appelé le polynôme caractéristique de A.
Théorème :
$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A ou de f, si et seulement si, $P_A(\lambda) = 0$ (c'est à dire λ est une racine du polynôme caractéristique de A).

Ordre de multiplicité d'une valeur propre :

- Si λ est une racine simple ou d'ordre 1 de $P_A(\lambda)$ on dit alors que λ est une valeur propre simple ou d'ordre 1.
- Si λ est une racine double ou d'ordre 2 de $P_A(\lambda)$ on dit alors que λ est une valeur propre double ou d'ordre 2.
- Si λ est une racine d'ordre k de $P_A(\lambda)$ on dit alors que λ est une valeur propre d'ordre k.

Remarque : L'ordre de multiplicité d'une valeur propre est très important. On va voir qu'il est directement lié à la dimension du sous espace propre E_λ.

Définition 6.2 (Spectre) *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f ou de la matrice A est appelé le spectre de f ou de A et est noté $Sp(f)$ ou $Sp(A)$.*

Calcul de la dimension E_λ
Théorème
Si λ est une valeur propre d'ordre k alors on a :

$$1 \leq dimE_\lambda \leq k.$$

En particulier : si λ est une valeur propre simple où d'ordre 1 alors : $dimE_\lambda = 1$.
Théorème
Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de A ou de f alors tout vecteur propre X_1 associé à λ_1 et vecteur propre X_2 associé à λ_2 sont linéairement indépendants (c'est-à-dire la famille $\{X1, X2\}$ est une famille libre).

7 Diagonalisation des matrices

7.1 Matrices semblables

Définition 7.1 *Deux matrices carrées A et B, d'ordre n, sont dites semblables, si et seulement si, il existe une matrice carrée P, d'ordre n, inversible tel que :*

$$B = P^{-1}AP$$

7.2 Matrice diagonalisable

Définition 7.2 *Une matrice carrée A d'ordre n est dite diagonalisable, si et seulement si, elle est semblable à une matrice diagonale d'ordre n. C'est-à-dire ils existent une matrice D diagonale d'ordre n, et une matrice carrée d'ordre n, P, inversible tel que :*

$$D = P^{-1}AP.$$

Théorème
Une matrice A est diagonalisable, si et seulement si, il exsiste une base de E formée par les vecteurs propres de A.
Théorème
Toute matrice symétrique A (c'est à dire ${}^tA = A$) est diagonalisable.

Remarque Si f est un endomorphisme de E, B une base de E et A la matrice de f dans la base B alors : La matrice A est diagonalisable, si et seulement si, l'endomorphisme f est diagonalisable.

Théorème
Si A est une matrice carrée d'ordre n, diagonalisable de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ alors on a :
$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ (somme de toutes les valeurs propres de A)
$\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n$(produit de toutes les valeurs propres de A).

Démonstration : Si A est diagonalisable et admet n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ distinctes de $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ et ils existent une matrice diagonale D d'ordre n et une matrice P d'ordre n, inversible, tel que : $A = P.D.P^{-1}$. Or $\det(A) = \det(P.D.P^{-1}) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(D)\frac{1}{\det(P)} = \det(D) = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n$

8 Différentes étapes pour étudier la diagonalisation d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n donnée. On peut toujours supposer que A est la matrice d'un endomorphisme f dans la base canonique B_C.

1. On calcule le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ et on résolve l'équation $P_A(\lambda) = 0$. On détermine alors n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ distinctes où confondues de A. (on peut classer les valeurs propres par ordre croissant , décroissant ou autre)
2. Pour chaque valeur propre λ_i $(1 \leq i \leq n)$ de A on détermine une base du sous-espace propre E_{λ_i} associé. Puis on regroupe toutes les bases de sous espaces propres associés dans une famille que l'on note B_p en respectant l'ordre choisi. La famille B_p ainsi obtenue est nécessairement libre d'après le théorème précédent.

On a alors deux possibilités :

i **Première possibilité :** si $Card(B_p) = n$ alors B_p est une base de E, appelée base propre, car B_p contient n vecteurs libres de E. La matrice A est donc diagonalisable car on a une base de vecteurs propores.

Donc B_p est nécessairement de la forme $B_p = (e'_1, e'_2 \ldots, e'_n)$ où e'_i est un vecteur propres associé à λ_i pour $i = 1, 2 \ldots n$.
Dans ce cas on pose : P la matrice de passage de la base canonique B_c à la base de vecteurs propres B_p. Pour obtenir la matrice P il suffit d'ecrire en colonne les coordonnées des vecteurs de la base B_p. La matrice D est une matrice diagonale telle que sur la diagonale principale on a les valeurs propres de A pris dans l'ordre indiqué.

ii **Deuxième possibilité** : si $Card(B_p) < n$ alors B_p n'est pas une base de E et dans ce cas on dit que la matrice A n'est pas diagonalisable.

Conclusion :
Pour qu'une matrice carrée A d'ordre n soit diagonalisable il faut et il suffit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de A soit égale à n. C'est à dire l'un des deux cas suivants :
• Si A admet n valeurs propres distinctes alors la matrice A est diagonalisable.
• Si la dimension de chaque sous-espace propre de A est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée alors la matrice A est diagonalisable.

9 Application de la diagonalisation

Calcul de la puissance d'une matrice carrée : Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si A est diagonalisable alors A admet n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes où confondues de $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ et ils existent une matrice diagonale D d'ordre n et une matrice carrée P d'ordre n, inversible , tel que :

$$A = P\, D\, P^{-1}.$$

On montre alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

Or, puisque D est une matrice diagonale on a :

$$D^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & (\lambda_n)^k \end{pmatrix}$$

et P^{-1} est la matrice inverse de P que l'on peut déterminer de plusieurs maniéres et on obtient alors A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

10 Exercices

Exercice 1

Calculer les déterminants des matrices suivants.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{lll} 2x & +3y & =0 \\ -x & +4y & =1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} 3x & -\;y & +2z & = & 0 \\ -x & +2y & -3z & = & 1 \\ x & +2y & +\;z & = & 2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lllcl} x & +y & +2z & = & 5 \\ x & -y & -\;z & = & 1 \\ x & & +\;z & = & 3 \end{array} \right.$$

en utilisant la méthode de Cramer.

Exercice 3

1/ La famille $(2,1,0)$, $(1,3,1)$, $(5,2,1)$ est-elle libre ?
2/ Soient dans $\mathbb{R}^3$ la familles de vecteurs $e_1 = (1,1,t)$, $e_2 = (1,t,1)$ et $e_3 = (t,1,1)$, $t \in \mathbb{R}$. Discuter suivant la valeur de t quand est-ce que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Exercice 4

Déterminer le noyau de l'application linéaire f, où f est donnée par :

$$f(e_1) = e_1 + 2e_3, f(e_2) = -e_1 + e_2 + 3e_3, \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + 7e_3.$$

Exercice 5

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 3 & 4-\lambda & 5 \\ 5 & 6 & 7-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 5 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 4 & 6 & 3-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 5 \\ 4 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 :

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^3$ données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égale à A.

1. Pour quelles valeurs de λ la matrice $A - \lambda\,\mathrm{Id}$, n'est pas inversible.
2. Déterminer $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 3\mathrm{Id})$.
3. En déduire une base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ pour laquelle la matrice D représentant l'endomorphisme f soit diagonale.
4. Déterminer une matrice P telle que $A = P\,D\,P^{-1}$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Montrer que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}.
6. En déduire que la système $A\,X = b$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, admet une solution unique noté X^* et la calculer.

Exercice 7 :

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2\mathrm{Id}$.

1. Calculer B^2 et B^3. En déduire l'expression de B^k en fonction de k.
2. En remarquant que $A = B + 2\mathrm{Id}$, calculer A^n.

Exercice 8 :

Soient a, b et c trois réels, deux à deux distincts. Soit l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ à valeur dans $\mathbb{R}^3$ et qui à tout polynômes P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le triplet $(P(a), P(b), P(c))$, c'est à dire :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3, \\ P & \longmapsto & (P(a), P(b), P(c)). \end{array}$$

1. Montrer que Φ est linéaire.

2. Donner la matrcie associée à Φ relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$.
3. On définie l'application

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}. \end{array}$$

a) Montrer que Ψ est un polynôme de degré inférieur ou égal à deux.
b) Que vaut $\Psi(a)$ et $\Psi(b)$?

c) En déduire que : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = (b-a)(x-a)(x-b)$.

4. L'application Φ est-elle bijective ? Justifier.

Exercice 9 :

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (c'est à dire $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$.) Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ à valeur dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x - y + z, -2x + y + 2z, -2x - y + 4z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. En déduire la représentation matricielle de f dans la base B.
   On notera A la matrice de f. (c'est à dire $A = \mathrm{Mat}(f, B)$.)
3. Pour quelles valeurs de λ la matrice $A - \lambda\,\mathrm{Id}$, n'est pas inversible.
4. Déterminer $\ker(f - \mathrm{Id})$, $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ et $\ker(f - 3\mathrm{Id})$.
5. En déduire une base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ pour laquelle la matrice D représentant l'endomorphisme f soit diagonale.
6. Déterminer une matrice P telle que $A = P\,D\,P^{-1}$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
7. Soient (x_n, y_n, z_n) trois suites réeles définies par leur premier terme x_0, y_0, z_0 et les relations de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n - y_n + z_n, \\ y_{n+1} & = & -2x_n + y_n + 2z_n, \\ z_{n+1} & = & -2x_n - y_n + 4z_n. \end{array} \right.$$

   Calculer x_n, y_net z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et n.

Exercice 10 :

Soit $I\!R^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'application f_m où $m \in I\!R$

$$\begin{array}{rcl} f_m : I\!R^3 & \longrightarrow & I\!R^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y - 2z, -y, -2x + 2y + mz) \end{array}$$

1. Pour quelles valeurs de m, f_m est-elle bijective ?
2. Calculer $f_m(e_1), f_m(e_2), f_m(e_3)$.
3. Déduire la matrice A_m associée à f_m dans la base $\mathcal{B}$.
4. On prend $m = 1$. Soient les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 0, -1)$, on note par $E_1 = \{u \in I\!R^3 / f_1(u) = -u\}$, $E_2 = \{u \in I\!R^3 / f_1(u) = 3u\}$ deux s.e.v de $I\!R^3$.
5. Montrer que E_1 est engendré par (u_1, u_2) et que E_2 engendré par u_3.
6. Montrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $I\!R^3$.
7. Calculer $f_1(u_1), f_1(u_2)$ et $f_1(u_3)$ et déduire la nature D la matrice de f_1 dans la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.

Exercice 11 :

Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tel que $mat_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Trouver une base B de $\mathbb{R}^2$ tel que $mat_B(f) = D$ diagonale.

Exercice 12 :

Soit $f \in \mathcal{L}^3(\mathbb{R})$ tel que $mat_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
Trouver une base B de $\mathbb{R}^3$ tel que $mat_B(f) = D$ diagonale.

Exercice 13 :

Soit $f \in \mathcal{L}^3(\mathbb{R})$ tel que $mat_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le pôlynome caractéristique.
2. Déterminer les valeurs propres de A
3. Déterminer les sous espaces propes.
4. Monter que f est diagonalisable.

5. Trouver P inversible, D diagonale tel que :
$$A = PDP^{-1}.$$
6. En déduire A^n.
7. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites définies par $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+1} &= a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} &= a_n - b_n + c_n \\ c_{n+1} &= a_n + b_n - c_n \end{cases}$$
Caculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 14 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $A = mat_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Trouver une base $B = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $T = mat_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Calculer T^n.
4. En déduire A^n.

Exercice 15 :

Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & f(P(x)) = \int_x^{x+1} P(t)\mathrm{d}t \end{array}$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $A = mat_{B_c}(f)$.
3. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 16 :

Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & f(P) = P'' - 2XP' \end{array}$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $A = mat_{B_c}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable ?
4. Caculer $f(P_3)$ avec $P_3 = X^2 - \frac{1}{2}$.
5. Trouver P inversible, D diagonale tel que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 17 :

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z) = (y, z, -4x + 4y + z)$, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer la matrice A de f relativement à la base B.
3. Calculer les valeurs propres de A.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Trouver une matrice P et une matrice D telles que $A = PDP^{-1}$.
6. Calculer P^{-1}
7. Donner l'expression de A^n.

11 Exercices Concours

Exercice 1 (Concours 2015) :

Soit M la matrice réelle carée d'ordre 3, définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. En déduire que M est diagonalisable.
3. Déterminer les sous espaces propres de M.
4. Déterminer P inversible de coefficients $(0, 1, 1)$ sur la troisième ligne, vérfiant : $M = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Calculer P^{-1}.
6. En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+(-1)^n}{2} & 0 & \dfrac{1-(-1)^n}{2} \\ 2^n - 1 & 2^n & 2^n - 1 \\ \dfrac{1-(-1)^n}{2} & 0 & \dfrac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Concours 2014) :

On considère M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que 2 et 4 sont des valeurs propres de M. Préciser leurs multiplicités.
2. Déterminer les sous espaces propres de M.
3. En déduire que M est diagonalisable.
4. Soient les matrices :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer qus S est inversible.
   (b) Calculer S^{-1}.
   (c) Donner la relation entre M, D et S.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$ montrer que :

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2.4^n & 4^n - 2^n & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 4^n - 2^n & 2.4^n \end{pmatrix}.$$

5. Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites définies par $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & x_n + \dfrac{1}{4} y_n \\ y_{n+1} & = & \dfrac{1}{2} y_n \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{4} y_n + z_n \end{cases}$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \frac{1}{4^n} M^n X_0$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_n & = & x_0 + \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{2^n}) y_0 \\ y_n & = & \dfrac{1}{2^n} y_0 \\ z_n & = & \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{2^n}) y_0 + z_0 \end{cases}$$

Exercice 3 (Concours 2012) :

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini dans la base canonique, par sa matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer P inversible de 3ième ligne $\ell_3 = (1 \quad 1 \quad 1)$ et vérifiant la relation
$$P^{-1}AP = D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
4. Calculer P^2 puis en déduire P^{-1}.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que :
$$A^n = \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(2^n-1) & 2^n & 0 \\ 3^n - 2^{n+1} + 1 & 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Concours 2009) :

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ de sa base canonique $b = (1, X, X^2)$. Soit T l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$p \in \mathbb{R}_2[X],\ T(p)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tp(t)dt, & si \quad x \neq 0 \\ \dfrac{f(0)}{2} & x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $T(p) \in \mathbb{R}_2[X]$ pour tout $p \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que T est un endomorphisqme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice A de T par rapport à la base b.
4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de A.
5. Calculer A^n pour n entier ≥ 2.
6. Calculer en fonction de $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, la suite de vecteurs colonnes (U_n) définie par :
$$U_{n+1} = AU_n, \quad n \geq 0$$

où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (Concours 2008) :

On considÃ¨re la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Donner l'expression de M^n en fonction de $n \geq 2$.

Exercice 6 (Concours 2007) :

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini dans la base canonique, par sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que 1 et 2 sont les deux valeurs propres de A. Préciser leurs multiplicités.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres (v_1, v_2, v_3) de f, telle que la troisième composante de chacun des vecteurs soit égale à 1.
4. En déduire P inversible, D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

5. Calculer P^{-1}.
6. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites définies par $x_0, y_0, z_0 \in I\!R$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + y_n - z_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + 2y_n - z_n) \\ z_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + y_n) \end{cases}$$

Caculer x_n, y_n et z_n en fonction de n et de x_0, y_0, z_0.

Exercice 5 (Concours 2000) :

Soit f l'endomorphise de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Monter que f est bijective.
2. Vérifier que :
$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0,$$
I_3 désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire A^{-1}
4. Soit $V_1 = e_1 + e_2 - 2e_3$. Calculer $f(V_1)$. Que peut-on conclure ?
5. Déterminer le polynôme caratéristique de la matrice A.
6. Déterminer en utilisant 4) les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.
7. En déduire que A est semblable à une matrice diagonale.

Chapitre 5

Fonctions à plusieurs variables

1 Espace $\mathbb{R}^n$

On appelle espace $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) un ensemble de couples (resp .triplets) de nombres réels. Un élément de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est appelé point et est noté par une lettre majuscule.
Soit $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$ deux points de $\mathbb{R}^2$ on a alors : $X = X'$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.
Soit $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ deux ponts de $\mathbb{R}^3$ alors : $X = X'$ si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

2 Notions de normes et de distances :

Définition 2.1 (Norme) *On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ $(n = 2$ ou $3)$ toute application N de $\mathbb{R}^n$ dans $R+$ satisfaisant aux trois conditions suivantes : quelque soient $X \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$*

- $N(X) = 0$, *si et seulment si,* $X = 0_{\mathbb{R}^n}$
- $N(\alpha X) = |\alpha| N(X)$
- $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$ *(Inégalité triangulaire)*

Définition 2.2 *L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme s'appelle espace vectoriel normé.*

Normes équivalentes : deux norme N et N' sur $\mathbb{R}^n$ sont dites équivalentes si et seulement si il existe deux réels strictement positifs k_1 et k_2 tels que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad N(X) \leq k_1 N'(X) \quad \text{ et } N'(X) \leq k_2 N(X).$$

Normes usuelles

• N_1 :
– Dans $\mathbb{R}^2$, $\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $N_1(X)=\sqrt{x^2+y^2}$
– Dans $\mathbb{R}^3$, $\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$, $N_1(X)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
• N_2 :
– Dans $\mathbb{R}^2$, $\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $N_2(X)=|x|+|y|$
– Dans $\mathbb{R}^3$, $\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$, $N_2(X)=|x|+|y|+|z|$
• N_∞ :
– Dans $\mathbb{R}^2$, $\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $N_\infty(X)=\max(|x|,|y|)$
– Dans $\mathbb{R}^3$, $\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$, $N_\infty(X)=\max(|x|,|y|,|z|)$

Remarque On montre facilement que N_1, N_2 et N_∞ (dans les deux cas $n=2$ ou 3) vérifient les trois propriétés (voir définition de la norme) et que ces normes N_1, N_2, N_∞ de $\mathbb{R}^n$ ($n=2$ ou 3) sont trois normes deux à deux équivalentes.
Dans toute la suite et pour tout $X\in\mathbb{R}^n$ on note par : $\|X\|_n$ l'une des trois normes équivalentes $N_1(X), N_2(X)$ et $N_\infty(X)$.
La norme N_1 est appelée la norme euclidienne et l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de cette norme est appelé l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.
Lorsqu' aucune confusion n'est à craindre et pour alléger les écritures on note $\|X\|$ au lieu de $\|X\|_n$.

Distance associée à une norme :

Définition 2.3 *La distance associée à la norme $\|\cdot\|$ est l'application d de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par pour tout $X\in\mathbb{R}^n$ et pour tout $Y\in\mathbb{R}^n$:*

$$d(X,Y)=\|X-Y\|.$$

Propriétés : d désigne la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ alors pour tout $X\in\mathbb{R}^n$, pour tout $Y\in\mathbb{R}^n$ et pour tout $Z\in\mathbb{R}^n$:
– $d(X,Y)=0 \iff X=Y$
– $d(X,Y)=d(X,Y)$
– $d(X+Z,Y+Z)=d(X,Y)$
– $d(X,Z)\le d(X,Y)+d(Y,Z)$

3 Boules ouvertes - Boules fermées

Définition 3.1 *Dans $\mathbb{R}^n$ muni la norme $\|\cdot\|$, la boule ouverte de centre $X_0\in\mathbb{R}^n$ et de rayon $r>0$ notée $B_O(X_0,r)$ est définie par :*

$$B_O(X_0,r)=\{X\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } d(X,X_0)=\|X-X_0\|<r\}.$$

Dans $\mathbb{R}^n$ muni la norme $\|\cdot\|$, La boule fermée de centre $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ notée $B_F(X_0, r)$ est définie par :

$$B_F(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } d(X, X_0) = \|X - X_0\| \leq r\}.$$

Exemples : Boules ouverts et de boules fermées dans le cas de $\mathbb{R}^2$:
• Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $N_1(X) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$,
$B_O(O, r)$ (resp. $B_F(O, r)$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre O et de rayon r.
• Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $N_2(X) = |x| + |y|$,
$B_F(O, r)$ est le carré fermé centré en O origine du repère et de sommets les points $(r, r), (-r, r), (r, -r)$ et $(-r, -r)$.

Définition 3.2 (Parties bornées) *Une partie A de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|$ est dite bornée si et seulement si l'une des quatre assertions équivalente suivantes est satisfaite :*

- *A est inclus dans une boule fermée.*
- *Il existe $k > 0$ tel que pour tout $X \in A$; $\|X\| \leq k$.*
- *Il existe $k > 0$ tel que pour tout $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$; $|x_i| \leq k$*
- *Il existe $k > 0$ tel que pour tout $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$; $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq k$*

Définition 3.3 (Voisinage d'un point) *Dans $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) muni de la norme $\|\cdot\|$ une partie V_x de $\mathbb{R}^n$ est voisinage du point $X \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si V_x contient une boule ouverte centrée en X.*

4 Fonctions de plusieurs variables réelles

4.1 Fonctions de plusieurs variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition 4.1 *On appelle fonction de n ($n = 2$ ou $n = 3$) variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$, toute application f d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.*
• *Cas $n = 2$*

$$\begin{array}{rcl} f : D \in \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

• *Cas $n = 3$*

$$\begin{array}{rcl} f : D \in \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) \end{array}$$

D est appelé de domaine de définition de la fonction de la fonction f que l'on note en général par D_f.

4.2 Fonctions de plusieurs variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^p$:

Définition 4.2 *On appelle fonction $(n = 2$ ou $n = 3)$ variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $(p = 2$ ou $p = 3)$ toute application f d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.*

Cas $n = 2$ et $p = 2$;

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{array}$$

Cas $n = 2$ et $p = 3$:

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) \end{array}$$

Cas $n = 3$ et $p = 2$:

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) \end{array}$$

Cas $n = 3$ et $p = 3$:

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) \end{array}$$

La donnée d'une fonction f de n variables réelles à valeurs $\mathbb{R}^p$ équivaut à la donnée de p fonction f_i de n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ appelée fonctions partielles.

