

Construction de couches parfaitement absorbantes pour le schéma de Boltzmann sur réseau

Mohamed-Mahdi TEKITEK
Université Paris-Sud

Journée de rentrée de l'équipe AN-EDP, 29 Septembre 2006

Plan de l'exposé

1. Rappel sur le schéma de Boltzmann sur réseau.
2. Rappel sur le système de Bérenger.
3. Schéma de Boltzmann sur réseau pour le système de Bérenger.
4. Une expérimentation numérique quelque peu décevante.
5. Interface entre deux schémas de Boltzmann.
6. Elimination de l'onde réfléchie.
7. Conclusions et perspectives.

Le schéma de Boltzmann sur réseau

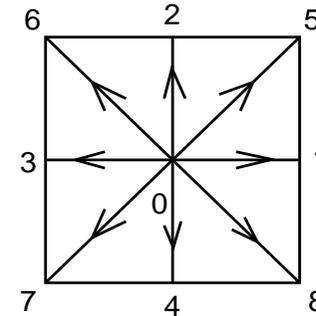
- Méthode particulière à vitesses discrètes : raisonner sur des grandeurs moyennées qui constituent des distributions, ou des probabilités de présence de particules.
- Modéliser les problèmes de mécanique des fluides (Euler, Navier-Stokes, Acoustique ...).

Modèle particulier de Boltzmann sur réseau en 2-D à 9-vitesses :

Qian, d'Humières, Lallemand, 1992

Succi, Benzi, 1992.

- Espace discrétisé par un maillage de carrés réguliers de pas δ_x .
- Le temps discrétisé par un pas fixe δ_t . Soit $\lambda = \frac{\delta_x}{\delta_t}$ l'échelle de vitesse constante.
- Espace des vitesses discrétisé en 9 vitesses $v_j = \lambda e_j, 0 \leq j \leq 8$.



L'évolution discrète du schéma entre l'instant t et $t + \delta_t$ est donnée par l'équation suivante :

$$f_i(x + v_i, t + \delta t) = f_i(x, t) + Q_i(f)(x, t), \quad 0 \leq i \leq 8$$

avec $Q_i(f)(x, t) = \sum_{j=0}^b S_{i,j}(f_j - f_j^{eq})$, où $S_{i,j}$ est la matrice de collision et f^{eq} est la distribution d'équilibre.

- Advection : décrit le déplacement des particules vers les voisins directs : $f_i(x + v_i \delta_t, t + \delta_t) = f_i(x, t)$ avec $x + v_i \delta_t$ un sommet.

$$\text{Equation d'advection : } \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

La méthode des caractéristiques est exacte.

- Collision : elle est représentée par le terme $Q_i(f)$ dans l'équation discrète. Etape **locale** en espace.

Pour décrire cette étape d'Humières (1992) propose de la décrire dans l'espace des "moments" m , qui sont des combinaisons linéaires des f . $m = Mf$.

- Moments **conservés** :

La **densité** (la masse) $\rho = \sum_{j=0}^8 f_j$ et l'**impulsion** $j = (j_x, j_y)$, avec $j_x = \sum_{j=0}^8 v_j^x f_j$ et $j_y = \sum_{j=0}^8 v_j^y f_j$.

- Les moments **non conservés** (hors équilibre) :

L'énergie cinétique orthogonalisée : $e = -4f_0 - \sum_{j=1}^4 f_j + 2 \sum_{j=5}^8 f_j$,

Carré de l'énergie cinétique : $\epsilon = 4f_0 - 2 \sum_{j=1}^4 f_j + \sum_{j=5}^8 f_j$,

Flux d'énergie :

$q_x = -2(f_1 - f_3) + (f_5 - f_7) - (f_6 + f_8)$, $q_y = -2(f_2 - f_4) + (f_5 - f_7) + (f_6 - f_8)$,

et les moments tensoriels d'ordre 2 :

$p_{xx} = f_1 - f_2 + f_3 - f_4$, $p_{xy} = f_5 - f_6 + f_7 - f_8$.