Définition 4.3 (Notion de limites) *Soit f une fonction de n variables à des valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^p$), définie sur un voisinage V_{X_0} du point $X_0 \in \mathbb{R}^n$, sauf éventuellement en X_0. On dit que la fonction f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ (resp. $l \in \mathbb{R}^p$) au point X_0 si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $X \in V_{X_0}$ vérifiant

$$\|X - X_0\| \leq \eta \text{ on a } |f(X) - l| \leq \varepsilon \text{ (resp. } \|f(X) - l\|_p \leq \varepsilon \text{).}$$

Notation : On écrit alors $\lim_{X \to X_0} f(X) = l$.

Remarque : la définition de la limite de fonction de plusieurs réelles est analogue à celle de la limite de fonction d'une seule variable réelle. Ainsi on généralise tous les limites de fonctions d'une seule variable réelle au cas des limites de fonctions de plusieurs variables réelles. En particulier : somme, produit, quotient, composée, inégalités, encadrement, etc ...

5 Fonctions de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$:

Définition 5.1 *Soit f une fonction de deux variables réelles dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage $V_{(a,b)}$ du point (a,b). On dit que la fonction f admet pour limite l ($l \in R$) au point (a,b) si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe } \eta > 0 \text{ tel que pour tout } (x,y) \in V_{(a,b)} \text{ vérifiant}$$

$$\|(x,y)-(a,b)\| \leq \eta \text{ on a } |f(x,y)-l| \leq \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$.

Conséquences de la définition :

- Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ existe et est finie alors pour toutes courbe Γ passant par le point (a,b), la limite de $f(x,y)$ au point (a,b) suivant la direction de la courbe , notée par $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)_{(x,y)\in\Gamma}} f(x,y)$ est égale à l.
- S'il existe deux courbe Γ_1 et Γ_2 passant par le point (a,b) et telle que :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)_{(x,y)\in\Gamma_1}} f(x,y) \neq \lim_{(x,y)\to(a,b)_{(x,y)\in\Gamma_2}} f(x,y)$$

alors $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)_{(x,y)}} f(x,y)$ n'existe pas.

On rappelle que si la courbe Γ est d'équation $y = \Psi(x)$ ou $x = \Phi(y)$ alors :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)_{(x,y)\in\Gamma}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x,\Psi(x)) = \lim_{y\to b} f(\Phi(y),y).$$

6 Etude de limite d'une fonction de deux variables réelles en un point

Pour étudier l'existence de la limite suivante : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ et la calculer lorsqu'elle existe, on procède de la manière suivante :
Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère les droites D_m, passant par le point (a,b) et de pente m , d'équations : $y = m(x-a)+b$ et on calcule

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)_{(x,y)\in D_m}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x, m(x-a)+b)$$

Deux possibilités peuvent avoir lieu :

1. Premier Possibilité : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)_{(x,y)\in D_m}} f(x,y)$ dépend du paramètre m, on dira alors que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ n'existe pas.
2. Deuxième Possibilité : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)_{(x,y)\in D_m}} f(x,y)$ ne dépend pas du paramètre m et est égale à $l \in \mathbb{R}$. Dans ce cas nous avons deux éventualités :
   a. Premier éventualité : il existe une autre courbe Γ passant par le point (a,b) et telle que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)_{(x,y)\in\Gamma}} f(x,y) = l'$ avec $l' \neq l$, on dira alors que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ n'existe pas. (En général l'équation d'une telle courbe Γ sera avancée).
   b. Deuxième Eventualité : il n'existe pas une autre courbe Γ passant par le point (a,b) et telle que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)_{(x,y)\in\Gamma}} f(x,y) \neq l$ (En général lorsque aucune équation de courbe n'est avancée) , on dira alors que si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe elle ne peut être qu'égale à l et on doit le confirmer par un moyen ou un autre (définition, comparaison, ...).

Pour la confirmation on utilise en général le théorème suivant dont l'analogue vu dans le cas des limites des fonctions d'une seule variable.
Théorème
S'il existe une fonction $g(x,y)$ définie sur un voisinage $V_{(a,b)}$ du point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, sauf éventuellement en (a,b) et vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{pour tout } (x,y) \in V_{(a,b)}, \quad |f(x,y) - l| \leq g(x,y), \\ \\ \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 0, \end{cases}$$

alors la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe et on a : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$.

7 Continuité

Définition 7.1 *Soit f une fonction de n ($n = 2$ ou $n = 3$) variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^p$) définie sur voisinage V_{X_0} du point $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Le fonction f est continue au point X_0 si et seulement si $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = f(X_0)$.*

Cas D'une fonction deux variables :

Définition 7.2 *Soit f une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^p$) , définie sur un voisinage $V_{(a,b)}$ du point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. La fonction f est continue au point (a,b) si et seulement si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.*

Remarque : La définition de la continuité de fonction de plusieurs variables réelles est analogue à celle de la continuité de fonction d'une seule variable réelle au cas de la continuité de fonction de plusieurs variables réelles. En particulier : somme, produit, quotient composée, etc ...

Dans la pratique : Pour étudier la continuité d'une fonction f de deux variable réelle définie sur un voisinage $V_{(a,b)}$ au point (a, b) connaissant $f(a, b)$ on étudie la limite suivante $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$.

- Si cette limite est égale à $f(a, b)$ on dit alors que la fonction f est continue au point (a, b).
- Si cette limite existe et est différente de $f(a, b)$ ou n'existe pas on dit alors que la fonction f n'est pas continue au point (a, b)

8 Differentabilité, dérivées partielles :

Définition 8.1 (Différentiabilité d'une fonction de n variables réelles) *Soit f une fonction de n variables réelles à valeur dans R définie sur un voisinage V_X du point $X \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$ telle que $X + h \in V_X$. La fonction f est dite différentiable au point X si et seulement si on peut écrire :*

$$f(X + h) - f(X) = df_X(h) + \varepsilon_X(h)\|h\|$$

où df_X est une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui à $h \in \mathbb{R}^n$ associe $df_X(h)$ (df_X est appelée la différentielle de f au point X). ε_X est une fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui à $h \in \mathbb{R}^n$ associe $\varepsilon_X(h)$ vérifiant $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_X(h) = 0$.

Définition 8.2 (Dérivées partielles d'une fonction de n variables réelles) *Soit f une fonction de n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage V_X du point $X = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si pour tout $i = 1, 2, ..., n$:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{h},$$

existe et est finie on dira a lorsque la fonction f admet une dérivée partielle relativement à la variable x_i, que l'on note par $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{h}.$$

Théorème : Soit f une fonction de n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage V_X du point $X = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si la fonction f admet, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, des dérivées partielles continues au point X alors f est dite différentiable au point X et sa différentielle df_X est donnée par : pour tout $h = (h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$df_X(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)h_n.$$

Définition 8.3 (Gradient) *Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, le gradient de f au point X est défini par :*

$$< grad_f(X), h >= df_X(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)h_n.$$

8.1 Cas d'une fonction de deux variables

Soit f une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage $V_{(a,b)}$ du point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Différentiabilité
La fonction f est dite différentiable au point (a, b) si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ telle que $(a + x, b + y)$ appartienne à $V_{(a,b)}$ on a :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(a+x, b+y) - f(a,b) - df_{(a,b)}(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0,$$

où $df_{(a,b)}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)y$.
Dans la pratique : Pour étudier la différentiabilité d'une fonction f de deux variables réelles au point (a, b) connaissant $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, on étudie la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(a+x, b+y) - f(a,b) - (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)x + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)y)}{\|(x,y)\|}$$

- Si cette limite est égale à 0 on dit alors la fonction f est différentiable au point (a, b).
- Si cette limite existe et est différente de 0 ou n'existe pas on dit alors que la fonction f n'est pas différentiable au point (a, b).

8.2 Cas d'une fonction de trois variables

Soit f une fonction de trois variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage $V_{(a,b,c)}$ du point $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

Dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b,c)-f(a,b,c)}{h} \ , \\
\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h,c)-f(a,b,c)}{h} \ \text{et} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b,c+h)-f(a,b,c)}{h}.
\end{aligned}$$

Différentiabilité La fonction f est dite différentiable au point (a,b,c) si pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ telle que $(a+x,b+y,c+z)$ appartienne à $V_{(a,b,c)}$ on a :

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(a+x,b+y,c+z)-f(a,b,c)-df_{(a,b,c)}(x,y,c)}{\|(x,y,z)\|} = 0$$

où $df_{(a,b,c)}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)y + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)z$.

Gradient : Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, le gradient de f au point $X=(x,y,z)$ est défini par :

$$< grad_f(x,y,z), h=(h_1,h_2,h_3) >= df_{(x,y,z)}(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(X)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(X)h_2+\frac{\partial f}{\partial z}(X)h_3.$$

Fonction de classe de classe C^1 Une fonction f de n ($n=2$ ou $n=3$) variables réelles est dite de classe C^1 en un point X de $\mathbb{R}^n$ (resp. sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$) si et seulement si f admet des dérivées partielles continues au point X (sur le domaine D).

9 Matrices Jacobiennes

Définition 9.1 *Soit f une fonction de n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et X un point de $\mathbb{R}^n$. La matrice Jacobienne de la fonction f en point X est un matrice à p lignes et n colonnes notée par $J_f(X)$ et définie par :*

$$J_f(X) = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X)\Big)_{(1\le i\le p \ \ et \ \ 1\le j\le n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(X) \end{pmatrix}$$

est appelée la matrice Jacobienne de la fonction f.

Matrices Jacobiennes dans les cas : $n = 2$ ou 3 et $p = 2$ ou 3 :

- Cas $n = 2$ et $p = 2$: si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ alors :
$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$
- Cas $n = 2$ et $p = 3$: si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$ alors :
$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$
- Cas $n = 3$ et $p = 2$: si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$ alors :
$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$
- Cas $n = 3$ et $p = 3$: si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y;z))$ alors :
$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

10 Dérivées partielles d'ordre supérieurs-Théorème de Schwarz :

Définition 10.1 *Soit f une fonction de n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage V_X du point $X = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si pour $i = 1, 2, \ldots, n$ la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet à son tour une dérivée partielle par rapport à la variable x_j avec $j = 1, 2, \ldots, n$ au point X, cette dérivée partielle est appelée la dérivée partielle seconde de f relativement aux variable x_i et x_j et notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)$ et on a :*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(X).$$

Théorème de l'inversion (Schwarz) :

Soit f une fonction de n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur voisinage

V_X du point $X = (x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si la fonction f admet des dérivées partielle secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X)$ continues au point X alors on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X).$$

Conséquence du théorème de L'inversion : si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X)$ alors l'une au moins des deux dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X)$ n'est pas continue au point X.

Fonction de classe de classe C^2 : Une fonction f de n variables réelles est dite de classe C^2 en un point X de $\mathbb{R}^n$ (resp. sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$) si et seulement si f admet des dérivées partielles secondes continues au point X (sur le domaine D).

• Cas d'une Fonction de deux variables : Soit f une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage $V_{(a,b)}$ du point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si la fonction f admet des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues au point (a, b) alors on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b).$$

Conséquence du théorème de l'inversion : Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ alors l'une au moins des deux dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ n'est pas continue au point (a, b).
Une fonction f de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite de classe C^2 en un point (a, b) de $\mathbb{R}^2$ (resp. sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$) si et seulement si les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues au point (a, b) de $\mathbb{R}^2$ (resp. sur le domaine D).

11 Dérivées partielles de fonctions composées

Définition 11.1 (Dérivée de fonction composée d'une seule variable) *Soient trois fonctions*

$$\begin{array}{rcl} U : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & U(x) \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} V : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & V(x) \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

On pose $F(x) = f(U(x), V(x))$ la fonction F ainsi définie est appelée fonction composée d'une seule variable.

Théorème : si les fonction U et V sont dérivables au point $x \in \mathbb{R}$ et si f est une fonction admettant des dérivées partielles premières continues au point $(U(x), V(x))$ alors la fonction F est dérivable au point x et on a :

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(U(x), V(x))U'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(U(x), V(x))V'(x).$$

Dérivées partielles de fonction composée de deux variables :
Définition : Soient trios fonctions

$$\begin{array}{rcc} U : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & U(x,y) \end{array}, \quad \begin{array}{rcc} V : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & V(x,y) \end{array} \text{ et } \begin{array}{rcc} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

On pose $F(x,y) = f(U(x,y), V(x,y))$ la fonction F ainsi définie est appelée fonction composée de deux variables.
Théorème : Si les fonctions U et V admettent des dérivées partielles au point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et si f est une fonction admettant des dérivées partielles premières continues au point $(U(x,y), V(x,y))$ alors la fonction F admet des dérivées partielles premières au point (x,y) et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(U(x), V(x))\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(U(x), V(x))\frac{\partial V}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(U(x), V(x))\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(U(x), V(x))\frac{\partial V}{\partial y}(x,y)$$

On schématise par

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}$$

12 Formes différentielles

Formes différentielles de deux variables

Définition 12.1 *On appelle forme différentielle de deux variables réelles x et y , toute expression, notée $w(x,y)$ et définie de la manière suivante :*

$$w(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

où $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont deux fonctions des deux variables réelles x et y.

Définition 12.2 *La forme différentielle de deux variables réelles* $w(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *où* $P(x,y)$ *et* $Q(x,y)$ *sont deux fonctions de classe* C^1 *sur* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *est dite exacte (totale ou intégrable) sur* Ω *si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$\textit{pour tout } (x,y) \in \Omega; \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Intégration d'une forme différentielle exacte
Intégrer sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la forme différentielle exacte $w(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ revient à déterminer toutes les fonctions $f(x,y)$ définies sur Ω et vérifiant la condition suivante : $w(x,y) = df(x,y)$.

Pour la détermination des $f(x,y)$ on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned} w(x,y) = df(x,y) \quad &\Longleftrightarrow \quad P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & P(x,y) & (I) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & Q(x,y) & (II) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Selon la facilité du calcul intégral ,on commence par intégrer (I) par rapport à x puis on remplace dans (II) ou bien on commence intégrer (II) par rapport à y puis on remplace dans (I).

13 Extremums relatifs ou locaux

Définition 13.1 *Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *définie au voisinage du point* $X_0 \in \mathbb{R}^n$. *On dit que la fonction* f *admet un maximum local au point* X_0, *si et seulement si, il existe un voisinage* V_{X_0} *et tel que pour tout* $X \in V_{X_0}$ *on a*

$$f(x) \leq f(X_0).$$

On dit que la fonction f *admet un minimum local au point* X_0, *si et seulement si, il existe un voisinage* V_{X_0} *et tel que pour tout* $X \in V_{X_0}$ *on a*

$$f(x) \geq f(X_0).$$

Un extremum local est soit un maximum local soit un minimum local.

Théorème : soit f une fonction de n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f admet un extremum local au point $X \in \mathbb{R}^n$ et si admet des dérivées partielles premières au point X alors :

$$\text{pour tout } i = 1, \ldots, n \quad \text{on a} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = 0.$$

La réciproque n'est pas en général vraie.

Cas d'une fonction de deux variables : Soit f une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage $V_{(a,b)}$ du point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que la fonction f admet un maximum local au point (a,b), si et seulement si, il existe un voisinage $V_{(a,b)}$ tel que :

$$\text{pour tout } (x,y) \in V_{(a,b)} \quad \text{on a} \quad f(x,y) \leq f(a,b).$$

On dit que la fonction f admet un minimum local au point (a,b) si et seulement si il existe un voisinage $V_{(a,b)}$ tel que :

$$\text{pour tout } (x,y) \in V_{(a,b)} \quad \text{on a} \quad f(x,y) \geq f(a,b).$$

Théorème Soit f est fonction de deux variables réelles à valeurs dans R. Si f admet un extremum local au point (a,b) alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

La réciproque n'est pas en général varie.

Définition 13.2 *Soit f une fonction de deux variables réelles à valeur dans R définie sur un voisinage $V_{(a,b)}$ du point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si f admet des dérivées partielles premières au point (a,b) et si $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ alors le point (a,b) est appelé un point critique.*

– Tout extremum local est un point critique.
– Un point critique n'est pas nécessairement un extremum local.

Formule de Taylor pour les fonctions de deux variables à l'ordre 2 **:** Soit f une fonction de deux variables réeles à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et de classe C^2 sur un voisinage $V_{(a,b)}$ du point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(a+x, b+y) \in V_{(a,b)}$ alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(a+x,b+y) &= f(a,b) + x\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + y\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{x^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta x, b+\theta y) \\ &+ \frac{xy}{1!1!}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta x, b+\theta y) + \frac{y^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta x, b+\theta y) \end{aligned}$$

Etude d'un point critique :
Soit f une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et de calasse C^2 sur un voisinage $V_{(a,b)}$ du point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et (a,b) un point critique de f. On calcule : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = r$; $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = s$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = t$.

- Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$ alors le point (a, b) est un minimum local.
- Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$ alors le point (a, b) est un maximum local.
- Si $s^2 - rt > 0$ alors le point (a, b) n'est ni un minimum local ni un maximum local.
- Si $s^2 - rt = 0$ alors il faudra étudier de prés le signe de $f(x, y) - f(a, b)$ pour (x, y) très proche de (a, b) en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2.

14 Exercices

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de f.
2. En déduire que le seul point critique de f est $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.
3. Vérifier que $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right) = f(x, y) + \frac{1}{6}$.
4. Calculer $f(A) = f(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. En déduire que A est un minimum global.

Exercice 2 : (HEC 2010)

On considère la fonction f définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1. Montrer que, pour tout couple (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :

$$f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}.$$

2. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
3. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.
4. Déterminer les dérivées partielles secondes de f et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
5. (a) Comparer les réels $(x + y)^2$ et $4xy$.
   (b) En déduire que f admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.

6. Soit g la fonction définie pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln x - \ln y.$$

Montrer que : $\forall(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $g(x, y) \geq 2\ln 2$.

Exercice 3 : (EML 2012)

Partie I : étude d'une fonction d'une variable réelle

On considére l'application $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0; +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0; +\infty[$.
3. Dresser le tableau des variations de f. On prècisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f est convexe sur $]0; +\infty[$.
5. On note Γ la courbe reprèsentative de f dans un repére orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$
   (a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.
   (b) Déterminer les points d'intersection de Γ et, de l'axe des abscisses.
   (c) Préciser la nature de la branche infinie de Γ.
   (d) Tracer l'allure de Γ. On admet : $0,36 \leq e^{-1} < 0,37$.

Partie Il : étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$, de classe C^2, définie, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ par :

$$F(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0; +\infty[^2$.
2. Montrer que (e, e) est un point critique de F.
3. Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x, y) de $]0; +\infty[^2$. Est-ce que F admet, un extremum local en (e, e) ?

Chapitre 6

Les intégrales doubles

1 Intégrale double sur un rectangle

Définition 1.1 *On appelle rectangle tout domaine D de $\mathbb{R}^2$ décrit de la manière suivante :*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$$

où a, b, c et d sont quatre réels tels que $a < b$ et $c < d$.
Un tel rectangle D est noté par : $D = [a, b] \times [c, d]$.

Définition 1.2 *Soient $D = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de 2 variables réelles continue sur D. L'intégrale double de f sur D, notée $\int\int_D f(x, y)dxdy$, est dèfinie par :*

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy.$$

• Si $D = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et si f est une fonction qui peut se mettre sous la forme $f(x, y) = u(x)v(y)$ où u est une fonction de x et v est une fonction de y alors on a :

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} u(x)v(y)dxdy = \left(\int_a^b u(x)dx\right) \left(\int_c^d v(y)dy\right)$$

• Les seules parties vraiment simples de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Mais dans $\mathbb{R}^2$, il y a beaucoup de parties raisonnables qui interviennent de manière naturelle, par exemple un pavé, un triangle, un disque...
Pour calculer l'intégrale de f (continue) sur D (avec D "bon domaine" quelquonque). Nous pratiquons la méthode des deux intégrations successives.

Nous admettons que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les effectue.

Remarque : Il arrive que l'un des calculs soit plus difficile que l'autre, ou même soit impossible. Dans ce cas il faut penser à intervertir l'ordre des intégrations.

2 Intégrale double sur un domaine quelconque de $\mathbb{R}^2$

Soit Ω un domaine quelconque de $\mathbb{R}^2$ le domaine Ω peut être décrit de deux types différents.

Définition 2.1 (Domaine de type I)

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq x \leq b \text{ et pour tout } x \in [a, b], \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)\}$$

où Φ_1 *et* Φ_2 *sont deux fonctions de* x *vérifiant pour tout* $x \in [a, b]$ $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(x)$.

Définition 2.2 (Domaine de type II)

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } c \leq y \leq d \text{ et pour tout } y \in [c, d], \Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y)\}$$

où Ψ_1 *et* Ψ_2 *sont deux fonctions de* y *vérifiant pour tout* $y \in [c, d]$ $\Psi_1(y) \leq \Psi_2(y)$.

Définition 2.3 (Intgrales succesives) *Soient* Ω *un domaine quelconque de* $\mathbb{R}^2$ *et* $f(x, y)$ *une fonction de deux variables réelles continue sur* Ω *.*

1. *Si* Ω *est un domaine du type I telle que :*

   $$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq x \leq b \text{ et pour tout } x \in [a, b], \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)\}$$

   Alors l'intégrale double de f *sur* Ω*, notée* $\int\int_\Omega f(x, y)dxdy$*,est définie par :*

   $$\int\int_\Omega f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

   Il faut intégrer d'abord par rapport à y*, pour* x *fixé, puis intégrer le résultat par rapport à* x*.*

2. *Si Ω est un domaine du type II telle que :*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } c \leq y \leq d \text{ et pour tout } y \in [c, d], \Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y)\}$$

Alors l'intégrale double de f sur Ω, notée $\int\int_\Omega f(x, y)dxdy$,est définie par :

$$\int\int_\Omega f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x, y)dx\right) dy.$$

Il faut intégrer d'abord par rapport à x, pour y fixé, puis intégrer le résultat par rapport à y.