- On suppose que les moments non conservés relaxent linéairement par rapport à leurs valeurs d'équilibre. (P.Lallemand, D. d'Humières)

Approximation par un schéma d'Euler explicite :

$$\frac{dm_i}{dt} + \frac{1}{\tau_i} (m_i - m_i^{eq}) = 0 \quad : \quad m_i^* = m_i - s_i (m_i - m_i^{eq})$$

avec m_i^* moment après relaxation, et $s_i \equiv \frac{\delta_t}{\tau_i}$ taux de relaxation.

- Les 9 moments définissent une transformation matricielle de l'espace des distributions vers l'espace des moments : $m = M.f$.

Un pas d'algorithme :

$$f(x, t) \rightarrow m = M.f(t) \rightarrow m^* \rightarrow f(x + \delta_x, t + \delta_t) = M^{-1}m^*$$

- Equations macroscopiques : la méthode de l'équation équivalente (mini-cours, avril 05), basée sur le développement de Taylor.

Cas de l'acoustique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} j = O(\delta_x^2),$$

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial t} + \frac{\lambda^2}{3} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \frac{\lambda^2 \delta_t}{3} \left(\frac{1}{s_3} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial(\text{div} j)}{\partial x_\alpha} + \frac{\lambda^2 \delta_t}{3} \left(\frac{1}{s_8} - \frac{1}{2} \right) \Delta j + O(\delta_x^2).$$

avec $e^{eq} = -2\rho$, $\epsilon^{eq} = \rho$, $q_x = -j_x$, $q_y = -j_y$, $p_{xx}^{eq} = 0$, $p_{xy}^{eq} = 0$ et

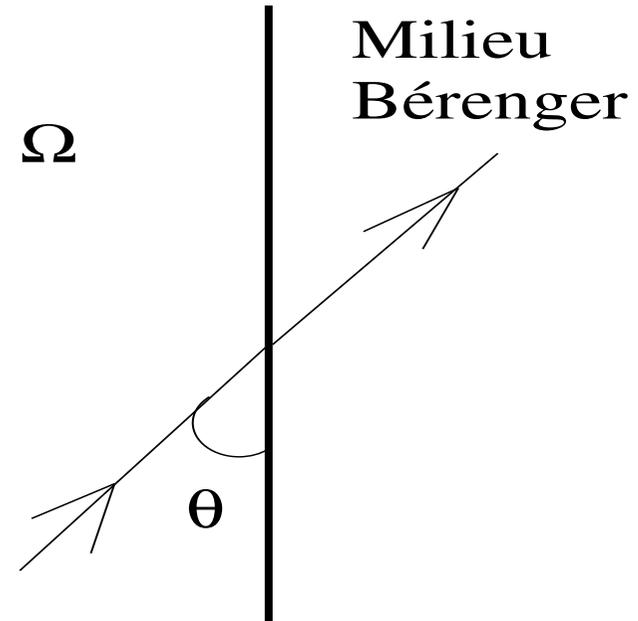
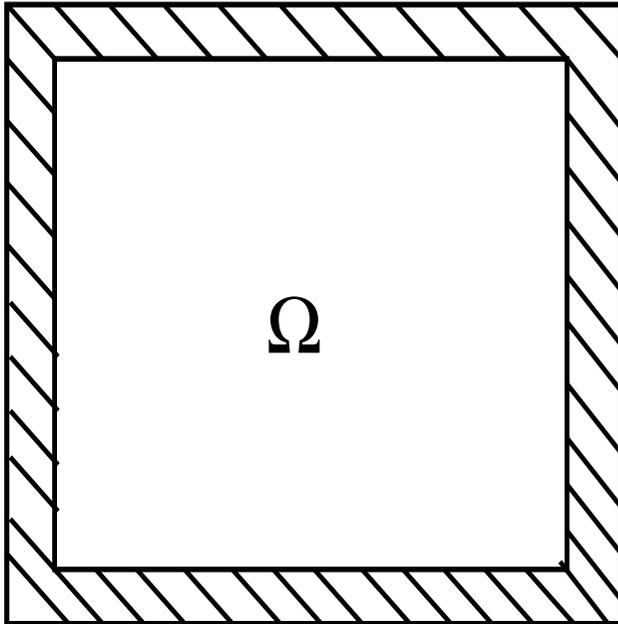
$$s_{p_{xx}} = s_{p_{xy}}.$$

$$c_s^2 = \frac{\lambda^2}{3}, \quad \zeta = \frac{\lambda^2 \delta_t}{3} \left(\frac{1}{s_3} - \frac{1}{2} \right), \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda^2 \delta_t}{3} \left(\frac{1}{s_8} - \frac{1}{2} \right).$$