3 Propriétés des intégrales doubles

• **Linéarité :**

Soient f et g deux fonctions continues sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\int\int_\Omega \Big(f(x, y) + g(x, y)\Big)dxdy = \int\int_\Omega f(x, y)dxdy + \int\int_\Omega g(x, y)dxdy, \\ \displaystyle\int\int_\Omega \alpha f(x, y)dxdy = \alpha \int\int_\Omega f(x, y)dxdy. \end{cases}$$

• **Additivité :**

Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines quelconque de $\mathbb{R}^2$ tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ où au plus égale à une frontière et f une fonction continue sur $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ alors :

$$\int\int_\Omega f(x, y)dxdy = \int\int_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x, y)dxdy = \int\int_{\Omega_1} f(x, y)dxdy + \int\int_{\Omega_2} f(x, y)dxdy.$$

• **Ordre :**

Soient f et g deux fonctions continues sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$

Si pour tout $(x, y) \in \Omega$ on a $f(x, y) \leq g(x, y)$ alors $\displaystyle\int\int_\Omega f(x, y)dxdy \leq \int\int_\Omega g(x, y)dxdy.$

En particulier

Si pour tout $(x, y) \in \Omega$ on a $f(x, y) \geq 0$ alors $\displaystyle\int\int_\Omega f(x, y)dxdy \geq 0.$

• **Inclusion :**

Si Ω_1 et Ω_2 sont deux domaines quelconques de $\mathbb{R}^2$ tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$ et f est une fonction, continue et positive sur Ω_2 alors :

$$\int\int_{\Omega_1} f(x, y)dxdy \leq \int\int_{\Omega_2} f(x, y)dxdy.$$

• **Valeur absolue :**
Soit f une fonction continue sur Ω alors on a :

$$\left|\int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy\right| \leq \int\int_{\Omega} |f(x,y)|dxdy.$$

3.1 Aire d'un domaine borné quelconque de $\mathbb{R}^2$

L'aire d'un domaine quelconque Ω de $\mathbb{R}^2$, notée $\mathcal{A}(\Omega)$, est donnée par :

$$\mathcal{A}(\Omega) = \int\int_{\Omega} dxdy.$$

4 Changement de variables

Coordonnées polaires : Dans un repère orthonormé (O, i, j) on peut repérer un point quelconque M par ses coordonnées cartésiennes (x, y) ou par ses coordonnées polaire (r, θ) :

- $r = OM$ la distance de l'origine O du repère au point M.
- $\theta =< \widehat{i, (OM)} >$ l'angle des vecteurs i et (OM).
- $x = (OM).i$ et $y = (OM).j$

Relation entre (x, y) et (r, θ) :
Lorsque (x, y) varie dans $\mathbb{R}^2$ alors (r, θ) varie dans $\mathbb{R}^2$ varie dans $[0, +\infty[\times[0, 2\pi]$ ou $[0, +\infty[\times[-\pi, \pi]$.
Soit l'intégrale double suivante :

$$I = \int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

où f n'admet pas de primitive facile ni par rapport à x ni par rapport à y. On effectue alors le changement de variables en coordonnées polaires. En effet on considère l'application $\varphi : [0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ définie par

$$\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

On a la formule suivante :

$$\text{si} \quad \varphi(T) = \Omega, \quad \text{alors} \quad \int\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{T} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\,dr\,d\theta.$$

On note que T est le domaine de $\mathbb{R}^2$ tel que lorsque (x, y) varie dans Ω alors (r, θ) varie dans T.
En pratique
On commence par décrire le domaine Ω en fonction des coordonnées polaires

(r et θ). On obtient alors un nouveau domaine T. Ensuite on change x par $r\cos\theta$, y par $r\sin\theta$ et $dxdy$ par $r\,dr\,d\theta$. Il s'agit d'un changement de variables, une opération analogue à celle qui a été paratiquée pour les intégrales simples !

Formule générale de changement de variables
Le changement de variable est défini par une application : $\Phi : U \to V$, où U et V sont des domaines (ouverts) de $\mathbb{R}^2$. Pour pouvoir faire le changement de variables Φ, il suffit que Φ soit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'en tous point de U, la matrice Jacobienne de Φ ait son déterminant non nul. Cette dernière condition s'écrit : $\det(J_\Phi(a,b)) \neq 0$ pour tous $(a,b) \in U$. Supposons que T est un bon domaine contenu dans U et considérons le domaine $\Omega = \Phi(T)$. Si $f : \Delta \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors la composée $f \circ \Phi$ est définie sur D et la formule de changement de variables est :

$$\int\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_T f(\Phi(u,v))\,|\det J_\Phi(u,v)|du\,dv$$

Important

Avant de calculer une intégrale double,
dessiner le domaine sur lequel il faut intégrer.

5 Exercices

Exercice 1 :

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $I = \displaystyle\int\int_D x\,y\,dx\,dy$, avec $D = \{(x,y);\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$.
2. $I = \displaystyle\int\int_D \frac{dx\,dy}{x+y+1}$ avec $D = [0,1]\times[0,1]$.

Exercice 2 :

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\displaystyle\int\int_D e^{x^2}dxdy$, où $D = \{(x,y);\quad 0 \leq y \ \leq x \leq 1\}$.
2. $\displaystyle\int\int_D x\,ydxdy$, où $D = \{(x,y);\quad 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x - y > 0\}$.
3. $\displaystyle\int\int_D (x+y)dxdy$, où $D = \{(x,y);\quad 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq x\}$.

4. $\displaystyle\int\int_D x^6y^2dxdy$, où $D = \{(x,y);\ x \geq 0, y \geq 0,\ x+y \leq 1\ \}$.
5. $\displaystyle I = \int\int_D \frac{dx\,dy}{x+y+1}$ avec $D = \{(x,y); 0 \leq x \leq y \leq 1\}$.

Exercice 3 :

Calculer l'intégrale double :
$\int\int_\Delta \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$.

Exercice 4 :

Calculer $I = \int\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ avec $D = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } y \geq 0\}$.

Exercice 5 :

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est bien définie.
2. Soit $R > 0$, on définit les ensembles :
   $B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2+y^2} \leq R \quad \text{et} \quad x \geq 0,\ y \geq 0\}$ et $K_R = [0,R] \times [0,R]$.
   Montrer que :
   $$\int\int_{B_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leq \int\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leq \int\int_{B_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$
3. Montrer que
   $$\int\int_{B_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}).$$
4. En déduire la valeur de I (Intégrale de Gauss).

Exercice 6 :

Calculer $I = \int\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ avec $D = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } y \geq 0\}$, en utilisant la formule générale de changement de variable. (Indication : poser $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$).

Chapitre 7

Espaces probabilisés

1 Définition d'un espace probabilisé

Définition 1.1 (Ensemble fondamental) *On considère une expérience aléatoire quelconque et on note par Ω l'ensemble de tous les issus de cet expérience. Ω est un ensemble non vide appelé ensemble fondamental .*

Exemple : Si l'expérience consiste à lancer 3 fois une pièce de monnaie où on a pile (P) et face (F) alors l'ensemble fondamental Ω est :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, FFF, FFP, FPF, PFF\}.$$

Définition 1.2 (Espace probabilisable) *Soient Ω un ensemble fondamental et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé un espace probabilisable si et seulement si les quatre conditions suivantes son satisfaites :*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. *Quelque soit $A \in \mathcal{A}$ on a $\overline{A} = C_\Omega A \in \mathcal{A}$.*
3. *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ alors $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{A}$ (Stabilité par intersection finie).*
4. *Si $(A_i)_{(i\in I)}$ où $I \subset \mathbb{N}$ une famille fini ou infini d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ (Stabilité par réunion finie ou infinie).*

Conséquence : Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable alors $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Définition 1.3 (Probabilité) *On appelle probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application, notée en général P, de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

1. $P(\Omega) = 1$.

2. *Quelque soit* $A \in \mathcal{A}$ *on a :* $0 \leq P(A) \leq 1$.
3. *Pour toute famille* $(A_i)_{i\in I}$ *où* $I \subset \mathbb{N}$*, fini ou infini d'éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjointes (i.e.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pour tous* i *et* $j \in I$ *,* $i \neq j$*) on a :*
$$P(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i).$$

Définition 1.4 (Espace probabilisé) *On appelle espace probabilisé tout triplet* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *tel que* $(\Omega, \mathcal{A})$ *est un espace probabilisable et* P *est une probabilité définie sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.

Conséquence immédiate : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé

Si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Autres conséquences : Si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé alors on a :

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
3. Plus généralement : Si $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}$ et $C \in \mathcal{A}$ alors :
$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C).$$
4. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$
5. Si $A \subset \mathcal{A}$ alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2 Indépendance en probabilité

Définition 2.1 (Indépendance de deux évènements :) *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* A *et* B *deux éléments de* A*. Les événements* A *et* B *sont dits indépendants si et seulement si :*
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Théorème important : Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants, A et $\overline{B}$ sont indépendants et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

3 Indépendance d'une suite d'évènements :

Soit $(A_i)_{i\in I}$, I partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$, une famille d'évènements de $\mathcal{A}$.
Indépendance mutuelle : La famille $(A_i)_{i\in I}$ est dite une famille d'évènements mutuellement indépendants ou indépendants si et seulement si :

$$\text{pour toute partie finie } J \text{ de } I: \quad P(\cap_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

Indépendance deux à deux : La famille $(A_i)_{i\in I}$ est dite une famille d'évènements deux à deux indépendants si et seulement si

$$\text{pour tout } i \in I \text{ et } j \in I: \text{ on a } P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

Remarque : L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux. La réciproque n'est pas en général vraie c'est-à-dire on peut avoir des évènements indépendants deux à deux mais qui ne sont pas mutuellement indépendants.

4 Probabilité conditionelle

Définition : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux évènements de $\mathcal{A}$ tel que $P(A) \neq 0$. La probabilité de B sachant A, notée $P(B/A)$, est définie par :

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Théorème :

1. $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$.
2. $P(B_1 \cup B_2/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A) - P(B_1 \cap B_2/A)$

Remarque : Si A et B sont indépendants alors :

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Formule de probabilités composées :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Cas $n = 2$: Si A_1 et A_2 sont 2 évènements tels que $P(A_1) \neq 0$ alors :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1).$$

2. Cas $n = 3$: Si A_1, A_2 et A_3 sont 3 évènements tels que $P(A_1 \cap A_2) \neq 0$ alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2).$$

3. Cas $n = 4$: Si A_1, A_2, A_3 et A_4 sont 4 évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq 0$ alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Généralisation : $n \in \mathbb{N}(n \geq 2)$.
Théorème : Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n évènements tels que : $P(A1 \cap A2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

5 Formule de probabilités totales :

Système complet d'évènements : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On appelle système complet d'évènements de Ω toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

1. $\cup_{i \in I} A_i = \Omega$
2. Pour tout $i \in I$ et $j \in I$ avec $i \neq j$: $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Théorème des probabilités totales : Si $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet** d'évènements de Ω, de probabilités non nulles ($P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$), alors pour tout évènement B, de probabilité non nulle, on a

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap \cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B/A_i)P(A_i).$$

6 Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements de Ω ,de probabilités non nulles, alors pour tout évènement B, de probabilité non nulle ($P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$), on a :

$$\text{Pour tout } k \in I, \qquad P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k)P(A_k)}{P(B)}.$$

Si on utilise la formule de probabilités totales on obtient :

$$P(A_k/B) == \frac{P(B/A_k)P(A_k)}{\sum_{i \in I} P(B/A_i)P(A_i)}.$$

7 Exercices

Exercice 1

12 chevaux sont au départ d'une course. Combien y-a-t-il de tiercés possibles ?

Exercice 2

Un groupe de 3 mathématiciens et 7 économistes doit élire un comité représentatif formé de 1 mathématicien et de 2 économistes. Quel est le nombre de résultats possibles si :

1. Les 10 personnes sont éligibles.
2. Un des économiste est choisi d'office.
3. Un des mathématiciens n'est pas éligible.

Exercice 3

Quel est le nombre de groupes de 6 personnes que l'on peut former avec 4 garçons et 6 filles si l'on veut qu'il contienne 2 garçons

1. exactement.
2. au moins.
3. au plus.

Exercice 4

On fait asseoir 6 personnes autour d'une table ronde. Combien y-a-t-il de façons de les placer si

1. Les places sont numérotées .
2. Les places ne sont pas numérotées (autrement dit deux "tablées" pour lesquelles toutes les personnes ont les mêmes voisins ne comptent que pour une seule "façon de placer").

Exercice 5

On considère l'ensemble des as, rois, dames et valets d'un jeu de 52 cartes. On tire une "main" c'est à dire 5 cartes simultanément. Quel est le nombre de mains contenant :

1. au moins une dame ?
2. au moins une dame et un as ?
3. exactement deux dames et un coeur ?

4. deux dames de la même couleur (rouge ou noire) et deux rois de la même couleur ?

Exercice 6

Un damier carré comporte quatre lignes et quatre colonnes. Ce damier est placé dans une position fixe. On se propose de placer quatre jetons indiscernables sur quatre cases différentes de ce damier. Quel est le nombre

1. de dispositions possibles ?
2. de dispositions où aucun jeton n'est placé sur une diagonale ?
3. de dispositions où il y a un jeton sur une diagonale et deux sur l'autre ?
4. de dispositions où il y a exactement un jeton sur chaque ligne et chaque colonne ?
5. de dispositions où aucune colonne ne contient exactement trois jetons ?

Exercice 7

1. Combien de mots peut-on écrire avec les lettres A,B,C,D,E,F si :
   (a) on peut utiliser plusieurs fois une même lettre, et le mot écrit comporte 6 lettres.
   (b) on utilise chaque lettre une et une seule fois.
2. Un anagramme d'un mot est un mot formé avec les mêmes lettres, mais dans un ordre différent (par exemple Marie est un anagramme d'aimer). Combien y-a-t-il d'anagramme du mot ANAGRAMME ?

Exercice 8

Calculer

1. $\sum_{i=0}^{n} C_n^i$
2. $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i$

Exercice 9

Dans un jeu de Tarot, on isole les 21 atouts numérotés de 1 à 21. On prend 3 atouts au hasard. En expliquant les calculs, déterminer la probabilité d'avoir :

1. Au moins un numéro multiple de 5.
2. Un multiple de 5 et un multiple de 3 (exactement).
3. Le 1 ou le 21.

Exercice 10

Pour le tournoi sportif annuel de l'Aseco (association sportive des étudiants d'économie), Annie et Gilles ont choisi la pétanque.

1. Il y a 12 personnes réparties en 4 équipes de 3. Les équipes sont numérotées 1, 2, 3, 4.
   (a) Combien y a-t-il de possibilités différentes pour construire l'équipe numéro 1 ?
   (b) Combien y a-t-il de possibilités différentes pour répartir les 12 personnes dans les 4 équipes ?
   (c) Combien y a-t-il de possibilités différentes pour construire l'équipe numéro 1, Gilles et Annie étant dans cette équipe ?
   (d) Combien y a-t-il de possibilités différentes d'affecter une équipe à Gilles et une à Annie ?
   (e) Combien y a-t-il de possibilités différentes d'affecter la même équipe à Gilles et Annie ?
2. Le tournoi se poursuivra par un jeu, dans lequel on attribue aux 3 membres de chaque équipe des rôles différents. Modifier en conséquence les réponses précédentes .
3. Gilles voudrait bien évaluer la probabilité qu'il a d'être dans la même équipe qu'Annie. Quel univers envisager ? Quelle hypothèse – indispensable – peut-on formuler ? Sous cette hypothèse, évaluer la probabilité que Gilles et Annie soient dans la même équipe. (Certaines des questions précédentes peuvent vous aider, d'autres sont des fausses pistes...).

Exercice 11

6 personnes (A,B,C,D,E,F) munies de parapluies (1, 2, 3, 4, 5, 6) si semblables qu'on ne peut les distinguer Ã l'oeil nu, dînent ensemble. Chacune pose son parapluie Ã l'entrée, et repart avec un parapluie. Combien y a-t-il de façons différentes d'attribuer les parapluies aux convives ? On veut évaluer la probabilité que chaque personne reparte avec son parapluie. Quel univers considérer ? Quelle hypothèse raisonnable peut-on faire ? Sous cette hypothèse, quelle est la probabilité que chaque personne reparte avec son parapluie ?

Exercice 12

1. Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

2. Un autre voisin a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?

Exercice 13

Dans une île déserte, un pirate enterre 2 sacs d'un trésor. Le sac en jute contient 20 pièces d'or et 30 pièces d'argent.Le sac en cuir contient 20 pièces d'or et 20 pièces d'argent. Bien plus tard, un aventurier trouve en creusant un des deux sacs. Il l'ouvre et trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse du sac en cuir ?

Exercice 14

Une usine de pellicules dispose de 3 machines A,B et C qui fabriquent respectivement 20,50 et 30% de la production totale. Sachant que les proportions de pellicules défectueuses fabriquées par A,B et C sont respectivement égale à 0.06, 0.05 et 0.03, calculez :

1. la probabilité qu'une pellicule soit défectueuse.
2. la probabilité qu'une pellicule défectueuse provienne de la machine A.
3. la probabilité qu'une pellicule non défectueuse provienne de la machine A.

Exercice 15

Annie est cinéphile.
- Lorsqu'elle va voir un film, avec une probabilité de 0,6 elle le choisit d'après les critiques de son journal habituel.
- Elle estime que dans ce cas, elle passe une bonne soirée avec une probabilité de 0,85.
- Sinon elle passe une bonne soirée avec une probabilité de 0,75.
- Lorsqu'elle va voir un film avec des amis, elle passe un bonne soirée avec une probabilité de 0,90.
- Lorsqu'elle y va seule, elle passe un bonne soirée avec une probabilité de 0,70 .

1. Aujourd'hui elle va voir un film. Quelle est la probabilité qu'elle passe un bonne soirée ?
2. Lorsqu'elle va voir un film, quelle est la probabilité qu'elle y aille avec des amis ? (en notant p cette probabilité, on pourra poser, puis résoudre, une équation simple vérifiée par p)
3. Mardi dernier elle est allée voir un film, qu'elle a aimé. Quelle est la probabilité qu'elle l'ait choisi en fonction des critiques ?

Exercice 16

Un entraineur estime que son équipe a 2 chances sur 3 de gagner chaque match. Calculer la probabilité :

1. que l'équipe ne gagne son premier match qu'à la 5ème journée.
2. que l'équipe ait gagné exactement 2 matchs au bout de 5 journées.
3. que l'équipe n'ait gagné aucun match au bout de 5 journées.

Exercice 17

3 chasseurs sont d'habiletés différentes : le premier touche sa cible avec une chance sur deux, le deuxième avec une chance sur trois, le troisième avec une chance sur quatre.

1. Un oiseau survient. Les trois chasseurs tirent en même temps et de manière indépendante. L'oiseau va vite et les chasseurs ne peuvent tirer qu'une seule fois chacun. Quelle est la probabilté que l'oiseau soit tué ?
2. Les chasseurs décident de changer tactique. Le premier tirera en premier, le second tirera ensuite si l'oiseau est encore en vie et de même pour le troisième. Un deuxième oiseau survient...
   (a) Quelle est la probabilité qu'il soit abattu par le troisième chasseur ?
   (b) Quelle est la probabilté que l'oiseau s'en sorte indemne ?

Exercice 18

Un match de tennis masculin au tournoi de Roland-Garros se déroule en 3 sets gagnants : les joueurs disputent des sets jusqu'à ce que l'un d'entre eux en ait gagné trois. Celui-ci est alors déclaré vainqueur et le match se termine. On parle aussi de matchs en 5 sets, car il y a au maximum 5 sets disputés.

1. Lors d'un match vous estimez que votre joueur favori a une probabilité p (p étant un réel compris entre 0 et 1) de gagner chaque set. On supposera les sets indépendants les uns des autres. Calculer la probabilité
   (a) que votre joueur favori gagne en 3 sets
   (b) que la partie dure 3 sets
   (c) que votre joueur favori gagne en 4 sets
   (d) que la partie dure 4 sets.
2. Le match se termine en 4 sets. Quelle est la probabilité que votre joueur favori l'ait gagné ? Commenter les cas où $p = 1/2$, $p = 0$ et $p = 1$.

3. On suppose maintenant que $p = 1/2$. Calculer
   (a) la probabilité que la partie dure 5 sets
   (b) la probabilité que votre joueur favori gagne en 5 sets
   (c) l'espérance du nombre de sets disputés.

Exercice 19

1. Une urne A contient 5 boules indiscernables : 3 blanches et 2 noires. On tire simmultanément 2 boules de l'urne. Calculer la probabilité de tirer :
   (a) exactement une boule blanche
   (b) au moins une boule blanche
   (c) deux boules de même couleur.
2. Une deuxième urne B contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On choisit au hasard une des deux urnes (avec une probabilité de 0.5 pour chaque) puis une boule dans cette urne.
   (a) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
   (b) On tire une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne A ?
3. On choisit au hasard une des deux urnes (toujours avec une probabilité de 0.5 pour chaque) puis **deux** boules dans cette urne.
   (a) Calculer la probabilité de tirer deux boules noires.
   (b) On tire deux boules noires. Quelle est la probabilité qu'elles proviennent de l'urne A ?

Exercice 20

Pour les besoins d'un jeu, un animateur doit répartir 61 enfants en 4 équipes, une équipe de 16 (équipe 1) et 3 équipes de 15 (équipes 2, 3 et 4). La répartition se fait au hasard. Pim, Pam et Poum voudraient être dans la même équipe.

1. Définir un univers Ω adapté à ce problème.
2. Quelle est la probabilité que Pim soit dans l'équipe 1 ?
3. Quelle est la probabilité que les trois amis soient dans l'équipe 1 ?
4. Quelle est la probabilité que les trois amis soient dans la même équipe ?
5. Finalement, ils se retouvent dans la même équipe. Quelle est la probabilité que ce soit l'équipe 1 ?

6. Supposons maintenant que Pim et Pam aient persuadé l'animateur de les mettre dans la même équipe . Quelle est alors la probabilité que Poum soit dans une équipe différente ?

Exercice 21

Pour acheter un stock d'une certaine pièce d'équipement, un industriel s'adresse à deux fournisseurs A et B . Le fabriquant A fournit 75% des besoins de l'industriel et son pourcentage de pièces défectueuses est 1%. Le pourcentage des pièces défectueuses fournit par B est de 2%. Le stock est constitué de sacs contenant des pièces provenant du même fournisseur. L'industriel prend une pièce au hasard dans son stock.

1. Quelle est la probabilité que la pièce soit défectueuse ?
2. Dans le cas où elle est bonne, quelle est la probabilité pour qu'elle provienne du fournisseur A ?
3. L'industriel constate qu'elle est défectueuse et s'exclame : "Elle provient probablement de B !" Quelle est le probabilité que ce jugement soit valable ?
4. L'industriel tire au hasard une deuxième pièce du même sac. Elle est de nouveau défectueuse. Notre industriel s'exclame : "Cette fois-ci il n'y plus aucun doute, ce sac provient de B !" Quelle est sa probabilité d'erreur ?

Exercice 14

Le quinté + est un jeu de pari sur les courses hippiques. Pour jouer, il faut choisir 5 chevaux parmi les partants, et les ranger dans un certain ordre. Voici un extrait du site officiel du P.M.U. expliquant les différentes façons de gagner au quinté + :
Rapport Ordre : Vous avez trouvé les 5 premiers chevaux de l'arrivée dans l'ordre,
Rapport Désordre : Vous avez trouvé les 5 premiers chevaux de l'arrivée dans le désordre,
Bonus 4 : Vous avez trouvé les 4 premiers chevaux de l'arrivée quel que soit l'ordre,
Bonus 4 sur 5 : Vous avez trouvé 4 chevaux parmi les 5 premiers de l'arrivée quel que soit l'ordre,
Bonus 3 : Vous avez trouvé les 3 premiers chevaux de l'arrivée quel que soit l'ordre.

En supposant que vous misiez au hasard sur une course comprenant 15 chevaux partants, calculer les probabilités de ces différentes façons de gagner, en précisant bien l'univers envisagé.

Exercice 15

Un réalisateur espère que son film sera projeté lors d'un festival. Les films sont sélectionnés de la manière suivante : 2 jurys composés respectivement de 3 et 4 personnes sont chargés de visionner les films candidats. La moitié des films sera jugée par le premier jury, l'autre moitié sera jugée par le second jury. Chacun des membres du jury donne son avis (favorable ou défavorable) et le film est sélectionné s'il recueille au moins 2 avis favorables.

Le réalisateur connait bien les membres des jurys. Il estime que dans le premier un des membres a 30% de chances de donner un avis favorable, un autre 40% et le dernier 50%. Dans le second jury ces mêmes probabilités sont de 50%, 60%, 60% et 80%.

1. Supposons dans un premier temps que le film passe devant le premier jury.
   (a) Quelle est la probabilité que le film ne recueille aucun avis favorable ?
   (b) Quelle est la probabilité que le film soit sélectionné ?
2. Supposons maintenant que les films soient répartis au hasard entre les 2 jurys. Quelle est la probabilité que le film soit sélectionné ?
3. Le réalisateur apprend avec joie que son film est retenu. Quelle est la probabilité qu'il soit passé devant le premier jury ?

On prendra bien garde de rédiger et de justifier chaque réponse, et en particulier de bien préciser les événements considérés.

Evercice 16

Les résultats d'une enquête menée auprès d'une population, dont 52% sont des femmes et 48% des hommes, montrent que 80% des femmes et 70% des hommes de cette population interrogée jouent au moins une fois au Loto par mois.

1. On choisit un individu au hasard dans cette population. Tous les choix sont équiprobables.
   a) Quelle est la probabilité que l'individu joue au moins une fois au Loto par mois ?
   b) L'individu joue au moins une fois au Loto par mois. Quelle est la probabilité qu'il soit un homme ?

c) Quelle est la probabilité que l'individu soit un homme sachant qu'il joue moins d'une fois par mois au Loto ?

2. On répète trois fois de manière indépendante l'expérience de la question 1 "choisir au hasard un individu de cette population".
   a) Quelle est la probabilité qu'un et un seul de ces 3 individus joue au moins une fois au Loto par mois ?
   b) Quelle est la probabilité qu'au moins un des trois individus joue au moins une fois au Loto par mois ?

Exercice 17

On dispose de cinq crayons : un jaune, un rouge, un vert, un bleu et un noir, et de trois boîtes pour les ranger. On suppose que les crayons sont rangés complètement au hasard, chaque boîte pouvant contenir un ou plusieurs crayons, ou encore rester vide.

1. Quel est le nombre de façons de ranger les crayons dans les boîtes ?
2. Quelle est la probabilité de ranger tous les crayons dans la boîte 1 ?
3. Quelle est la probabilité de ranger tous les crayons dans une même boîte ?

Chapitre 8

Variables aléatoires réelles

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

1 Définition et notation :

Définition 1.1 *On appelle Variable Aléatoire Réelle, que l'on abrège par V.A.R., définie sur* $(\Omega, \mathcal{A})$, *toute application, notée en général* X, *de* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *qui à* $\omega \in \Omega$ *associe* $X(\omega) \in \mathbb{R}$ *vérifiant la condition suivante : quelque soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *on a :*

$$X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}.$$

Pour alléger les écritures : Si X est une V.A.R. définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on note par :
• $X = a$ au lieu de $X(\omega) = a$.
• $(a < X \leq b)$ au lieu de l'évènement : $X^{-1}(]a, b]) = \{\omega \in \Omega$ tel que $a < X(w) \leq b\}$
• $(X \leq x)$ au lieu de l'évènement : $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \leq x\}$.
• $(X = x)$ au lieu de l'évènement : $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x\}$.

Ensemble des valeurs prises par une V.A.R. : Soit X une V.A.R. définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ on pose

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \in \mathbb{R} \text{ tel que } \omega \in \Omega\}$$

L'ensemble $X(\Omega)$ est appelé l'ensemble des valeurs susceptibles (possibles) d'être prises par la V.A.R. X.

2 Opérations sur les variables aléatoires réelles

Si X et Y sont deux V.A.R définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors :
• $X+Y$ est une V.A.R définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
• $X-Y$ est une V.A.R définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
• Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, αX est une V.A.R définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
• XY est une V.A.R définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
• X/Y est une V.A.R définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
• $f(X)$ est une V.A.R définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où f est une fonction définie sur $X(\Omega)$.
• $f(X, Y)$ est une V.A.R dèfinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où f est une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
• $\max(X, Y) = \sup(X, Y)$ est une V.A.R définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
• $\min(X, Y) = \inf(X, Y)$ est une V.A.R définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition 3.1 *Soit X une V.A.R. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la fonction de répartition de X est la fonction notée en général par F_X et définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x).$$

Propriétés : Si X est une V.A.R. de fonction de répartition F_X alors :
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
- F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Pour tous réels a et b tels que $a < b$ on a :

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

4 Différents types de variables aléatoires réelles

On distingue trois types de V.A.R. selon la nature de l'ensemble $X(\Omega)$.

1. Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini alors la V.A.R. X est dite discrète finie.
2. Si $X(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable alors la V.A.R. X est dite discrète infinie.
3. Si $X(\Omega)$ est un ensemble infini non dénombrable alors la V.A.R. X est dite continue ou à densité.

Chapitre 9

Variables aléatoires réelles discrètes finies

1 Loi de probabilité d'une V.A.R. discrète finie

Définition 1.1 *Soit X une V.A.R. discrète finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. L'ensemble $\{(x_i, P(X = x_i))$ tel que $i = 1, 2, \ldots, n\}$ est appelé la loi de probabilité de la V.A.R. X.*

Dans la pratique :
Pour déterminer la loi de probabilité d'une V.A.R. discrète finie X, on commence par déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble de toutes les valeurs susceptibles d'être prises par X. Puis on détermine les probabilités en ces valeurs. Lorsque le nombre des éléments de $X(\Omega)$ n'est pas très grand, la loi de probabilité de X peut être présentée sous forme du tableau suivant :

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	
$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\ldots$	$P(X = x_n)$	$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

Théorème :
L'ensemble $\{(x_i, P(X = x_i))$ tel que $i = 1, 2, \ldots, n\}$ est la loi de probabilité d'une V.A.R. discrète finie X, si et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. quel que soit $i = 1, 2, \ldots, n$, $P(X = x_i) \geq 0$.
2. $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_n) = 1$.

2 Fonction de répartition d'une V.A.R. discrète finie

Soit X une V.A.R. discrète finie de loi de probabilité $\{(x_i, P(X = x_i))$ tel que $i = 1, 2, \ldots, n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ alors sa fonction de répartition F_X est donnée par :

$$\begin{cases} F_X(x) = 0, & \text{si} \quad x < x_1, \\ F_X(x) = \sum\limits_{k=1}^{i} P(X = x_k) & \text{pour tout} \quad \text{i=1,2,...,n-1 et } x \in [x_i, x_{i+1}[, \\ F_X(x) = 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

Détermination de la loi de probabilité d'une V.A.R. discrète finie connaissant sa fonction de répartition : Si X est une V.A.R. discrète finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et F_X sa fonction de répartition alors :

$P(X = x_1) = F_X(x_1)$ et

$P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$ pour tout $i = 2, 3, \ldots, n$.

3 Loi d'une fonction de V.A.R. discrète finie

Soient X une V.A.R. discrète finie de loi de probabilité $\{(x_i, P(X = x_i))$ tel que $i = 1, ..., n\}$ et g une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On pose

$$Y = g(X).$$

Alors Y est une V.A.R. discrète finie dont la loi est donnée par :

$$\begin{cases} Y(\Omega) = g(X(\Omega)) = \{g(x_i) \text{ tel que } i = 1, 2, \ldots, n\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m \text{ avec } m \leq n\}. \\ \text{pour tout } j = 1, 2, \ldots, m, \quad P(Y = y_j) = \sum_{x_i \text{ tel que } y_j = g(x_i)} P(X = x_i). \end{cases}$$

4 Moments d'une V.A.R. discrète finie

4.1 Espérance mathématique

Soit X une V.A.R. discrète finie de loi de probabilité : $\{(x_i, P(X = x_i))$ tel que $i = 1, 2, \ldots n\}$. L'espérance mathématique de X notée $\mathbb{E}(X)$, est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i).$$

Propriétés : Pour tous X et Y deux V.A.R. discrètes finies et a et b deux réels on a :

P 1. $\mathbb{E}(a) = a$

P 2. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

P 3. $\mathbb{E}(a.X) = a.\mathbb{E}(X)$

P 4. Conséquence : $\mathbb{E}(a.X + b) = a.\mathbb{E}(X) + b$

P 5. Plus généralement $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{E}(X_i)$.

Espérance d'une fonction de V.A.R. X discrète finie :
Soient X une V.A.R. discrète finie de loi de probabilité $\{(x_i, P(X = x_i))$ tel que $i = 1, 2, \ldots, n\}$ et g une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. L'espérance mathématique de $g(X)$, notée $\mathbb{E}(g(X))$, est donnée par :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i)$$

En particulier : $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ P(X = x_i)$

Définition 4.1 (V.A.R. centrée) *1. Si $\mathbb{E}(X) = 0$ alors la V.A.R. X est dite une V.A.R. centrée.*

2. Si X une V.A.R. quelconque, alors, $X - \mathbb{E}(X)$ est appelée la V.A.R. centrée associée à X (car $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)] = 0$).

4.2 Variance

Définition 4.2 *Soit X une V.A.R. discrète finie, la variance de X, notée $Var(X)$, est définie par :*

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Propriétés Pour toute X une V.A.R. discrète finie et a, b deux réels on a :

P 1. $Var(a) = 0$

P 2. $Var(aX) = a^2 Var(X)$

P 3. Conséquence : $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

4.3 Ecart-type

Définition 4.3 *Soit X une V.A.R. discrète finie l'écart-type de X, noté $\sigma(X)$, est défini par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Propriétés Pour toute X une V.A.R. discrète finie et a, b deux réels on a :

P 1. $\sigma(a) = 0$

P 2. $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$

P 3. Conséquence : $\sigma(a.X + b) = |a|\sigma(X)$

Définition 4.4 (V.A.R. réduite) *Si $Var(X) = 1$ alors la V.A.R. X est dite réduite et si $\sigma(X) \neq 0$, la V.A.R. $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée V.A.R. centrée réduite associée à X (car $\mathbb{E}\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = 0$ et $Var\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = 1$).*

4.4 Moment d'ordre k

Définition 4.5 *Soient k un entier naturel non nul et X une V.A.R. discrète finie. Le moment d'ordre k de X, noté $\mathcal{M}_k(X)$, est défini par :*

$$\mathcal{M}_k(X) = \mathbb{E}(X^k) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^k P(X = x_i).$$

5 Couples de variables aléatoires réelles discrètes finies

5.1 Loi conjointe d'un couple de V.A.R.

Définition 5.1 *Soient X et Y deux V.A.R. discrètes finies telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ avec $y_1 < y_2 < \cdots < y_m$ et pour tous $i = 1, 2, \dots, n$ et $j = 1, 2, \dots, m$, $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p_{i\,j}$. L'ensemble $\{((x_i, y_j), p_{i\,j})$ tel que $i = 1, 2, \dots, n$ et $j = 1, 2, \dots, m\}$ est appelé la loi conjointe de X et Y ou encore la loi du couple (X, Y).*

Dans la pratique pour obtenir la loi conjointe de deux V.A.R. discrètes finies X et Y, on commence par déterminer :

i. $X(\Omega)$ l'ensemble de toutes les valeurs susceptibles d'être prises par X.

ii. $Y(\Omega)$ l'ensemble de toutes les valeurs susceptibles d'être prises par Y.

iii. Pour tout $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$, la probabilité d'avoir à la fois $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ c'est à dire $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p_{ij}$.

Si le nombre n des éléments de $X(\Omega)$ et le nombre m des éléments de $Y(\Omega)$ ne sont pas très grands, la loi conjointe de X et Y peut être présentée sous la forme d'un tableau à double entrée suivant :

$X\|Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}	
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	p_{2m}	
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}	
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}	
							$\sum\limits_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} p_{ij} = 1$

Théorème : L'ensemble $\{((x_i, y_j), p_{ij})$ tel que $i = 1, 2, \dots, n$ et $j = 1, 2, \dots, m\}$ est la loi conjointe de deux V.A.R. discrètes finies X et Y ou la loi du couple (X, Y) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites : pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ et pour tout $j = 1, 2, \dots, m$ on a :

$$\begin{cases} P((X = x_i) \cap (y = yj)) = p_{ij} \geq 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} \right) = \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij} \right) = 1. \end{cases}$$

6 Fonction de répartition conjointe

Définition 6.1 *On appelle fonction de répartition conjointe de deux V.A.R. X et Y, la fonction, notée en général $F_{(X,Y)}$, définie sur $\mathbb{R}^2$, par :*

$$\textit{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x, y) = P((X \leq x) \cap (Y \leq y)).$$

Dans le cas où X et Y sont deux V.A.R. discrètes finies de loi conjointe donnée par l'ensemble $\{((x_i, y_j), p_{ij})$ tel que $j = 1, 2, \dots, n$ et $j = 1, 2, \dots, m\}$, la fonction de répartition conjointe $F_{(X,Y)}$ de X et Y est donnée par :

$$\text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x, y) = \sum_{i \text{ t.q. } x_i \leq x} \sum_{j \text{ t.q. } y_j \leq y} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

7 Lois marginales

Définition 7.1 *La loi de probabilité de la V.A.R. X (resp. Y) obtenue à partir de la loi du couple (X, Y) est appelée la loi marginale de X (resp. de Y).*

Détermination des lois marginales : Soient X et Y deux V.A.R. discrètes finies de loi conjointe $\{((x_i, y_j), p_{i\,j})$ tel que $j = 1, 2, \ldots, n$ et $j = 1, 2, \ldots, m\}$.

• **Loi marginale de X :**

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \\ \text{pour tout } i = 1, 2, \ldots, n, \quad P(X = x_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} \end{cases}$$

En effet, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $P(X = x_i) = P((X = x_i) \cap (Y \in \mathbb{R})) = P((X = x_i) \cap (\cup_{j=1}^{m}(Y = y_j))) = P(\cup_{j=1}^{m}((X = x_i) \cap (Y = y_j)))$ (deux à deux disjoints)

• **Loi marginale de Y :**

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, x_m\} \\ \text{pour tout } j = 1, 2, \ldots, m, \quad P(Y = x_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij} \end{cases}$$

En effet, pour tout $j = 1, 2, \ldots, m$, $P(Y = y_j) = P((X \in \mathbb{R}) \cap (Y = y_j)) = P((\cup_{i=1}^{n}(X = x_i)) \cap (Y = y_j)) = P(\cup_{i=1}^{n}((X = x_i) \cap (Y = y_j)))$ (deux à deux disjoints).

Remarque :
Lorsque la loi conjointe de X et Y est présentée sous forme d'un tableau où $p_{i,j}$ figure sur la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne alors : $P(X = x_i)$ est égale à la somme des éléments de la $i-$ème ligne et $P(Y = y_j)$ est égale à la somme des éléments de la $j-$ème colonne.
On complète le tableau des $p_{i,j}$ par une colonne supplémentaire ou figure la loi marginale de X et un ligne supplémentaire où figure la loi marginale de Y.

8 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes finies

Définition 8.1 *Soient X et Y deux V.A.R. discrètes finies définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. Les V.A.R. X et Y sont dites indépendants, si et seulement si,*

pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y).$

Lorsque X et Y sont définies par la loi conjointe $\{((x_i, y_j), p_{i\,j})$ tel que $i = 1, 2, \ldots, n$ et $j = 1, 2, \ldots, m\}$ alors les V.A.R. X et Y sont dites indépendants, si et seulement si, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ et $j = 1, 2, \ldots, m$;

$$p_{i\,j} = P((X = x_i) \cap (y = y_j)) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

La loi conjointe = le produit des lois marginales

Conséquence : Les V.A.R. X et Y ne sont pas indépendantes, si et seulement si, il existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $j_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tel que

$$P((X = x_{i_0}) \cap (Y = y_{j_0})) \neq P(X = x_{i_0})P(Y = y_{j_0}).$$

Un contre exemple suffit pour montrer que deux V.A.R. ne sont pas indépendantes.

Théorème : Si X et Y sont deux V.A.R. indépendantes alors toute V.A.R $f(X)$ fonction de X et toute V.A.R. $g(Y)$ fonction de Y sont indépendantes.

9 Indépendance d'une suite finie ou infinie de V.A.R. discrètes finies :

Définition 9.1 *Les k V.A.R. discrètes finies $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont dites indépendantes, si et seulement si, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_k(\Omega))$ on a*

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{k}(X_i = x_i)\Big) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i = x_i).$$

Indépendance mutuelle : La suite $(X_i)_{(i \in I)}$ où I est une partie finie où infinie de $\mathbb{N}$, de V.A.R. discrètes finies est dite mutuellement indépendante, si et seulement si, pour tout $J \subset I$, J fini la suite $(X_i)_{(i \in J)}$ est indépendante.

Indépendance deux à deux : La suite $(X_i)_{(i \in I)}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$, de V.A.R. discrètes finies est dite deux à deux indépendantes, si et seulement si, pour tout $i \in I$ et $j \in I$ avec $(i \neq j)$,

$$P((X_i = x_i) \cap (X_j = x_j)) = P(X = x_i)P(X = x_j).$$

Remarque : L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux. (La réciproque n'est pas en général vraie).

10 Lois conditionelles

Définition 10.1 *Soient X une V.A.R. discrète finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et A un évènement de probabilité non nulle. La loi de X sachant A est définie par l'ensemble suivant :$\{(x_i, P(X = x_i/A))$ tel que $i = 1, 2, \ldots, n\}$ où*

$$P(X = x_i/A) = \frac{P((X = x_i) \cap A)}{P(A)}.$$

Cas particulier : Si Y est une autre V.A.R. telle que $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ alors pour tout $y_j \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y_j) \neq 0$, la loi de X sachant $(Y = y_j)$ est définie par l'ensemble suivant :

$$\{(x_i, P(X = x_i/Y = y_j)) \text{ tel que } i = 1, 2, \ldots, n\} \text{ où}$$

$$P(X_i = x_i/Y = y_j) = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(Y = y_j)}.$$

Remarque : on définit de même la loi de Y sachant X.
Si X et Y sont indépendantes alors la loi de X sachant Y est la loi de X.

11 Loi de probabilité d'une fonction de deux V.A.R. discrètes finies

Soient X et Y deux V.A.R. discrètes finies et g une fonction de deux variables réelles définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. On pose $Z = g(X, Y)$, Z est une V.A.R. discrète finie. La loi de probabilité de Z :

$$\begin{cases} Z(\Omega) = \{g(x, y) \text{ tel que } x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega)\} \\ \text{pour tout } z \in Z(\Omega) : P(Z = z) = \displaystyle\sum_{(x,y) \text{ t. q. } g(x,y)=z} P((X = x) \cap (Y = y)) \end{cases}$$

Remarque : Pour déterminer la loi de $Z = g(X, Y)$ il faut connaitre la loi conjointe de X et Y.
Lorsque X et Y sont indépendantes on a :

$$\text{pour tout } z \in Z(\Omega) : P(Z = z) = \sum_{x,y \text{ tel que } g(x,y)=z} P(X = x)P(Y = y)).$$

11.1 Loi de la somme de deux V.A.R.

La loi de la somme de deux V.A.R. X et Y discrètes finies : il suffit de prendre le cas particulier

$$g(x, y) = x + y.$$

Loi de probabilité de $Z = X + Y$ est donnée par :

$$\begin{cases} Z(\Omega) = \{x + y \text{ tel que } x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega)\} \text{ et pour tout } z \in Z(\Omega) : \\ P(Z = z) = P(X + Y = z) = \displaystyle\sum_{(x,y) \text{ t. q. } x+y=z} P((X = x) \cap (Y = y)) \end{cases}$$

Lorsque X et Y sont indépendantes alors :

$$\text{pour tout } z \in Z(\Omega) : P(Z = z) = P(X + Y = z) = \sum_{(x,y) \text{ t. q. } x+y=z} P(X = x)P(Y = y).$$

12 Lois du maximum et du minimum

• Loi du maximum ou du sup : On considère X et Y deux V.A.R. discrètes finies et on pose : $M = \max(X, Y)$ ou $\sup(X, Y)$. M est une V.A.R. discrète finie. L'ensemble des valeurs prises par M :

$$M(\Omega) = \{\max(x, y) \text{ tel que } x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega)\}.$$

Pour la détermination de la loi de probabilité de M on peut utiliser le résultat suivant : Si $M = \max(X, Y)$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$(M \le t) = (X \le t) \cap (Y \le t).$$

• Loi du minimum ou de inf : On considère X et Y deux V.A.R. discrètes finies et on pose : $N = \min(X, Y)$ où $\inf(X, Y)$, N est une V.A.R. discrète finie. L'ensemble des valeurs prises par N :

$$N(\Omega) = \{\min(x, y) \text{ tel que } x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega)\}.$$

Pour la détermination de la loi de probabilité de N on peut utiliser le résultat suivant : Si $N = \min(X, Y)$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$(N \ge t) = (X \ge t) \cap (Y \ge t).$$

Remarque $\min(X, Y) + \max(X, Y) = X + Y$.