Rappel sur le système de Bérenger :

- La simulation numérique de propagation d'onde dans un domaine non borné demande a priori la création d'un domaine fini de calcul.
- Besoin d'introduire des conditions limites artificielles.
 - Les méthodes de couches absorbantes.
Davies (76), Israeli-Orszag (81)
 - Les méthodes des conditions limites absorbantes.
Enquist-Majda (77), Bayliss-Turkel (80), Joly-Mercier (89),
Taflove (98), Halpern-Trefethen (86).
 - La méthode de couche absorbante de Bérenger (94), Collino (95),
Hu (96).

- Couche parfaitement adaptée de Bérenger :



Avantage : absorber toutes les ondes quel que soit leur angle d'incidence en ne générant aucune onde réfléchie dans le milieu d'intérêt.

- Acoustique : Hu (96)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial j_x}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial j_y}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}.$$

- Dans le milieu absorbant de Béranger :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \sigma \rho_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho_y}{\partial t} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial j_x}{\partial t} + \sigma j_x + \frac{\partial(\rho_x + \rho_y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial j_y}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_x + \rho_y)}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$$

où $\rho = \rho_x + \rho_y$ et $\sigma \geq 0$ est le facteur d'amortissement.

- Technique de Béranger : couper l'équation de continuité en deux équations en introduisant les deux fonctions inconnues ρ_x et ρ_y .

Schéma de Boltzmann sur réseau pour Bérenger :

($\sigma = 0$ dans une première approche)

- Moments conservés : dans le milieu de Bérenger on a 4 équations, on a besoin d'avoir 4 moments conservés.

- Nombre de vitesses discrètes :

Enrichir le modèle avec plus de vitesses ?

Problème de connection à l'interface pour l'étape d'advection.

Garder un automate à 9 vitesses discrètes.

- **Proposition 1 :**

Il existe un schéma de Boltzmann stable, à 9 vitesses discrètes et 4 moments conservés dont l'équation équivalente à l'ordre 1 par rapport à δ_x est le milieu de Bérenger.

Idée de la construction du schéma :

- Modèle :

Moments conservés : $\rho = \rho_x + \rho_y$, $\rho_x - \rho_y$, J_x et J_y .

Moments non conservés : e , ϵ , q_x , q_y et p_{xy} .

Construction de $\rho_x - \rho_y$: combinaison linéaire des 9 moments déjà introduits dans le modèle D2Q9.

- Contraintes :

- Les équations macroscopiques sont celles du milieu Bérénger.
- La matrice M est inversible.
- le schéma est stable.

On pose :

$$\rho_x - \rho_y = \gamma_\rho \rho + \gamma_x J_x + \gamma_y J_y + \gamma_e e + \gamma_\epsilon \epsilon + \beta_x q_x + \beta_y q_y + \gamma_{xx} p_{xx} + \gamma_{xy} p_{xy}.$$

On trouve par identification : $\gamma_x = \gamma_y = 0$, $\beta_x = \beta_y = 0$ et $\gamma_{xy} = 0$

Pour les coefficients à l'équilibre il faut que :

$$e^{eq} = a_x \rho_x + a_y \rho_y,$$

$$a_x = -4 + 6c_s, a_y = -4 + 6c_s,$$

$$e^{eq} = c_x \rho_x + c_y \rho_y, \quad c_x = \frac{(+4\gamma_e - 6\gamma_e c_s - \gamma_\rho + 1)}{\gamma_\epsilon}, c_y = \frac{(+4\gamma_e - 6\gamma_e c_s - \gamma_\rho - 1)}{\gamma_\epsilon},$$

$$q_x^{eq} = c_1 \dot{j}_x,$$

$$c_1 = \frac{(3\gamma_\rho + \gamma_{xx} + 3\gamma_e - 3)}{(\gamma_{xx} - 3\gamma_e - 3\gamma_\epsilon)},$$

$$q_y^{eq} = c_2 \dot{j}_y,$$

$$c_2 = \frac{(-3\gamma_\rho + \gamma_{xx} - 3\gamma_e - 3)}{(\gamma_{xx} + 3\gamma_e + 3\gamma_\epsilon)},$$

$$p_{xy}^{eq} = 0.$$

• Equation équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_x}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = O(\delta_x), \\ \frac{\partial \rho_y}{\partial t} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = O(\delta_x), \\ \frac{\partial j_x}{\partial t} + c_s^2 \frac{\partial (\rho_x + \rho_y)}{\partial x} = O(\delta_x), \\ \frac{\partial j_y}{\partial t} + c_s^2 \frac{\partial (\rho_x + \rho_y)}{\partial y} = O(\delta_x), \end{array} \right.$$