13 Espérances de fonctions de deux V.A.R. discrètes & covariance

Définition 13.1 *Soient X et Y deux V.A.R. discrètes finies de loi conjointe définie par l'ensemble $\{((x_i, y_j), P([X = x_i] \cap [Y = y_j]))$ tel que $i = 1, 2, \ldots, n$ et $j = 1, 2, \ldots, m\}$ et g une fonction de deux variables définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. L'espérance de $g(X, Y)$, notée par $\mathbb{E}(g(X, Y))$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X,Y)) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} g(x_i, y_j) P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i, y_j) P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \right). \end{aligned}$$

Cas particulier : $g(x, y) = x\, y$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_i\, y_j\, P((X = x_i) \cap (Y = y_j))\right)\\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_j\, P((X = x_i) \cap (Y = y_j))\right).\end{aligned}$$

Théorème : Si les V.A.R. X et Y sont indépendantes alors

$$\mathbb{E}(X\, Y) = \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y).$$

(La réciproque n'est pas en général vraie).
Si $\mathbb{E}(X\, Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ alors on ne peut rien dire sur l'indépendance de X et Y.
Si $\mathbb{E}(X\, Y) \neq \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y)$ alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition 13.2 (Covariance) *Soient X et Y deux V.A.R. discrètes finies. La covariance de X et Y, notée $Cov(X,Y)$, est donnée par :*

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(X\, Y) - \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y).$$

Conséquence : Si les V.A.R. X et Y sont indépendantes alors

$$Cov(X, Y) = 0.$$

(La réciproque n'est pas en général vraie).
Si $Cov(X, Y) = 0$ alors on ne peut rien dire sur l'indépendance de X et Y.
Si $Cov(X, Y) \neq 0$ alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Propriétés : Si X, Y et Z sont trois V.A.R. discrètes finies et a, b, c et d des réels.

- P 1. $Cov(Y, X) = Cov(X, Y)$
- P 2. $Cov(X, X) = Var(X)$
- P 3. $Cov(X, a) = Cov(a, X) = 0$
- P 4. $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$
- P 5. $Cov(a\, X, Y) = a\, Cov(X, Y)$
- P 6. Conséquence : $Cov(a\, X + b, c\, Y + d) = a\; Cov(X, Y)$

Théorème : Pour tous X et Y deux V.A.R. discrètes finies on a :

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y), \\ Var(X-Y) &= Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y). \end{aligned}$$

Plus généralement :

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} Cov(X_i, X_j).$$

Remarques :
Si X et Y sont indépendantes alors : $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$.
Si X et Y sont indépendantes alors : $Var(X-Y) = Var(X)+Var(Y)$.
Plus généralement : Si $(X_i)_{1\le i\le n}$ est une famille de n V.A.R. deux à deux indépendantes alors :

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

14 Coefficient de corrélation linéaire

Définition 14.1 *Soient X et Y deux V.A.R. discrètes finies d'écart-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ non nuls. Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y, noté $\rho(X,Y)$, est le nombre réel défini par :*

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}.$$

Propriétés : Pour tous X et Y deux V.A.R. discrètes finies et a, b, c et d des réels tels que a est non nul on a :

P 1. $\rho(X,X) = 1$.

P 2. $\rho(aX+b, cY+d) = \varepsilon\rho(X,Y)$ où $\varepsilon = \frac{|ac|}{ac} = \pm 1$.

P 3. On a toujours $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$.

P 4. Si X et Y indépendantes alors $\rho(X,Y) = 0$.

P 5. Si $\rho(X,Y) = \pm 1$, alors il existe deux réels α et β tel que $Y = \alpha X + \beta$.

15 Lois discrètes finies usuelles

15.1 Loi uniforme

Définition 15.1 *Une variable aléatoire rélle X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ si :*

1. $X(\Omega) = [\![1, n]\!] = \{1, 2 \ldots, n\}$
2. *pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{n}$.

On note $X \rightsquigarrow U([\![1, n]\!])$.

Moments La moyenne et la variance de X sont données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad Var(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Exemple On jette un dé régulier, soit $X =$ le numéro apparaissant sur le dé. Alors X suit une loi uniforme de probabilité $\frac{1}{6}$ sur $[\![1, n]\!]$.
Eléments de calcul pour l'espérance et la variance :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

15.2 Loi Bernoulli

Définition 15.2 *Une variable aléatoire rélle* X *suit une loi de Bernoulli de paramètre* $p \in]0, 1[$ *si :*

1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$
2. $P(X = 1) = p$ *et* $P(X = 0) = 1 - p$.

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$.

Moments La moyenne et la variance de X sont données par :

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad Var(X) = p(1-p).$$

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p, toute épreuve dont l'issue ne présente que deux éventualités incompatibles, l'une que l'on appellera "succès" de probabilité p et l'autre que l'on appellera "échec" de probabilité $q = 1 - p$.

15.3 Loi binomiale

On considère n ($n \in \mathbb{N}$) épreuves de Bernoulli telles que :

- deux épreuves différentes sont indépendantes.
- p et q restent constants lors des n épreuves.

On pose $X =$Le nombre de succès obtenus après la réalisation des n épreuves de Bernoulli de paramètre p. X est une V.A.R. discrète finie dont la loi de probabilité est donnée par :

1. $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$
2. pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

La V.A.R. discrète finie X ainsi définie est dite une Binomiale de paramètres n et p. On note alors : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$.
Moments La moyenne et la variance de X sont données par :

$$\mathbb{E}(X) = n\,p, \qquad Var(X) = n\,p\,(1-p).$$

Remarque La somme de deux lois binomiales indépendantes de même probabilité p et une binomiale de pramètres $n+m$ et p. Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m,p)$ deux V.A.R. indépendantes alors $X + Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n+m, p)$.

15.4 Loi hypergéométrique

On tire, **sans remise**, un échantillon de n boules d'une urne contenant N boules, dont S boules blanches et $N - S$ boules noires. L'urne contient donc une proportion $p = \frac{S}{N}$ $(S = N\,p)$ de boules blanches et $\frac{N-S}{N} = 1 - p = q$ proportion de boules noires. On pose $X =$"Le nombre de boules blanches tirées dans l'échantillon des n boules tirées". La V.A.R. discrète X ne suit pas une loi binomiale, la condition de l'indépendance des épreuves répétées n'étant pas respecté, on dit alors que X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et p et on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, n, p)$. La loi de probabilité de X est donnée par :

1. $X(\Omega) = \{r, r+1, \dots, s\}$ où $r = \max(0, n - N + Np)$ et $s = \min(Np, n)$.
2. pour tout $k \in \{r, r+1, \dots, s\}$ $P(X = k) = C_{Np}^k C_{N-Np}^{n-k}$.

Remarque : La loi hypergéométrique fait intervenir deux paramètres de taille : celui de l'échantillon n et celui de la population de référence N. La loi Hypergéométrique s'applique donc à la répétition d'une expérience présentant les caractères suivants : L'épreuve ne donne lieu qu'à deux éventualités incompatibles et les épreuves répétées ne sont pas indépendantes.
Moments

$$\mathbb{E}(X) = n\,p, \qquad Var(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p).$$

16 Exercices

Exercice 1

Une famille de dauphins est composée de 5 femelles et 3 mâles. On choisit au hasard dans cette famille un groupe de 3 animaux, et on appelle Y la variable aléatoire "Nombre de femelles choisie". Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 2

Une urne contient six boules indiscernables : deux vertes et quatre rouges. On tire simultanément trois boules de l'urne. Soit X la v.a. qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, calculer son espérance et sa variance et tracer le graphe de sa fonction de répartition.
2. On vous propose un jeu : une partie coûte 1 dinar et vous pouvez gagner 2 fois le nombre de boules vertes tirées. On définit une nouvelle variable G : gain obtenu. Est-il vraiment intéressant de jouer ?
3. Reprendre la question 1) mais en faisant un tirage avec remise.

Exercice 3

Soit X la variable aléatoire représentant la somme de deux dés non pipés.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Calculer la probabilité des événements $(X < 4)$ et $(2 \leq X < 8)$.
3. On pose $Y = 2X + 3$. Trouver l'espérance et la variance de Y.

Exercice 4

Une personne effectue trois trajets en train par semaine, le prix est de 8 euros en première classe et de 6 euros en seconde. Notre voyageur fraude systématiquement en achetant un billet de seconde mais en voyageant en première. Sur chaque trajet, il se fait contrôler avec une probabilité 1/10 et l'amende en cas de fraude est de 30 euros.

1. Soit N le nombre de fois que le voyageur se fait contrôler. Donner E(N) et VAR(N).
2. Donner en fonction de N les gains hebdomadaires de notre voyageur.
3. En moyenne est-il rentable pour le voyageur de frauder systématiquement ?

Exercice 5

Soit a un entier strictement positif et X une variable aléatoire telle que $\Omega_X = \{1, 2, ..., 10a\}$ et pour tout k dans Ω_X on ait :

$$P(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{10}.$$

1. Trouver a tel que X suive bien une loi de probabilité.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 6

Un couple décide d'arrêter les naissances de ses enfants au premier garçon ou, à défaut, au cinquième enfant. On admet qu'à chaque naissance la probabilité d'avoir un garçon est p et que les sexes des différents enfants sont des évènements indépendants. Quelle est l'espérance du nombre de garçons ? Du nombre de filles ? Du nombre d'enfants ?

Exercice 7

1. Un tiroir contient 3 chaussettes rouges et 2 chaussettes vertes.
   (a) On prend au hasard 2 chaussettes dans ce tiroir. Soit X le nombre de chaussettes vertes sorties du tiroir. Donner la loi, l'espérance et la variance de X.
   (b) On prend des chaussettes dans le tiroir, jusqu'à trouver une chaussette verte. Soit Y le nombre de chaussettes qu'il a fallu sortir. Donner la loi et l'espérance de Y.
2. Mêmes questions, mais les tirages s'effectuent **avec remise** (autrement dit, on choisit une première chaussette, puis on la remet dans le tiroir, et on renouvelle l'opération).

Exercice 8

Pour faire la promotion d'un paquet de céréales, le fabricant offre des petites figurines en plastique à collectionner. La moitié des paquets commercialisés en contiennent. Parmi ces paquets là, 70% contiennent exactement une figurine, 30% en contiennent deux.

1. En achetant un paquet quelle est la probabilité de gagner exactement une figurine ?
2. Vous achetez un paquet, soit X le nombre de figurines trouvées dans le paquet. Trouver la loi de X, son espérance et sa variance.
3. Vous achetez deux paquets, soit Y le nombre de figurines trouvées au total dans les 2 paquets. Trouver l'espérance et la variance de Y <u>sans calculer sa loi</u> (on pourra exprimer Y comme somme de deux variables aléatoires X_1 et X_2, puis utiliser la linéarité de l'espérance).
4. Trouver la loi de Y, et vérifier la réponse à la question précédente.
5. Votre petit cousin a deux figurines de ce genre. Ces parents ont acheté deux paquets. Quelle est la probabilité que les deux figurines proviennent du même paquet ?

6. Votre autre petit cousin veut absolument une figurine. En moyenne, combien faut-il acheter de paquets ? (on demande une argumentation mathématique)

Exercice 9

Huit composants éléctroniques sont mis en sérvice simultanement la probabilité pour que l'un quelconque d'entre eux soit encore en fonctionnement au bout d'un an est 0.7

1. Quelle est la probabilité pour qu'au bout d'un an il y ait encore 4 composants en fonctionnement ? au moins 4 ?
2. Sachant qu'il y a au moins 4 composants en fonctionnement, quelle est la probabilité qu'il y ait au plus 6 ?

Exercice 10

Un concéssionnaire de voiture vend le même jour 5 voitures identiques à des particuliers. Sachant que la probabilité pour que ce type de voiture soit en état de rouler 2 ans près est 0.8. Calculer la probabilité pour que

1. Les 5 voitures soient en service 2 années plus tard.
2. Les 5 voitures soient hors service 2 années plus tard.
3. que 3 voitures soient hors service 2 années plus tard.

Exercice 11

Un tireur ayant à sa disposition 4 cartouches, tire sur une cible. La probabilité d'atteindre le but lors de chaque coup est de 0.6. On note par $X =$ "nombre de cartouches restantes"
Déterminer la loi de probabilité de la VAR X.

Exercice 12

Un lapin met au monde une portée de 9 laperaux, comprenant 2 noirs, 3 blancs et 4 tachetés. 6 laperaux s'échappent. On suppose que chaque laperau a la même envie et la même possibilité de s'échapper. Soit X la VAR qui à chaque groupe de 6 laperaux échappés, associe le nombre de laperaux blancs qui en font partie. Trouver la loi de probabilité de X.

Exercice 13

Soient X et Y deux VAR indépendantes de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Calculer $P(X + Y = n)$.

Exercice 14

Soit X une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Si $\mathbb{E}(X) = 12.75$ et $Var(X)$. Quelle sont les valeurs respectives de n et p.

Exercice 15

Chaque fois on réalise une épreuve de Bernouilli, on a une probabilité de 0.1 d'obtenir un succés. Combien de fois doit-on réaliser cette épreuve si on veut que la probabilité d'otenir au moins un succés au cours de ces essais soit supérieur à 1/2 ?

Exercice 16

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécéssaires. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 17

Une urne contient une boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages succéssifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de deux couleurs différentes. Soit X la VAR "le nombre de tirages efféctués". Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 18

Un livre contient 4 erreus lors d'une relecture la probabilité qu'une erreur donné soit corrigée est 0.3. Calculer le nombre minimal de relectures nécéssaires pour que la probabilité que toutes les erreurs soient corrigées soit supérieure ou égale à 0.95.

Exercice 19

1. Soit X une VAR discète et finie et prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de probabilité de la VAR X sachant que

$$P(X < 5) = \frac{1}{3} \qquad P(X > 5) = \frac{1}{2} \qquad P(X = 3) = P(X = 4)$$

   Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

2. Soit Y une VAR discète et finie et prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6 avec les probabilités respectives 0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0.1, 0.2 et on note $Z = X+Y$. Déterminer la loi de probabilité de la VAR Z si l'on suppose que X et Y sont indépendantes.

Exercice 20

Soient X et Y deux VAR indépendantes de loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$. Déterminer la loi de probabilité de la VAR $Z = \sqrt{|X^2 - Y^2|}$ et calculer $E(Z)$.

Exercice 21

Soit X une VAR à valeur dans $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ $\mathbb{N}$ telle que

$$P(X=0) = P(X=3) = \frac{4}{14}, \quad \text{et} \quad \mathrm{P(X = 1) = P(X = 2)} = \frac{3}{14}.$$

Déterminer la loi de la VAR $Y = \frac{3X-X^2}{2}$.

Exercice 22

On dispose de 4 boîtes numérotées de 0 à 3. La boîte numéro 3 contient 3 boules blanches, la boîte numéro 2 2 boules blanches et 1 boule noire, la boîte numéro 1 1 boule blanche et 2 boules noires et la boîte numéro 0 3 boules noires. On choisit une boîte au hasard et 2 boules dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte tirée et Y le nombre de boules blanches tirées. Trouver la loi de (X, Y), puis celle de Y. Quel sera le signe de la covariance entre X et Y ? (on demande un raisonnement et non un calcul)

Exercice 23

Un sac contient sept jetons indiscernables au toucher, portant les numéros suivants : 0,1,1,1,2,2,3. On extrait sans remise deux jetons l'un à la suite de l'autre. On note X le résultat du premier tirage et Y le résultat du deuxième tirage.

1. Quelle est la loi du couple (X,Y) ?
2. Quelle est la loi marginale de X ? Quelle est la loi marginale de Y ?
3. Calculer les espérances de X et Y .

Exercice 24

Une entreprise fabrique des pièces d'usines. Parmi les pièces fabriquées, 90 % satisfont aux normes de qualité, 5 % ne satisont pas à ces normes mais fonctionnent quand même et 5 % sont défectueuses. Pour essayer de connaître la fiabilité du fabricant, un client potentiel choisit au hasard 2 pièces. On appelle X le nombre de pièces défectueuses et Y le nombre de pièces aux normes.

1. Calculer la loi du couple (X,Y)et sa matrice de variance-covariance.
2. Trouver les lois de X et de Y, puis leurs espérances.
3. Retrouver ce dernier résultat en utilisant le principe de linéarité de l'espérance.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 25

Deux frères s'associent pour fonder une entreprise. Au bout d'un an, celle-ci emploie déjà 10 personnes : les 2 patrons, 3 employés et 5 ouvriers. Un journaliste s'intéressant à cette nouvelle entreprise décide d'interviewer 3 personnes au hasard. Soit X le nombre de patrons et Y le nombre d'ouvriers parmi ces 3 personnes interrogées.

1. Calculer la loi du couple (X,Y)et son coefficient de corrélation.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 26

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant la loi :

Y/X	-2	-1	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
4	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$

1. Trouver les lois de X et de Y, ainsi que leurs espérances.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Trouver la matrice de variance-covariance de (X, Y). Que peut-on en conclure ? (La matrice de variance-covariance de (X, Y) est simplement : $\begin{pmatrix} \mathrm{var(X)} & \mathrm{cov(X, Y)} \\ \mathrm{cov(X, Y)} & \mathrm{var(Y)} \end{pmatrix}$)
4. Trouver une relation entre X et Y .

Exercice 27

Soit X et Y 2 variables aléatoires indépendantes d'écart-types 4 d'espérance 10. Calculer $\text{cov}(3X + Y - 5, 5X + Y - 1)$.

Exercice 28

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$X \backslash Y$	0	1
0	a	1/6
1	1/12	1/6
2	1/6	b

1. Quelle condition doivent vérifier a et b ?
2. Montrer qu'il existe une valeur unique de a et une valeur unique de b pour lesquelles X et Y sont indṕendants et les déterminer.
   Dans la suite de cet exercice on supposera $a = 1/12$ et $b = 1/3$.
3. Calculer $\text{P}(X < Y)$.
4. On pose $Z = X + Y$.
   (a) Calculer le plus simplement possible l'espérance et la variance de Z.
   (b) Donner la loi conditionnelle de Z, liée par la condition $Y = 0$.
   (c) Donner la loi conditionnelle de Z, liée par la condition $Y = 1$.
   (d) Donner la loi de Z, et retrouver le résultat du a).

Exercice 29

On lance simultanément deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par X la VAR minimale des deux resultats et par Y la VAR miximale des deux resultats

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Les VAR X et Y sont-elles indépendantes ?.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $Var(X)$, $\mathbb{E}(2X - Y)$ et $Var(-2X + 3)$.
5. Déterminer la loi conditionnelle de X sous la condition de $Y = 3$.

Exercice 30

On lance trois fois une pièce de monnaie parfaitement équilibré. On désigne par X la VAR prenant les valeurs 0 et 1 : 0 si le premier lancer donne face et 1 si le premier lancer donne pile et par Y la VAR égale au nombre de faces obtenues après les 3 lancers.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Les VAR X et Y sont-elles indépendantes ?.
   4) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = 1$.

Exercice 31

Une urne contient trois boules numérotés : -1, 0, 1. On tire deux boules succéssivement et avec remise de l'urne et on note par : X la VAR "la somme des deux numéros obtenus" Y la VAR "la produit des deux numéros obtenus"

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2. En déduire les lois marginales de X et de Y.
3. Les VAR X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $Z = |X + Y|$.

Exercice 32

Dans un super-marché les oranges sont vendues par sac de 3 oranges, on tire un sac au hasard et on considère X le nombre d'oranges abimées dans le sac. On sait que

$$P(X = 0) = \frac{15}{20} \qquad P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{10} \qquad P(X = 3) = \frac{1}{20}$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$. La VAR X est-elle répartie suivant une loi binomiale ?

Exercice 33

Soient X et Y deux VAR telle que $Y = X^2$ et que la loi de X est donnée par :

$$P(X = -2) = \frac{1}{6},\ P(X = -1) = \frac{1}{4},\ P(X = 0) = \frac{1}{6},\ P(X = 1) = \frac{1}{4},\ P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2. Donner la loi marginale de Y.
3. Les VAR X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $cov(X, Y)$ et conclure.

Exercice 34

On lance deux dés parfaitement équilibrés. Soit T la somme des points obtenus. On note par X le reste de la division de T par 2 et Y le reste de la division de T par 5.

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2. Donner les lois marginales de X et Y.
3. Les VAR X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 35

1. On jette simultanément deux dés réguliers. Quelle est la probabilité de l'événement "sortie d'une paire" ? (c'est-à-dire la probabilité que les deux dés affichent le même chiffre).
2. Soit X le nombre de paires que l'on peut obtenir en jetant les deux dés quatre fois de suite. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
3. Sami propose à Kamel le jeu suivant : tous deux misent la même somme puis Sami lance quatre fois les deux dés ; s'il obtient au moins une fois une paire il emporte la mise ; s'il n'obtient jamais de paire, Sami emporte la mise. Qui le jeu favorise-t-il ? (Justifier votre réponse).

Exercice 36

On range au hasard 3 boules dans 3 tiroirs chaque tiroir pouvant contenir de 0 à 3 boules. On note par X="le nombre de boules dans le 1^{er} tiroir" et T="le nombre du tiroirs"
Déterminer la loi conjointe de X et de T et en déduire les lois marginales de X et de T.

Exercice 37

On lance 5 fois une pièce de monnaie et on appelle X="le nombre de fois où face apparait" et Y="le nombre de séries de faces." Par exemple : Si on tire FPPFF on a $X = 3$ et $Y = 2$ et si on tire FPFPF on a $X = 3$ et $Y = 3$ et si on tire PPFFF on a $X = 3$ et $Y = 1$.

1. Déterminer la loi de la VAR Xet donner $\mathbb{E}(X)$.
2. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
3. Déterminer la loi marginale de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Chapitre 10

Variables aléatoires réelles discrètes infinies

On généralise toutes les notions vues dans le chapitre précédant au cas où les V.A.R. prennent une infinité dénombrables de valeurs. Toutes les sommes rencontrées précédemment sont remplacées par des sommes de séries numériques, dans le cas où ces séries sont convergentes.