4 paramètres libres : $(\gamma_\rho, \gamma_e, \gamma_\epsilon, \gamma_{xx})$ avec $\gamma_{xx} \neq (0, 3(\gamma_e + \gamma_\epsilon))$, $\gamma_\epsilon \neq 0$.

- **Proposition 2** : Atténuation d'ordre zéro ($\sigma \neq 0$) :

Pour modéliser le terme d'absorption en σ des équations de Bérenger on peut modifier l'étape d'advection du schéma de Boltzmann :

$$f_i(x + v_i, t + \delta t) = (1 - \sigma_i) (f_i(x, t) + Q_i(f)(x, t)), \quad 0 \leq i \leq 8$$

Preuve : Utiliser la technique de l'équation équivalente.

- Stabilité, étude expérimentale (Analyse de Von Neumann) :

Soit f une solution sous la forme $f_i(x, t) = \phi_i e^{i(\omega t - k \cdot x)}$. L'algorithme s'écrit alors :

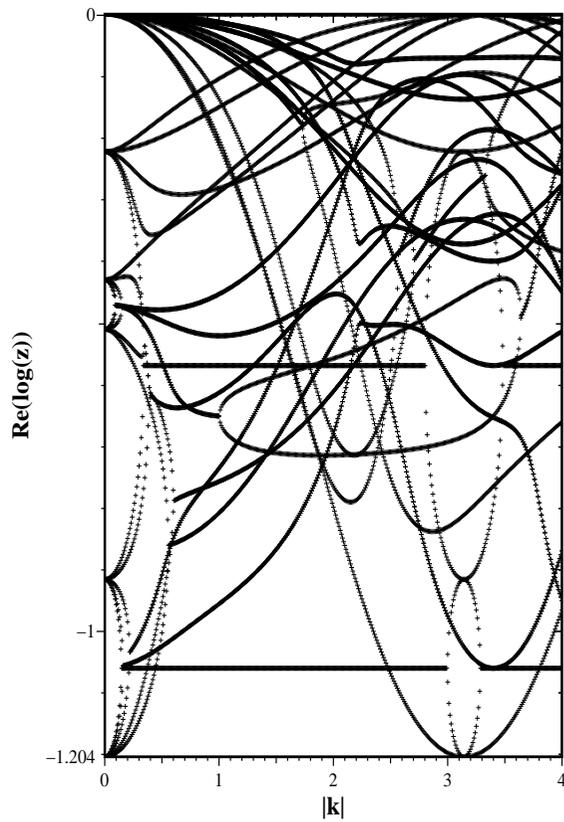
$$A(I + MCM^{-1})\phi = z\phi, \text{ avec } A = \text{diag} \left(1, p, q, \frac{1}{p}, \frac{1}{q}, pq, \frac{q}{p}, \frac{1}{pq}, \frac{p}{q} \right)$$

avec $z = e^{(i\omega\delta t)}$, $p = e^{(ik_x\delta x)}$, $q = e^{(ik_y\delta x)}$ et $G \equiv A(I + MCM^{-1})$.