1 V.A.R. discrètes infinies

Théorème : L'ensemble $\{(x_n, P(X = x_n))$ tel que $n \in \mathbb{N}\}$ est la loi de probabilité d'une V.A.R. discrète infinie X si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(X = x_n) \geq 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(X = x_n) = 1. \end{cases}$$

2 Loi d'une fonction de X

Si g est une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_n, \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\}$ alors $Y = g(X)$ est une V.A.R. discrète infinie de loi de probabilité donnée par :

$$\begin{cases} Y(\Omega) = g(X(\Omega)) = \{g(x_n) \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\} = \{y_m \text{ tel que } m \in \mathbb{N}\}. \\ \text{pour tout } m \in \mathbb{N}, \quad P(Y = y_m) = \sum\limits_{x_n \text{ tel que } y_m = g(x_n)} P(X = x_n). \end{cases}$$

Définition 2.1 *Soit X une V.A.R. discrète infinie de loi de probabilité donnée par l'ensemble suivant* $\{(x_n,\ P(X = x_n) = p_n)$ *tel que* $n \in \mathbb{N}\}$.

– *Si la série numérique* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)$ *est absolument convergente on dit alors que la V.A.R.* X *admet une espérance mathématique, notée* $\mathbb{E}(X)$*, et que*
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n).$$
– *Si la série numérique* $\sum x_n P(X = x_n)$ *est divergente on dit alors que la V.A.R.* X *n'admet pas d'espérance mathématique.*
– *Si* g *est une fonction définie sur* $X(\Omega) = \{x_n \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\}$ *alors l'espérance de* $g(X)$ *est donnée par :*
$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x_n) P(X = x_n).$$

On définit de même la variance $Var(X)$, l'écart-type $\sigma(X)$ etc ...

3 Couples de V.A.R. discrètes infinies

Théorème : L'ensemble $\{((x_n, y_m), P((X = x_n) \cap (Y = y_m)) = p_{nm})$ tel que $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}\}$ est la loi conjointe des deux V.A.R. discrètes infinies X et Y ou la loi du couple (X, Y) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, $P(X = x_n, Y = y_m) = p_{n\,m} \geq 0$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P((X = x_n) \cap (Y = y_m)) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P((X = x_m) \cap (Y = y_n)) = 1.$

3.1 Lois marginales :

Soient X et Y deux V.A.R. discrètes infinies de loi conjointe donnée par l'ensemble suivant : $\{((x_n, y_m), P((X = x_n) \cap (Y = y_m)) = p_{nm})$ tel que $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}\}$.

Loi marginale de X :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{x_n \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\}. \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad P(X = x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} P((X = x_n) \cap (Y = y_m)) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{nm}. \end{cases}$$

Loi marginale de Y :

$$\begin{cases} Y(\Omega) = \{y_m \text{ tel que } m \in \mathbb{N}\}. \\ \text{pour tout } m \in \mathbb{N}, \quad P(Y = y_m) = \sum_{n=0}^{\infty} P((X = x_n) \cap (Y = y_m)) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{nm}. \end{cases}$$

Remarque : On dit que les deux V.A.R. X et Y jouent un rôle symétrique si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $X(\Omega) = Y(\Omega)$,
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$P((X = x_n) \cap (Y = y_m)) = P((X = y_m) \cap (Y = x_n)).$$

Remarque : Si X et Y jouent un rôle symétrique alors X et Y ont la même loi de probabilité.
Conséquence : Si X et Y jouent un rôle symétrique alors on détermine la loi marginale de X ou de Y, l'autre s'obtient d'une manière analogue.

4 Loi d'une fonction de deux V.A.R.

Si g est une fonction de deux variables définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ alors : $Z = g(X, Y)$ est une V.A.R. discrète infinie de loi de probabilité donnée par :

$$\begin{cases} Z(\Omega) = \{g(x_n, y_m) \text{ tel que } n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N}\} = \{z_k \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}. \\ \\ \text{pour tout } k \in \mathbb{N}; \\ \qquad P(Z = z_k) = \displaystyle\sum_{(x_n,y_m)\in X(\Omega)\times Y(\Omega) \text{ tel que } g(x_n,y_m)=z_k} P((X = x_n) \cap (Y = y_m)). \end{cases}$$

5 Espérance de fonction de deux V.A.R.

Si g est une fonction de deux variables définie sur $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ alors l'espérance $\mathbb{E}(g(X, Y))$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X, Y)) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g(x_n, y_m) P((X = x_m) \cap (Y = y_n)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g(x_n, y_m) P((X = x_m) \cap (Y = y_n)) \end{aligned}$$

En particulier : Si $g(x, y) = xy$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X\,Y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, y_m\, P((X = x_m) \cap (Y = y_n)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_n\, y_m\, P((X = x_m) \cap (Y = y_n)) \end{aligned}$$

On définit de même : $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X\,Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, etc ...
Remarque : Toutes les propriétés vues dans le chapitre précédant dans le cas discret fini se généralisent au cas infini sous réserve de la convergence des séries numériques écrites.

6 Lois discrètes infinies usuelles

6.1 Loi géométrique

Schéma théorique : On considère une épreuve aléatoire "$\mathcal{E}$" et un évènement A lié à "$\mathcal{E}$" tel que $P(A) = p \in]0,1[$. On répète l'épreuve "$\mathcal{E}$" dans des conditions identiques (p constant et les épreuves répétées sont indépendantes) jusqu'à ce que A soit réalisé pour la première fois. On pose : $X =$"Le nombre d'épreuves "$\mathcal{E}$" effectuées jusqu'à la réalisation de A pour la première fois.
Remarque : La V.A.R. X est dite le temps d'attente du premier évènement A dans un processus sans remise.

Définition 6.1 *On dit alors que X suit une loi géométrique de paramètre p et on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$. La loi de probabilité de X est donnée par :*

1. $X(\Omega) = \{1, \ldots, n, \ldots\} = \mathbb{N}^*$,
2. *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$.

Moments : La moyenne et la variance de X sont données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

6.2 Loi de Poisson

Définition 6.2 *La V.A.R. discrète infinie X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :*

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$
2. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$.

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
Moments : La moyenne et la variance de X sont données par :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad Var(X) = \lambda.$$

Somme de deux lois de Poisson indépendantes : Si $X_1 = \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 = \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux V.A.R. indépendantes alors la loi de probabilité de

$X = X_1 + X_2$ est donnée par $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Remarque : La loi de Poisson est souvent appelée la loi "des petites probabilités" ou la loi "des évènements rares". Par exemple : les accidents d'avions, les maladies exceptionnelles ...

7 Exercices

Exercice 1

Dans un garage le nombre de voitures vendues en une semaine suit la loi de Poisson de paramètre 8.

1. Déterminer la probabilité des événements :
   a) 8 voitures ont été vendues au cours d'une semaine.
   b) Au moins deux voitures ont été vendues en une semaine.
2. Plus de 8 de voitures ont été vendues dans la semaine. Quelles est la probabilité qu'il y ait eu 12 ventes ?
3. Quelles est la probabilité qu'il y ait eu au moins 6 et au plus 10 voitures vendues en une semaine ?
4. Quelles est la probabilité que l'on vende moins de 16 voitures sachant que l'on eu vendue plus de huit ?

Exercice 2

Soit X une VAR qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $E(\frac{1}{1+X})$.

Exercice 3

Dans une pharmacie, le nombre de boites d'un médicament vendues en un mois suit la loi de Poisson de paramètre 10.

1. Déterminer la probabilité des événements suivants : a) 15 boites ont été vendues au cours d'un mois.
   b) Au moins 7 boites ont été vendues en un mois.
2. Plus de 6 de boites ont été vendues dans le mois. Quelles est la probabilité qu'il y ait eu 10 ventes ?
3. Quelles est la probabilité qu'il y ait eu au moins 12 et au plus 18 boites vendues en un mois ?
4. Quelles est la probabilité que l'on vende moins de 21 boites sachant que l'on eu vendue plus de 15 ?

5. Au moins 12 boites ont été vendues en un mois. Quelles est la probabilité qu'il y ait eu 18 ventes ?

Exercice 4

Soit X une VAR telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X = k) = \frac{\lambda}{3^k}$$

1. Déterminer λ.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. X a-t-elle plus de chance d'être paire où impaire ?

Exercice 5

Un automobiliste doit dévisser dans le brouillard les boulons d'une roue de sa voiture. Il utilise une croix dont les 4 extrémités sont des clefs de taille différentes. il procède au hasard sans éliminer les extrémités déja restées. On note par X la VAR égales au "nombre d'éssais pour trouver la bonne clef". Déterminer la loi de probabilité de X et donner son espérance et sa variance.

Exercice 6

Un consièrge possède un trousseau de 10 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui. Soit X le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte. Le consièrge est ivre un jour sur 3, quand il est ivre il essaie les clés au hasard avec remise, sinon il prossède sans remise. Sachant q'un jour 8 éssaies ont été nécéssaires pour ouvrir la porte. Quelle est la probabilité que le consièrge ait été ivre ce jour la ?

Exercice 7

Dans une certaine ville 99% des habitants de langue maternelle arabe. On tire au hasard et avec remise un échantillon de 200 personnes de cette ville. Quelle est la probabilité d'y retrouver entre 194 et 198 personnes de langue maternelle arabe ?

Exercice 8

Le nombre X de clients d'un grand magasin suit une loi de Poisson de paramètre λ. Dans ce magasin, chaque client a la probabilité p de se faire voler son portefeuille. Déterminer la loi de la V.A.R Y égale au nombre de portefeuille volés et son espérance.

Exercice 9

Soit X une VAR telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X = k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$$

1. Déterminer a.
2. La VAR X admet-elle une espérance et une variance ? si oui les calculer.

Exercice 11

Soit X une VAR telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = \frac{e^{-2}2^k}{4(k!)}(1 + ak)$$

1. Déterminer a.
2. La VAR X admet-elle une éspérance et une variance ? si oui les calculer.

Exercice 12 :

Soit $k \in \mathbb{N}$ donné.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n$.
2. Soit f est l'application défine, pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

   Déterminer $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de f.
3. En déduire que pour $|x| < R$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

   Soit $a \in]0, 1[$. On considère la variable aléatoire N dont la loi est donnée par :

$$P(N = n) = (1-a)\, a^n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

4. Vérifier que ceci est bien une loi de probabilité.
5. Calculer l'espérance et la variance de N.
6. Une urne contient des boules blanches et des boules noires dans les proportions respectives p et q avec $p + q = 1$. On effectue des tirages avec remise. Le nombre de tirages est une variable aléatoire N dont la loi est décrite à la première question. Soit X la variable aléatoire éagale au nombre de boules blanches obtenues.
7. Calculer $P(X = k/N = n)$.
8. En déduire la loi de X et calculer l'espérance de X.

Exercice 13 :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes telle que : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ $\forall (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\quad p_{i,j} = P(X = i, Y = j) = \dfrac{(i+j)\, a^{i+j}}{e\,(i!)(j!)}$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Donner les loi marginales de X et de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer l'espérance $E(2^{X+Y})$.

Chapitre 11

Variables aléatoires réelles continues

1 Fonctions densité de probabilité

Soit X une V.A.R. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega)$ est un ensemble infini non dénombrable.

Définition 1.1 *La V.A.R. X est dite continue ou à densité si et seulement s'il existe une fonction définie, continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$, notée en général par f_X et vérifiant la condition suivante :*

$$\text{quelque soit } B \text{ un intervalle de } \mathbb{R}; \quad \text{on a, } P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx.$$

La fonction f_X ainsi définie est appelée la fonction densité de probabilité (que l'on abrège par d. d. p.) de la V.A.R. X.

Conséquences : Soit X une V.A.R. continue de fonction d.d.p. f_X

1. Pour tout a et b dans $\mathbb{R}$ tel que $a \leq b$ on a $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$ et en prenant $a = b$ on obtient $P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$, cela implique pour tout $a \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} P(X = a) = 0, \\ P(X \leq a) = P(X < a). \end{cases}$

   Si X est une V.A.R. continue alors la probabilité que X prenne une valeur isolée est égale à 0.

2. $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ or $P(X \in \mathbb{R}) = P(X \in]-\infty, +\infty[) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$ cela implique que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

Une fonction définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
est une densité de probabilité si et seulement si
• **pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f_X(x) \geq 0$**
(c'est à dire la densité de probabilité est une fonction positive).
• $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par une V.A.R. continue : Si X est une V.A.R. continue de fonction densité de probabilité f_X alors :

$$X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f_X(x) \neq 0\}.$$

Rappelons que : $P(X \in X(\Omega)) = 1$.

2 Fonction de répartition

Définition 2.1 *Soit X une V.A.R. continue de fonction densité de probabilité f_X. La fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :*

$$\begin{aligned} \text{pour tout } x \in \mathbb{R};\ F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X < x) \\ &= P(X \in]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt. \end{aligned}$$

Rappel des propriétés d'une fonction de répartition : Si X est une V.A.R. de fonction de répartition $F_X(x)$ alors on a les propriétés suivantes

P 1. pour tout $x \in \mathbb{R}$; $0 \leq F_X(x) \leq 1$.

P 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ et F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

P 3. La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

P 4. Pour tous réels a et b tels que $a < b$ on a :

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Théorème : Soit f_X fonction densité de probabilité, alors F_X est dérivable et on a :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = F'_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x).$$

Remarque : Une fonction F_X définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une V.A.R continue X si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$,
2. La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

3 Paramètres d'une V.A.R. continue (Espérance & Variance)

Définition 3.1 *Soit X est une V.A.R. continue de fonction densité de probabilité f_X. Si l'intégrale généralisé $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx$ est absolument convergente on dira alors que la V.A.R. X admet une espérance mathématique notée $\mathbb{E}(X)$ et que :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx.$$

Plus généralement : Si g est une fonction quelconque définie sur $X(\Omega)$ alors :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)dx.$$

En particulier : Pour $g(x) = x^2$, on a :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_X(x)dx.$$

Variance et écart-type : $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.
Remarque Toutes les propriétés de l'espérance, de la variance et de l'écart-type vues dans le cas des V.A.R discrètes restent valables dans le cas des V.A.R. continues. (Sous réserve de la convergence des intégrales).

4 Lois continues usuelles

4.1 Loi uniforme

Définition 4.1 *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. La V.A.R. X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ (ou $]a, b[$, ou $]a, b]$ ou $[a, b[$), si et seulement si, sa fonction densité de probabilité f_X est définie de la manière suivante :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ x \in [a, b], \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Notation : Si X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ on écrit alors $X \rightsquigarrow U([a, b])$.
Remarque : Si X suit une loi uniforme sur [a, b] alors $X(\Omega) = [a, b]$.

Fonction de répartition : Soit la V.A.R. continue X qui suit $U([a,b])$, sa fonction de répartition notée F_X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a, \\ \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leq x \leq b, \\ \\ 1 \text{ si } x > b. \end{cases}$$

Moments : Si $X \rightsquigarrow U([a,b])$ alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{b+a}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

4.2 Loi exponentielle

Définition 4.2 *Soit λ un réel tels que $\lambda > 0$. La V.A.R. continue X suit une loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si sa fonction densité de probabilité f_X est définie de la manière*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \ \textit{si } x > 0, \\ 0 \quad \textit{sinon} \end{cases}$$

Notation : Si X suit une loi exponentielle, on écrit alors $X \rightsquigarrow Exp(\lambda)$.
Remarque : Si X suit une loi exponentielle alors $X(\Omega) =]0, +\infty[$.
Fonction de répartition : Soit la V.A.R. continue X qui suit $Exp(\lambda)$, sa fonction de répartition notée F_X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x > 0, \\ 0 \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

Moments : Si $X \rightsquigarrow Exp(\lambda)$ alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

4.3 Loi Normale

On admet que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Définition 4.3 *Soient m et σ deux réels tels que $\sigma > 0$. La V.A.R. continue X suit une loi normale de paramètres m et σ si et seulement si sa fonction densité de probabilité f_X est définie de la manière suivante :*

$$\textit{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Notation : Si X suit une loi normal, on écrit alors $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$.
Remarque : Si X suit une loi normale alors $X(\Omega) = \mathbb{R}$.
Fonction de répartition : Soit la V.A.R. continue X qui suit $\mathcal{N}(m, \sigma)$, sa fonction de répartition notée F_X est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Moments : Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ alors :

$$\mathbb{E}(X) = m \qquad Var(X) = \sigma^2.$$

Définition 4.4 (Loi normale centrée réduite) *Si $m = 0$ et $\sigma = 1$ alors la loi normale de paramètre 0 et 1, notée $\mathcal{N}(0,1)$, est appelée la loi normale centrée réduite ou la loi standard et on a alors la fonction densité f_X et la fonction de répartition F_X notée φ :*

$$\textit{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\textit{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Théorème : Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ et si $Y = \alpha X + \beta$ (où α et β sont deux réels tels que $\alpha > 0$) alors

$$Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\alpha m + \beta, \alpha\sigma).$$

Théorème : Si X est une V.A.R. qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors la V.A.R. $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
Expression de fonction de répartition de $\mathcal{N}(m, \sigma)$ en fonction de φ :
Théorème : Si $X = \mathcal{N}(m, \sigma)$ alors sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \varphi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big).$$

5 Loi de fonction d'une variable aléatoire continue

Soit X une V.A.R. dont on connait sa loi de probabilité c'est-à-dire la fonction d.d.p f_X ou sa fonction de répartition F_X et on cherche à déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = g(X)$ dans certains cas particuliers de fonctions g et dans le cas ou g est une fonction continue et strictement monotone sur $X(\Omega)$.

• **Premier cas particulier :** Loi de $Y = -X$.
Fonction de répartition :
Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) &= P(-X \leq y) = P(X \geq -y) \\ &= 1 - P(X \leq -y) = 1 - F_X(-y). \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = 1 - F_X(-y)$.
Fonction densité de probabilité : pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X(-y) = f_X(-y).$$

• **Deuxième cas particulier :** Loi de $Y = X^2$.
Fonction de répartition :
Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) &= \begin{cases} P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \text{ si } y > 0, \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \text{ si } y > 0, \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \text{ si } y > 0, \\ \\ 0 \text{ si } y \leq 0. \end{cases}$$

Fonction densité de probabilité : pour tout $y \in \mathbb{R}$ $f_Y(y) = F'_Y(y)$.
On déduit :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right] \text{ si } y > 0, \\ \\ 0 \text{ si } y \leq 0. \end{cases}$$

• **Troisième cas particulier :** Loi de $Y = |X|$.
Fonction de répartition :
Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) &= \begin{cases} P(-y \leq X \leq y) \text{ si } y > 0, \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_X(y) - F_X(-y) \text{ si } y > 0, \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) - F_X(-y) \text{ si } y > 0, \\ \\ 0 \text{ si } y \leq 0. \end{cases}$$

Fonction densité de probabilité : pour tout $y \in \mathbb{R}$ $f_Y(y) = F'_Y(y)$.
On déduit :

$$f_Y(y) = \begin{cases} [f_X(y) + f_X(-y)] \text{ si } y > 0, \\ \\ 0 \text{ si } y \leq 0. \end{cases}$$

Cas général : Loi de $Y = g(X)$ où g est une fonction strictement monotone sur $X(\Omega)$. Soient X une V.A.R. continue de fonction d.d.p. f_X définie de manière suivante : $X(\Omega) =]a, b[$ et $Y = g(X)$ où g est une fonction strictement monotone sur $X(\Omega)$. Pour déterminer la loi de Y on commence par la détermination de la fonction de répartition F_Y en fonction de F_X et puis par dérivation on obtient la fonction d.d.p. f_Y.

6 Exercices

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(1 - x^2) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur λ.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(2x - x^3) & \text{si } 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f représente-t-elle une fonction de densité de probabilité ? si oui, déterminer la valeur de λ.

Exercice 3

La fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X, représentant la durée de vie d'un certain composant électronique est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{si } x > 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la probabilité suivante : $P(X > 20)$.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ x+1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ -x+1 & \text{si } [0, 1] \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Soit X une V.A. de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

3. Déterminer $P(|X| > a)$ et déterminer les valeurs de a pour lesquelles $P(|X| > a) < \dfrac{1}{6a^2}$.

Exercice 5

Montrer que la fonction F définie par : $x \longrightarrow F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X dont on donnera sa fonction densité.

Exercice 6

La Belle Au Bois Dormant est assise devant la cheminée, sa quenouille à la main. L'intervalle de T, exprimé en munites, qui sépare l'instant où elle a pris place pour filer la laine de celui où elle va se piquer avec le fuseau suit une loi exponentielle de moyenne $E(T) = 10$.

1. Exprimer la densité de probabilité et la fonction de répartition de T. Calculer l'écart type de T.

2. Sachant qu'il ne lui est rien arrivé pendant les huits premières minutes, calculer la probabilité pour qu'elle ne se pique pas dans les cinq minutes qui suivent.

Exercice 7 : Utilisation de la table de la Loi Normale $N(0,1)$

1. Soit X une V.A. suivant la loi $N(0,1)$. Déterminer $t>0$ tel que :

$$P(-t \leq X \leq t) = 0.95$$

2. Soit X une V.A. suivant la loi $N(8,4)$. Calculer

$$P(X \leq 7.5), \quad P(X \geq 8.5), \quad P(6.5 < X < 10) \quad \text{et} \quad P\big((x>6)/(x>5)\big).$$

3) Soit X une V.A. suivant la loi $N(\mu,\sigma)$. Déterminer l'espérance $E(X)$ la variance $V(X)$ sachant que :

$$P(X < -1) = 0.05, \quad P(X > 3) = 0.12$$

Déterminer $P(X > 0)$.

Exercice 8

On a constaté que la répartition du taux de cholestérol pour un grand nombre de personnes est la suivante : taux inférieur à 165 cg est 58%, taux compris entre 165 cg et 180 cg est 38%, taux supérieur à 180 cg est 4%.

1. Sachant que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale, calculer la valeur moyenne du taux de cholestérol et l'écart type moyen.

2. On admet que les personnes dont le taux est supérieur à 183 cg doivent subir un traitement. Qu'elle est le nombre de personnes à soigner dans une population de 100000 personnes ?

Exercice 9

La médiane d'une variable aléatoire continue ayant une fonction de répartition F est la valeur m, telle que : $F(m) = \frac{1}{2}$. Trouver la médiane de la variable aléatoire X lorsque X est une variable aléatoire :

1. Uniforme sur $[a,b]$.
2. Normale de parmètres μ et σ.
3. Exponentielle de paramètre λ.

Exercice 10

Le mode d'une variable aléatoire continue ayant une fonction de densité de probabilité f est la valeur x pour laquelle $f(x)$ atteint son maximum. Calculer le mode de la variable aléatoire X lorsque X est une variable aléatoire :

1. Uniforme sur $[a, b]$.
2. Normale de parmètres μ et σ.
3. Exponentielle de paramètre λ.

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire continue ayant une fonction de répartition F. On définit la variable aléatoire $Y = F(X)$.
Montrer que Y suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 12

Si X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Déterminer la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire Y définie par : $Y = Log(X)$.

Exercice 13

Soit X est une variable aléatoire uniforme sur $[-1, \frac{3}{2}]$. Déterminer la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = X^2$.

Exercice 14

Soit X est une variable aléatoire de fonction densité de probabilité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que la fonction f définit bien une densité de probabilité.
2. Montrer que $Y = X^2$ est une variable aléatoire continue dont on donnera sa fonction densité de probabilité. Calculer $E(X)$.

Exercice 15

Soit X est une variable aléatoire Normale centrée réduite.

1. Déterminer la fonction densité de probabilité la variable aléatoire $Y = X^2$, puis calculer $E(Y)$.

2. Déterminer la fonction densité de probabilité la variable aléatoire $Z = |X|$, puis calculer $E(Z)$.

3. Déterminer la fonction densité de probabilité la variable aléatoire $T = |X| + a$ où a est une constante réelle, puis calculer $E(T)$.

Exercice 16

Soit X est une variable aléatoire continue de fonction densité de probabilité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Déterminer la fonction densité de probabilité la variable aléatoire X^3.

Exercice 17

Soit X est une variable aléatoire continue de fonction densité de probabilité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } |x| < k \\ 0 & \text{si } |x| \geq k \end{cases}$$

.

1. Déterminer la constante k.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. On pose $T = X^2 + 1$. Déterminer la fonction densité de probabilité g de T et calculer $E(T)$ et $\sigma(T)$.

Exercice 18

Déterminer la constante k pour que f soit une d.d.p dans les deux cas suivants :

1. $f(x) = k\, 3^{-x}\, \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$.
2. $f(x) = k\, 3^{-x^2}, \quad \forall x \in I\!R$. On rappelle que si $D \subset I\!R$

$$\mathbf{1}_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

Exercice 19

Soit X une V.A.R de fonction d.d.p f définie par :

$$f(x) = \lambda\,(1 - x^2)\,\mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

1. Calculer λ et déterminer la fonction de répartition F de X.
2. Calculer $P(|x| \geq \frac{1}{2})$.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 20

Soit X une V.A.R de fonction d.d.p f définie par :

$$\forall\, x \in I\!R \qquad f(x) = \frac{2}{\pi}.\frac{1}{1+x^2}.$$

1. Vérifier que f possède les proprietés d'une densité de probabilité.
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Déterminer la fonction de répartition F de X et vérifier ses proprietés.
4. Calculer $P(X \geq 1)$.

Exercice 21

Soit X une V.A.R de fonction d.d.p f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X et calculer $E(X)$.
2. Soit a un réel quelconque. On pose pour tout réel x

$$F_a(x) = P\Big((X < x)/(X > a)\Big),$$

calculer $F_a(x)$ pour tout réel x.

Chapitre 12

Couples de variables aléatoires & Somme deux variables aléatoires

1 Couples de variables aléatoires réelles continues

Définition 1.1 *Soient X et Y deux V.A.R. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Les V.A.R. X et Y sont dites conjointement continues si et seulement si il existe une fonction de deux variables réelles, notée $f_{X,Y}$, définie, continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant la condition suivante : Quelque soit le domaine D (mesurable) $\subset \mathbb{R}^2$ on a :*

$$P((X,Y) \in D) = \int \int_D f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

La fonction ainsi définie est appelée la fonction densité conjointe de X et Y ou du couple (X,Y).

Conséquence : Une fonction de deux variables réelles définie, continue par morceaux sur $\mathbb{R}^2$ est la fonction densité conjointe de deux V.A.R. X et Y ou du couple (X,Y) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$,
2. $\int \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$.

2 Domaine ou support d'un couple de V.A.R. continue

Soient X et Y deux V.A.R. conjointement continues de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$. On appelle domaine ou support de X et Y ou du couple (X,Y), que l'on note par $\Omega_{(X,Y)}$, l'ensemble des couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ telle que la densité conjointe $f_{X,Y}(x,y)$ est non nulle.

$$\Omega_{(X,Y)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f_{X,Y}(x,y) \neq 0\} \quad \text{et} \quad P((X,Y) \in \Omega_{(X,Y)}) = 1.$$

3 Couple uniforme de V.A.R. continues

Le couple de V.A.R. conjointement continues (X,Y) est dit uniforme sur un domaine D si et seulement si sa fonction densité conjointe est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{aire(D)} \text{ si } (x,y) \in D, \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : Si la fonction densité conjointe $f_{X,Y}$, d'un couple de V.A.R. continues (X,Y) est de la forme suivante :

$$\begin{cases} C \text{ si } (x,y) \in D, \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

alors le couple (X,Y) est nécessairement uniforme et on a alors la constante C est telle que : $C = \frac{1}{aire(D)}$.

4 Fonction de répartition conjointe & fonction de répartion marginale

4.1 Fonction de répartition conjointe

Définition 4.1 *Soient X et Y deux V.A.R. conjointement continues de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$. La fonction de répartition conjointe notée $F_{(X,Y)}$ est définie par : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) \\ &= P((X,Y) \in]-\infty, x] \times]-\infty, y]) = \int\int_{]-\infty,x]\times]-\infty,y]} f_{X,Y}(s,t)dsdt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \Big(\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dt \Big) ds = \int_{-\infty}^{y} \Big(\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(s,t)ds \Big) dt. \end{aligned}$$

Théorème : Soient X et Y deux V.A.R. conjointement continues de fonction densité conjointe $f_{X,Y}(x,y)$. Si la fonction de répartition conjointe $F_{(X,Y)}$ est de classe C^2 au point (x,y) alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_{(X,Y)}(x,y) = f_{X,Y}(x,y).$$

4.2 Fonction de répartition marginale

Définition 4.2 *Soient X et Y deux V.A.R. conjointement continues de fonction de répartition conjointe $F_{(X,Y)}$.*
• *Fonction de répartition marginale F_X de X : pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P((X \leq x) \cap (Y \in \mathbb{R})) = P((X,Y) \in]-\infty, x] \times]-\infty, +\infty[)$$

• *Fonction de répartition marginale F_Y de Y : pour tout $y \in \mathbb{R}$,*

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P((X \in \mathbb{R}) \cap (Y \leq y)) = P((X,Y) \in]-\infty, +\infty] \times]-\infty, y])$$

5 Fonction densité marginale

Si X et Y sont deux V.A.R. conjointement continues de fonction densité conjointe $f_{(X,Y)}$ alors X et Y sont individuellement continues et la densité f_X est appelée la densité marginale de X et la densité f_Y est appelée la densité marginale de Y.
• Densité marginale de f_X de X :

$$\begin{aligned}
\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, F_X(x) &= P(X \leq x) = P((X \leq x) \cap (Y \in \mathbb{R})) \\
&= P((X,Y) \in]-\infty, x] \times]-\infty, +\infty[) \\
&= \int\int_{]-\infty,x] \times]-\infty,+\infty[} f_{X,Y}(s,t)dsdt \\
&= \int_{]-\infty,x]} \Big(\int_{]-\infty,+\infty[} f_{X,Y}(s,t)dt \Big) ds
\end{aligned}$$

$$\text{d'où pour tout } x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \int_{]-\infty,+\infty[} f_{X,Y}(x,t)dt.$$

• Densité marginale de f_Y de Y :

$$\begin{aligned}
\text{pour tout } y \in \mathbb{R}, F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P((X \in \mathbb{R}) \cap (Y \leq y)) \\
&= P((X,Y) \in]-\infty, +\infty] \times]-\infty, y[) \\
&= \int\int_{]-\infty,+\infty] \times]-\infty,y} f_{X,Y}(s,t)dsdt \\
&= \int_{]-\infty,y]} \Big(\int_{]-\infty,+\infty[} f_{X,Y}(s,t)ds \Big) dt
\end{aligned}$$

$$\text{d'où pour tout } y \in \mathbb{R}, f_Y(y) = \int_{]-\infty,+\infty[} f_{X,Y}(s,y)ds.$$

Définition 5.1 *On dit que les deux V.A.R. X et Y jouent un rôle symétrique si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *le support $\Omega_{(X,Y)}$ du couple (X,Y) reste inchangé lorsqu'on remplace y par x et x par y.*
2. *pour tout $(x,y) \in \Omega_{(X,Y)}$ on a $f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(y,x)$.*

Théorème Si X et Y jouent un rôle symétrique alors X et Y on la même loi de probabilité.
Conséquence : Si X et Y jouent un rôle symétrique alors on détermine la loi marginale de X ou de Y, l'autre s'obtient d'une manière analogue.

6 Variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux V.A.R. conjointement continues de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ et de fonction de répartition conjointe $F_{(X,Y)}$ telle que f_X est la densité marginale de X, f_Y est la densité marginale de Y, F_X est la fonction de répartition de X et F_Y est la fonction de répartition de Y.
Théorème :
Les V.A.R. X et Y sont dites indépendantes, si et seulement si,

$$\text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P((X \leq x))P((Y \leq y))$$

si et seulement si

$$\text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Théorème :
Les V.A. R. X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. (la loi du couple est égale au produit des densités marginales.)

Si les V.A.R. X et Y sont indépendantes alors nécessairement le domaine $\Omega_{(X,Y)}$ du couple (X,Y) est un rectangle.
(La réciproque n'est pas en général vraie)

Conséquence : Si $\Omega_{(X,Y)}$ n'est pas un rectangle alors X et Y ne sont pas indépendantes.

7 Espérances de fonctions de deux variables aléatoires continues

Définition 7.1 *Soient X et Y deux V.A.R. conjointement continues de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ et g une fonction définie sur le domaine $\Omega_{X,Y}$ du couple (X,Y). L'espérance mathématique de $g(X,Y)$, notée $\mathbb{E}(g(X,Y))$ est donnée par :*

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dxdy.$$

Cas particulier : Si $g(x,y) = xy$ on a

$$\mathbb{E}(XY) = \int \int_{\mathbb{R}^2} x\, y f_{X,Y}(x,y) dxdy.$$

Remarque : Sans connaitre les densités marginales f_X et f_Y et connaissant uniquement la fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ de X et Y, on peut calculer $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ par :

$$\mathbb{E}(X) = \int \int_{\mathbb{R}^2} x f_{X,Y}(x,y) dxdy, \qquad \mathbb{E}(Y) = \int \int_{\mathbb{R}^2} y f_{X,Y}(x,y) dxdy,$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \int \int_{\mathbb{R}^2} x^2 f_{X,Y}(x,y) dxdy, \qquad \mathbb{E}(Y^2) = \int \int_{\mathbb{R}^2} y^2 f_{X,Y}(x,y) dxdy,$$

Covariance :

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Rappelons que :
• Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ (c'est-à-dire $Cov(X,Y) = 0$) et que la réciproque n'est pas en général vraie.
• Si $E(X.Y) \neq E(X)E(Y)$ (c'est-à-dire $Cov(X,Y) \neq 0$) alors les V.A.R. X et Y ne sont pas indépendantes.
Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Important : Toutes les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire vues dans le cas des V.A.R. discrètes restent valables dans le cas des V.A.R. continues.
Matrices des variances et des covariances :

Soient X et Y deux V.A.R. on appelle matrice des variances et des covariances du couple (X, Y), la matrice carrée d'ordre 2, notée $\Sigma_{X,Y}$ et définie par :

$$\Sigma_{X,Y} = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}.$$

Remarques :
• $\Sigma_{X,Y}$ est une matrice symétrique car $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.
• Si X et Y sont indépendantes alors $\Sigma_{X,Y}$ est une matrice diagonale car $Cov(X, Y) = 0$.

8 Distributions et lois conditionnelles

Soient X et Y deux V.A.R. conjointement continues de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ telle que f_X est la densité marginale de X et f_Y est la densité marginale de Y.
• **Densité de X sachant $Y = y$:** Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f_Y(y) \neq 0$, la densité de X sachant $Y = y$, notée $f_{(X/Y=y)}$, est définie par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f_{(X/Y=y)}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

• **Densité de Y sachant $X = x$:** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_X(x) \neq 0$, la densité de Y sachant $X = x$, notée $f_{(Y/X=x)}$, est définie par :

$$\text{pour tout } y \in \mathbb{R}, \quad f_{(Y/X=x)}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Remarque : Si X et Y sont indépendantes alors : $f_{(X/Y=y)} = f_X$ et $f_{(Y/X=x)} = f_Y$.

Remarque : Si on connait les densités f_X et $f_{(Y/X=x)}$ (resp. f_Y et $f_{(X/Y=y)}$) et on cherche à déterminer la densité f_Y ou la loi de Y (resp. la densité f_X ou la loi de X) on procède comme suit :

1. On détermine $f_{X,Y}$ en utilisant le fait que : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_{(Y/X=x)(y)}$. (resp. $f_{X,Y}(x, y) = f_Y(y)f_{(X/Y=y)}(x)$).
2. On détermine la densité marginale f_Y (resp.la densité marginale f_X) à partir de $f_{X,Y}$.

Fonction de répartition conditionnelles
• Connaissant $f_{(X/Y=y)}$ on a alors : pour tout intervalle D de $\mathbb{R}$ $P((X \in$

$D)/(Y=y)) = \int_D f_{(X/Y=y)}(x)dx$ et la fonction de répartition de X sachant $Y=y$:

$$\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\quad F_{(X/Y=y)}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(X/Y=y)}(s)ds.$$

• Connaissant $f_{(Y/X=x)}$ on a alors : pour tout intervalle D de $\mathbb{R}$ $P((Y\in D)/(X=x)) = \int_D f_{(Y/X=x)}(y)dy$ et la fonction de répartition de Y sachant $X=x$:

$$\text{pour tout } y\in\mathbb{R},\quad F_{(Y/X=x)}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{(Y/X=x)}(t)dt.$$

9 Changement de couple de variables aléatoires continues

Soient (X,Y) un couple de V.A.R. continues de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ et $\Omega_{(X,Y)}$ le support ou le domaine du couple (X,Y). On suppose connu deux autres V.A.R. U et V définies de la manière suivante : $U=\Phi_1(X,Y)$ et $V=\Phi_2(X,Y)$ où Φ_1 et Φ_2 sont deux fonctions définies sur $\Omega_{(X,Y)}$.

On cherche à déterminer, sous certaines conditions sur les fonctions Φ_1 et Φ_2, la fonction densité conjointe $f_{U,V}$ du nouveau couple (U,V). La démarche se fait en quatre étapes :

1. A partir des égalités : $u=\Phi_1(x,y)$ et $v=\Phi_2(x,y)$, on exprime x et y en fonction de u et v. On obtient ainsi deux fonctions $\Psi_1(u,v)$ et $\Psi_2(u,v)$ telle que : $x=\Psi_1(u,v)$ et $y=\Psi_2(u,v)$.
2. En utilisant le support $\Omega_{(X,Y)}$ et les fonctions Φ_1,Φ_2,Ψ_1 et Ψ_2 on détermine le support ou le domaine $\Omega_{(U,V)}$ du nouveau couple (U,V) de telle sorte que : lorsque (x,y) varie dans $\Omega_{(X,Y)}$, le couple (u,v) varie dans $\Omega_{(U,V)}$.
3. On détermine la matrice Jacobienne $J(\Psi_1,\Psi_2)(u,v)$ de (Ψ_1,Ψ_2) au point (u,v) définie de la manière suivante :

$$J(\Psi_1,\Psi_2)(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Psi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\Psi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\Psi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\Psi_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}.$$

   et on vérifie que :

$$\det(J(\Psi_1,\Psi_2)(u,v)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Psi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\Psi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\Psi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\Psi_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pour tout } (u,v)\in\Omega_{(U,V)}.$$

4. les V.A.R. U et V sont conjointement continues et la densité conjointe $f_{(U,V)}$ du nouveau couple (U,V) est donnée par : $f_{(U,V)}(u,v) =$

$$= \begin{cases} f_{X,Y}(\Psi_1(u,v),\Psi_2(u,v))\,.\,|\det(J(\Psi_1,\Psi_2)(u,v))| \text{ si } (u,v)\in\Omega_{(U,V)}, \\ \\ 0 \qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

10 Lois de fonctions de deux variables aléatoires continues

Soient (X,Y) un couple de V.A.R. continues de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ et $\Omega_{(X,Y)}$ le support ou le domaine du couple (X,Y). On pose une autre V.A.R. Z définie de la manière suivante :

$$Z = \Phi(X,Y)$$

où Φ est une fonction définie sur $\Omega_{(X,Y)}$. On cherche à déterminer la fonction densité de probabilité f_Z de la V.A.R. Z. On peut procéder de deux manières différentes :

• **Méthode directe :**
On détermine $Z(\Omega)$ par :

$$Z(\Omega) = \Phi(\Omega_{(X,Y)}) = \{z = \Phi(x,y) \text{ tel que } (x,y)\in\Omega_{(X,Y)}\}.$$

Puis on calcule la fonction de répartition F_Z de la V.A.R. Z définie par : pour tout $z\in\mathbb{R}, F_Z(z) = P(Z\leq z)$ de la manière suivante :

- Pour tout $z\notin Z(\Omega)$; $F_Z(z) = 0$ ou $F_Z(z) = 1$.
- On a pour tout $z\in Z(\Omega)$; $F_Z(z) = P(Z\leq z) = P(\Phi(X,Y)\leq z)$.
  On pose alors pour tout $z\in Z(\Omega)$ fixé :

  $$\Omega_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } \Phi(x,y)\leq z\},$$

  on a donc pour tout $z\in Z(\Omega)$

  $$F_Z(z) = P((X,Y)\in\Omega_z) = \int\int_{\Omega_z} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

  que l'on calculera.

La densité de probabilité f_Z est donc donnée par :

$$\text{pour tout } z\in\mathbb{R}, f_Z(z) = F'_Z(z).$$

• **Méthode utilisant le changement de couples de variables aléatoires :**
On considère le changement de couple de variables aléatoires suivant :

$Z = \Phi(X, Y)$ et $W = \varphi(X, Y) = X$ ou Y (un choix le plus simple possible) .

On détermine la densité conjointe $f_{(Z,W)}$ du nouveau couple (Z, W) comme indiqué dans le chapitre 13 section 9. Puis on détermine la densité marginale f_Z à partir de la densité conjointe $f_{(Z,W)}$.
Remarque : Pour deux choix différents de l'expression de $W = \varphi(X, Y)$ on aboutit à deux expressions différentes de $f_{(Z,W)}$ mais à la même expression de f_Z.

11 Somme de deux V.A.R. continues indépendantes

11.1 Produit de convolution

Soient f et g deux fonctions définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. Le produit de convolution de f et g est la fonction, notée $f \star g$ et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dxdt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)dxdt.$$

Propriété :
Le produit de convolution est commutatif c'est-à-dire :

$$g \star f = f \star g.$$

11.2 Fonction de répartition de la somme de deux V.A.R. continues indépendantes

Soient X et Y deux V.A.R. indépendantes telles que f_X est la d.d.p. de X et F_X est la fonction de répartition de X, f_Y est la d.d.p.de Y et F_Y est la fonction de répartition de Y. On pose $Z = X + Y$ et on cherche à déterminer la fonction de répartition F_Z de la V.A.R. Z :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{R},\ F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = \int\int_{\Omega_z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

où $\Omega_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x+y \leq z\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\text{pour tout } z \in \mathbb{R},\ F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) f_Y(y) dx \Big) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) dx \Big) f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y) f_Y(y) dy = F_X \star f_Y(z).
\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}
\text{pour tout } z \in \mathbb{R},\ F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y) dy \Big) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{z-y} f_Y(y) dy \Big) f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x) f_X(x) dy = F_Y \star f_X(z).
\end{aligned}$$

Si $Z = X + Y$ avec X et Y deux V.A.R. indépendantes, on a alors
$F_Z(z) = F_{X+Y}(z) = F_X \star f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y) f_Y(y) dy$
$\quad = F_Y \star f_X(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x) dx.$

11.3 Fonction de répartition de la somme de deux V.A.R. continues indépendantes

Soient X et Y deux V.A.R. indépendantes telles que f_X est la d.d.p. de X et f_Y est la d.d.p. de Y et on pose $Z = X + Y$. Pour obtenir la fonction d.d.p. f_Z de la V.A.R. Z on dérive la fonction de répartition F_Z par rapport à z.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\text{pour tout } z \in \mathbb{R},\ f_Z(z) &= \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y) f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} (F_X(z-y)) f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = f_X \star f_Y(z).
\end{aligned}$$

Ou bien

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{R},\ f_Z(z) = \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)F_Y(z-x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz}(f_X(x))F_Y(z-x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = f_Y \star f_X(z).$$

Si $Z = X + Y$ avec X et Y deux V.A.R. indépendantes, on a alors
$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = f_X \star f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$
$= f_Y \star f_X(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.$

Remarque : Si X et Y deux V.A.R . indépendantes de même d.d.p f alors la fonction d.d.p. f_Z de la V.A.R. $Z = X + Y$ est donnée par :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{R}, f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = f \star f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)f(y)dy.$$

12 Exercices

Exercice 1

Soient X et Y deux V.A.R indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la fonction de répartition de chacune des V.A.R $S = sup(X,Y)$ et $T = inf(X,Y)$.

Exercice 2

Soit (X,Y) un couple de V.A.R de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ définie par

$$f_{X,Y} = \begin{cases} kxye^{-x^2-y^2} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer k.
2. Déterminer les densités marginales f_X de X et f_Y de Y.
3. Déterminer la fonction densité f_Z de V.A.R $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$.

Exercice 3

On Considère (X,Y) un couple de V.A.R de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ définie par

$$f_{X,Y} = \begin{cases} \frac{2}{x^2y^2} & \text{si } x \geq y \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Construire le domaine du couple (X, Y).
2. On pose $U = XY$ et $V = \frac{X}{Y}$. Déterminer le domaine du couple (U, V) et la fonction densité conjointe $f_{(U,V)}$ du couple (U, V).
3. Donner les densités marginales f_U de U et f_V de V.
4. Les V.A.R U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

Si X et Y deux V.A.R indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0, 2]$. Déterminer la fonction densité f_S de la V.A.R $S = X - Y$.

Exercice 5

Le couple de V.A.R (X, Y) est une variable aléatoire uniforme sur $\Omega \subset I\!R^2$ suivant

$$\Omega = \{(x, y) \in I\!R^2 \text{ tel que } 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

1. Trouver la fonction densité conjointe de X et Y.
2. Trouver les densités marginales f_X de X et f_Y de Y.

Exercice 6

On considère (X, Y) un couple de V.A.R de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ définie par

$$f_{X,Y} = \begin{cases} ke^{-\frac{x+y}{2}} & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité marginale f_X de X. En déduire la valeur de k.
2. Déterminer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ et $cov(X, Y)$.
3. On pose $T = e^X$ et $Z = \frac{X}{2}$. Déterminer les densité de T et Z.
4. Déterminer $E(Z)$, $V(Z)$ et $E(T)$.

Exercice 7

Soit (X, Y) un couple de V.A.R de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ définie par

$$f_{X,Y} = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + 3y)e^{-x-2y} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y ainsi que les lois conditionnelles de Y si $X = x$ et X si $Y = y$.
2. Déterminer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ et $cov(X, Y)$.

Exercice 8

Soit (X,Y) un couple de V.A.R de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ définie par

$$f_{X,Y} = \begin{cases} \frac{k}{x^2 y} & \text{si } x \geq 1 \text{ et } \frac{1}{x} \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Construire le domaine du couple (X,Y).
2. Déterminer k. (Discuter selon $0 < y \leq 1$ et $y > 1$).
3. Déterminer les densités marginales de X et de Y.
4. Déterminer la densité conditionnelle de Y si $X = x$.

Exercice 9

Soit (X,Y) un couple de V.A.R de fonction densité conjointe $f_{X,Y}$ définie par

$$f_{X,Y} = \begin{cases} ky^2 e^{-\frac{x+1}{2}} & \text{si } 0 < y < x+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Construire le domaine du couple (X,Y) et déterminer k.
2. On pose $U = X - Y + 1$ et $V = \frac{1}{2}X$. Déterminer le domaine la densité conjointe du couple (U,V).
3. Déterminer les densités marginales de U et de V.
4. Les variables U et V snt-elles indépendantes ?

Exercice 10

Soient X et Y deux V.A.R indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$. Onpose $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$.

1. Déterminer la densité conjointe du couple (U,V).
2. Déterminer les densités marginales de U et de V.
3. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 11

Soit (X,Y) un couple de V.A.R de densité

$$f_{X,Y} = \begin{cases} [(1+ax)(1+ay)-1]e^{-x-y-axy} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $a \in]0,1[$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Quelles sont les lois de X et de Y ?
3. Que valent $E(X)$ et $E(Y)$?
4. Déterminer la loi coditionnelle de X sachant $Y = y$ ainsi que $E(X/Y = y)$.

Exercice 12

Soit (X, Y) un couple de V.A.R de densité

$$f_{X,Y} = \lambda e^{-\frac{y}{2} - xy + x^2} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Déterminer λ, la loi de X et la loi de Y.
2. Calculer $cov(x, y)$ et étudier l'independance de X et Y.

Exercice 13

Soient X et Y 2 V.A.R indépendantes et de même loi de densité définie par

$$f_X \; : \; x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}cos(x) & \text{si } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la fonction densité f_Z de la V.A.R $Z = X + Y$.

Exercice 14

Soient X et Y 2 V.A.R de densité conjointe définie par

$$f_X \; : \; x \longmapsto \begin{cases} \frac{2e^{-2x}}{x} & \text{si } 0 < x < +\infty \text{ et } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $cov(X, Y)$.

Exercice 15

La densité conjointe de X et Y est donnée par

$$f_{X,Y} \; : \; (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-(y + \frac{x}{y})} & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et monter que $cov(X, Y) = 1$.

Exercice 16

Soient X et Y deux variables aléatoires coinjoitement continues de fonction densité conjointe de X et Y définie par :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } x > 0 \;\; y > 0 \;\text{ et }\; x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer k. Trouver les fonctions densités marginales f_X de X et f_Y de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Déterminer la fonction génératrice des moments ϕ_X de X et en déduire $V(X)$.
3. Déterminer la fonction densité de X^2.
4. Calculer $E(X^2+Y^2)$ et $V(3X^2+1)$.

Exercice 17 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \alpha e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \le x \le \ln 2, 0 \le y \le 1 \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $\alpha = 1$, pour que f soit une densité de probabilité.
2. Calculer les densités marginales de X et Y.
3. Préciser la loi de Y.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer la fonction de répartition F de X.
6. Montrer que X admet une espérance et calculer l'espérance de X.
7. On pose $Z = |X|$.
   Déterminer la fonction de répartition G de Z.
   Déterminer une densité g de Z.

Exercice 18 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On définit les variables $S = \sup(X,Y)$, et $I = \inf(X,Y)$.

1. Exprimer la fonction de répartition de S et I en fonction de celles de X et Y.

2. Préciser les densités de S et I lorsque X suit une loi exponentielle de paramètres λ et Y suit une loi exponentielle de paramètres μ.
3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant une loi uniforme sur $]-1, 1[$. Déterminer la densité de probabilité de la variable $X_1 + X_2$.
4. Donner la loi de la variable $T = |X_1|$.
5. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq \min(t, 1-t) \leq \frac{1}{2}$.
6. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\min(T, 1-T)$. En déduire la densité de probabilité de $\min(T, 1-T)$.

Chapitre 13

Fonction gńératrice des moments

1 Définition et propriétés

Définition 1.1 *Soit X une V. A. R., la fonction génératrice des moments de X notée φ_X et définie par : pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}(e^{tX})$ existe on a*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Remarques :

1. Si X est une V. A. R. discrète finie :

$$\varphi_X(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} P(X = x_i).$$

2. Si X est une V. A. R. discrète infinie :

$$\varphi_X(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} e^{tx_i} P(X = x_i).$$

3. Si X est une V. A. R. continue :

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx.$$

Propriétés :
Soit φ_X une fonction génératrice des moments associée à X alors :

1. pour tout t, $\varphi_X(t) > 0$.

2. $\varphi_X(0) = 1$
3. $\varphi'_X(0) = \left(\frac{d}{dt}\varphi_X(t)\right)_{|t=0} = \mathbb{E}(X)$
4. $\varphi_X^{(n)}(0) = \left(\frac{d^n}{dt^n}\varphi_X(t)\right)_{|t=0} = \mathbb{E}(X^n)$.
5. Soient a et b deux réels. Si $Y = aX + b$ alors

$$\text{pour tout } t, \quad \varphi_Y(t) = e^{b\,t}\varphi_X(at).$$

Remarque : Pour calculer le moment d'ordre n, noté $\mathcal{M}_n$ d'une variable aléatoire X il suffit de calculer la dérivée n ième de la fonction génératrice des moments associée à X en 0.

Théorème
L'application qui à la V. A. R. X associe sa fonction génératrice des moments est **bijective**.

Conséquence : Si on a la fonction génératrice des moments d'une V. A. R. X on peut alors retrouver la loi de X. Souvent dans les exercices on procéde par identification en utilisant les fonctions génératrices des moments des lois usuelles.

2 Fonctions génératrices des moments des lois usuelles

2.1 V. A. R. discrètes

• Loi binomiale
Soit X une V. A. R. qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, c'est à dire $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$, la fonction génératrice des moments de la V. A. R. X est donnée par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \Big[pe^t + (1-p)\Big]^n.$$

• Loi géométrique
Soit X une V. A. R. qui suit la loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$, c'est à dire $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, la fonction génératrice des moments de la V. A. R. X est donnée par :

$$\text{pour tout } t \in]-ln(1/p), ln(1/p)[, \quad \varphi_X(t) = \frac{pe^t}{1-pe^t}.$$

• **Loi de Poisson**
Soit X une V. A. R. qui suit la loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$, c'est à dire $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, la fonction génératrice des moments de la V. A. R. X est donnée par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}.$$

2.2 V. A. R. continues

• **Loi uniforme**
Soit X une V. A. R. qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$, c'est à dire $X \rightsquigarrow U([a, b])$, la fonction génératrice des moments de la V. A. R. X est donnée par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & \text{si} \quad t \neq 0, \\ \\ 1 \quad \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

• **Loi exponentielle**
Soit X une V. A. R. qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$, c'est à dire $X \rightsquigarrow Exp(\lambda)$, la fonction génératrice des moments de la V. A. R. X est donnée par :

$$\text{pour tout } t < \lambda, \quad \varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

• **Loi normale**
Soit X une V. A. R. qui suit la loi normale de paramètres m et σ (avec $\sigma > 0$), c'est à dire $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$, la fonction génératrice des moments de la V. A. R. X est donnée par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = e^{tm} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

En particulier, si X suit la loi normale centrée $(m = 0)$ réduite $(\sigma = 1)$ alors la fonction génératrice des moments est donnée par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

3 Fonction génératrice des moments de la somme de deux V.A.R indépendantes

Théorème
Si X et Y sont deux V. A. R. indépendantes tels que φ_X la fonction génératrice

des moments de X et φ_Y la fonction génératrice des moments de Y, alors la fonction génératrice des moments de la V. A. R. $X+Y$ est donnée par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t),$$

c'est à dire la fonction génératrcie des moments de la somme de deux V. A. R. est donnée par le produit des fonctions génératrcies des V. A. R. X et Y.

4 Fonction génératrice des moments d'un couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux V. A. R., la fonction génératrice des moments du couple (X,Y) noté $\varphi_{(X,Y)}$ est donnée par : pour tout $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{E}(e^{t_1 X + t_2 Y})$ existe :

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \mathbb{E}(e^{t_1 X + t_2 Y}).$$

• Si X et Y sont conjointement continues de densité conjointe $f_{(X,Y)}$ alors :

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{t_1\,x + t_2\,y} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy.$$

• Si X et Y sont discrètes de probabilité conjointe $\{((x_i,y_j),p_{ij})$ tel que $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ alors :

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e^{t_1\,x_i + t_2\,y_j} p_{ij}.$$

Propriétés : Soient X et Y deux V.A.R. et $\varphi_{(X,Y)}$ la fonction génératrice des moments du couple (X,Y).

- Si X et Y sont conjointement continues de densité conjointe $f_{(X,Y)}$ donnée par
$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \text{ si } (x,y) \in D, \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$
alors
$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \int\int_{D} e^{t_1\,x + t_2\,y} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy.$$
- $\varphi_{(X,Y)}$ est toujours définie en $(0,0)$ et $\varphi_{(X,Y)}(0,0) = 1$.
- pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\frac{\partial^{m+n}\varphi_{(X,Y)}}{\partial t_1^m \partial t_2^n}(0,0) = \mathbb{E}(X^m\,Y^n),$$

en particulier pour $m = 1$ et $n = 1$ on obtient :

$$\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}}{\partial t_1 \partial t_2}(0,0) = \mathbb{E}(X\,Y).$$

- $\varphi_X(t_1) = \varphi_{(X,Y)}(t_1, 0)$ et $\varphi_Y(t_2) = \varphi_{(X,Y)}(0, t_2)$.
- Si X et Y sont indépendantes alors :

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \varphi_X(t_1)\,\varphi_Y(t_2).$$

5 Exercices

Exercice 1

Soit X une V.A.R. qui suit la loi de binomiale de paramètres n et p, avec $n \geq 2$ et $p \in]0,1[$.

1. Calculer la fonction génératrice des moments de X.
2. En déduire la moyenne et la variance de X.

Exercice 2

Sachant que $\varphi_X(t) = e^{5(e^t - 1)}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ est la fonction génératrice des moments d'une V. A. R. X. Calculer $P(X = 2)$.

Exercice 3

Soient X et Y deux V. A. R. indépendantes tel que X suit une binomiale de paramètres n et p, Y suit une binomiale de paramètres m et p.

1. Calculer la fonction génératrice des moments de $X + Y$.
2. En déduire la loi Z la somme des deux V. A. R. $Z = X + Y$

Exercice 4

Soient X et Y deux V. A. R. indépendantes tel que X suit la loi de Poisson de paramètre λ_1, Y suit la loi de Poisson de paramètre λ_2.

1. Calculer la fonction génératrice des moments de $X + Y$.
2. En déduire la loi Z la somme des deux V. A. R. $Z = X + Y$

Exercice 5

Soit X une V. A. R. à valeur dans $\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$.

1. Calculer la fonction génératrice des moments de X.
2. En déduire la moyenne et la variance de X.

Chapitre 14

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, Loi faible des grands nombres, Théorème de la limite centrale

1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1.1 Inégalité de Markov

Théorème
Soit X une V. A. R. qui prend des valeurs positives, alors pour tout réel a strictement positif ($a > 0$) on a :

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème
Soit X une V. A. R. quelconque alors :

$$\text{pour tout } \lambda > 0, \quad P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2}.$$

Pour démontrer l'inégalité précedente, il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov à la V. A. R. $Y = \Big[X - \mathbb{E}(X)\Big]^2$ pour $a = \lambda^2$.

Exemple
Soit X une V.A.R. tel que $\mathbb{E}(X) = Var(X) = 20$. Montrer que

$$P(0 < X < 40) > \frac{37}{40}.$$

On a $0 < X < 40$ implique $-20 < X - \mathbb{E}(X) < 20$ implique $|X - \mathbb{E}(X)| < 20$. Or $P(0 < X < 40) = P(|X - \mathbb{E}(X)| < 20) = 1 - P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 20)$. On applique alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 20) \leq \frac{Var(X)}{20^2} = \frac{1}{20}$$

Ainsi on deduit que $P(0 < X < 40) = 1 - P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 20) > \frac{19}{20} > \frac{37}{40}$.

2 Loi faible des grands nombres

Théorème : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant la même espérance m et la même variance σ^2 non nulle, c'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = m$ et $Var(X_n) = \sigma^2$. Soit la V. A. R. $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } \varepsilon > 0, \qquad & \lim_{n\to\infty} P\Big(|M_n - m| \geq \varepsilon\Big) = 0, \\ \text{et} \qquad & \lim_{n\to\infty} P\Big(|M_n - m| < \varepsilon\Big) = 1. \end{aligned}$$

Démonstartion : On a $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X)$ (à cause de la linéarité de l'espérance). En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut écrire :

$$P(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(M_n)}{\varepsilon^2}.$$

Or $\mathbb{E}(M_n) = m$ et $Var(M_n) = \frac{Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{n^2} = \frac{nVar(X_1)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$. On a utilisé le fait que la variance d'une somme de variables indépendantes est égale à la somme des variances. Ainsi on obtient :

$$P(|M_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

La probabilité $P(|M_n - m| \geq \varepsilon)$ est donc majorée par une suite tendant vers 0 quand n tend vers ∞, donc elle même tend vers 0, ce qui prouve la loi faible des grands nombres.

Remarque : Si on fait une série d'épreuves répétées X_i indépendantes et nombreuses de même espérance m et de même variance σ^2, il est probable que la moyenne observée des X_i est voisine de m.

3 Convergence en loi et approximation

4 Convergence en loi

Définition 4.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}$ et X une V. A. R. à valeurs dans $\mathbb{N}$ (c'est à dire $X(\Omega) = \mathbb{N}$). La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}, lim_{n\to\infty}P(X_n = k) = P(X = k)$.*

Définition 4.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires continues telle que F_{X_n} est la fonction de répartition de X_n et X est une V. A. R. continue telle que F_X est la fonction de répartition de X. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}, lim_{n\to\infty}P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$, c'est à dire pour tout $x \in \mathbb{R}, lim_{n\to\infty}F_{X_n}(x) = F_X(x)$.*

Proposition 14.1 *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $(a < b)$ on a*

$$lim_{n\to\infty}P(a < X_n \leq b) = P(a < X \leq b),$$

(X_n) et X des V. A. R. discrètes ou continues.

5 Approximations

5.1 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Soit λ un réel fixé dans $]0, 1[$. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de V. A. R. telle que X_n suit une binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$, c'est à dire $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. La suite (X_n) converge en loi vers une V. A. R. X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

En pratique : Une binomiale de paramètres n et p est approchée par une Poisson de pramètre $\lambda = np$ dès que :

$$\begin{cases} p \leq 0.1, \\ n \geq 30, \\ np < 5. \end{cases}$$

5.2 Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

La loi hypergéométrique de paramètres N, n et p notée $\mathcal{H}(N, n, p)$ peut être approchée par la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p, dès que : $N \geq 10n$, c'est à dire $\frac{n}{N} \leq 0.1$. Le quotient $\frac{n}{N}$ s'appelle le taux de sondage.

6 Théorème de la limite centrale (ou centrée)

Rappel : Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance m et une variance σ non nulle. La variable $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ est appellée variable centrée et réduite associée à X. Elle vérifie :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \quad \text{ et } \sigma(Y) = 1.$$

Théorème
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même espérance m et de même variance σ^2 (c'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = m$ et $Var(X_n) = \sigma^2$.) Soit la variable aléatoire $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. On a alors : La variable aléatoire $\dfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \dfrac{S_n - n\,m}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une V.A.R. qui suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. C'est à dire : pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{S_n - n\,m}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\Big) = \varphi(a),$$

avec φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Remarque : En utilisant la linéarité de l'espérance et le fait que la variance d'une somme de variables indépendantes est égale à la somme des variances on montre que :

$$\mathbb{E}(S_n) = n\,m \qquad \text{et} \qquad Var(S_n) = n\sigma^2.$$

6.1 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

La loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de paramètres $m = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, dès que :

$$\begin{cases} n \geq 30, \\ np \geq 15, \\ np(1-p) > 3. \end{cases}$$

Remarque Cette approximation implique la substitution d'une variable aléatoire continue (la loi normale) d'une variable aléatoire discrète (la loi binomiale). Or si X est une variable aléatoire continue

$$P(X < x_i) = P(X \leq x_i).$$

et si X est une variable aléatoire discrète

$$P(X < x_i) = P(X \leq x_{i-1}).$$

Donc si on cherche $P(X < x_i)$ la détermination de la loi normal doit prendre en cosidération une correction de continuité. Elle consiste à prendre une valeur tabulaire de $\mathcal{N}(0,1)$ correspondant à une valeur de X égale à $x_i - \frac{1}{2}$. Les corrections qui s'imposent lors du passage du discret en continue sont pour toute les lois :

Discret	Continue
$P(X < x_i)$	$P(X < x_i - \frac{1}{2})$
$P(X \leq x_i)$	$P(X \leq x_i + \frac{1}{2})$
$P(X > x_i)$	$P(X > x_i + \frac{1}{2})$
$P(X \geq x_i)$	$P(X \geq x_i - \frac{1}{2})$

6.2 Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

La loi de Poisson de paramètre λ notée $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de paramètres $m = \lambda$ et $\sigma = \sqrt{\lambda}$, dès que $\lambda > 20$.

7 Exercices

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire admettant comme densité la fonction f_X définie sur $I\!R$ par

$$f_X(x) = \begin{cases} \beta x\, e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0, \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Détérminer β pour que f_X soit une densité de probabilité.
2. Montrer que la variable aléatoire $Y = X^2$ suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.
3. a) Déterminer la fonction génératrice de moments Φ_Y de Y.
   b) Effectuer le développement en série entière de Φ_Y sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
   c) En déduire le moment d'ordre n de Y.
   d) Donner la valeur de l'integrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
4. On considère la suite $(Y_n)_n$ de variables aléatoires indépendantes, de même densité de probabilité que la variable aléatoire Y. On pose $S_n = \sum_{n=1}^{n} Y_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que $\left(\dfrac{S_n - 2n}{2\sqrt{n}}\right)_n$ converge vers une loi qu'on précisera.
   b) Que vaut $\lim_{n\to+\infty} P\big(S_n > 2n\big)$?
   c) Soit λ un réel strictement positif. En utilisant l'inégalité de Tchebychev, montrer que pour tout entier naturel n, il existe $A(n)$ tel que
   $$P\big(|S_n - 2n| \leq n\lambda\big) \geq A(n).$$
   d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P\big(|S_n - 2n| \leq n\lambda\big) = 1$.

Exercice 2

On répète n fois le lancé d'une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est p. Soit S_n la v.a. qui compte le nombre de fois où l'on obtient pile.

1. Quelle est la loi de la v.a. S_n ?
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Comment s'interprète la quantité Sn/n ?
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
   $$P(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0$$
   quand $n \longrightarrow +\infty$.
5. Interprétez ce résultat.

Exercice 3

Soient un entier n supérieur ou égal à 2 et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. on considère la variable aléatoire $S_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + ... + Z_n)$

1. Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de S_n.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(0 \leq S_n - m \leq \sigma_n)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

Exercice 4

Soient X une VAR de fonction densité de probabilité f_X définie par :

$$f_X(x)\begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et Y une VAR qui suit une loi uniforme sur $]-1, 1[$. On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = XY$.

1. Déterminer la fonction génératrice des moments $\phi_Z(t)$ de Z.
2. Effectuer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 0 de $\phi_Z(t)$ et en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
3. On considère la suite $(Z_n)_n$ de VAR indépendantes de même densité que la VAR Z. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{n} Z_n$.
   (a) Montrer que $\frac{\sqrt{6}S_n}{\sqrt{n}}$ converge vers une loi qu'on précisera.
   (b) Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(S_n > 0\big)$?
   (c) Soit λ un réel strictement positif, en utilisant l'inégalité de Tchebychev montrer que
   $$P\big(|S_n| \geq n\lambda\big) \leq A(n)$$
   où $A(n)$ est une fonction de n à déterminer.
   (d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(|S_n| \geq n\lambda\big) = 0$.
4. Calculer $P\big(X^2 + Y^2 < 1\big)$.

Chapitre 15

Tables

Intégrale $\varphi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On a alors la fonction densité de probabilité est donnée par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La fonction de répartition F_Z noté φ :

$$\varphi(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \varphi(-t) = 1 - \varphi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000