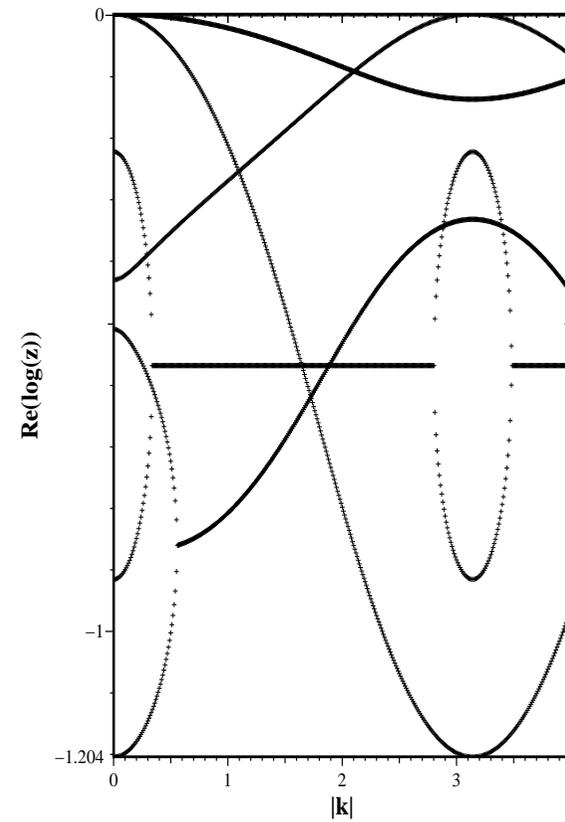
Si l'opérateur G est diagonalisable et toutes les valeurs propres sont de module plus petit que 1, alors l'algorithme est stable.

Pour $\gamma_\rho = 7$, $\gamma_e = 3$, $\gamma_\epsilon = 2$ et $\gamma_{xx} = 1$, l'algorithme est stable pour tout k :

Plusieurs directions du vecteur d'onde



$k=(k_x,0)$



- Viscosité :

D'après l'équation équivalente à l'ordre 2, on trouve avec $\gamma_\rho = 7$, $\gamma_e = 3$, $\gamma_\epsilon = 2$ et $\gamma_{xx} = 1$ que ce modèle est très visqueux, de plus il n'est pas isotrope.

Equation équivalente à l'ordre 2 :

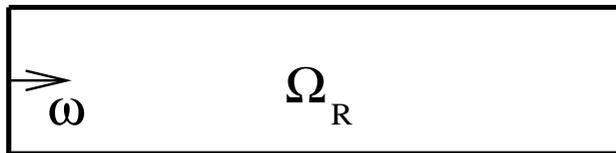
$$\frac{\partial(\rho_x + \rho_y)}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = O(\delta_x^2),$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(\frac{s_e s_\epsilon - 6s_e + 4s_\epsilon}{s_e s_\epsilon} \right) \frac{\partial^2 j_x}{\partial x^2} - \frac{1}{6} \left(\frac{s_e s_\epsilon - 8s_\epsilon + 6s_e}{s_e s_\epsilon} \right) \frac{\partial^2 j_y}{\partial_{xy}} + \frac{1}{3} \frac{\partial(\rho_x + \rho_y)}{\partial x} = O(\delta_x^2),$$

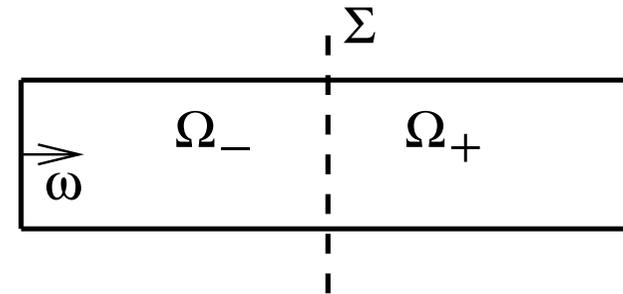
$$\frac{\partial j_y}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(\frac{s_e s_\epsilon + 3s_e - 5s_\epsilon}{s_e s_\epsilon} \right) \frac{\partial^2 j_y}{\partial y^2} - \frac{1}{6} \left(\frac{s_e s_\epsilon + 10s_\epsilon - 12s_e}{s_e s_\epsilon} \right) \frac{\partial^2 j_x}{\partial_{xy}} + \frac{1}{3} \frac{\partial(\rho_x + \rho_y)}{\partial x} = O(\delta_x^2).$$

Une expérimentation numérique quelque peu décevante

- Soit le domaine $\Omega = [0, l] \times [0, h]$ composé du milieu $\Omega_- = [0, \frac{l}{2}] \times [0, h]$ acoustique et de milieu $\Omega_+ = [\frac{l}{2}, l] \times [0, h]$ de Bérenger sans atténuation (*i.e.* $\sigma = 0$).



Milieu de référence.

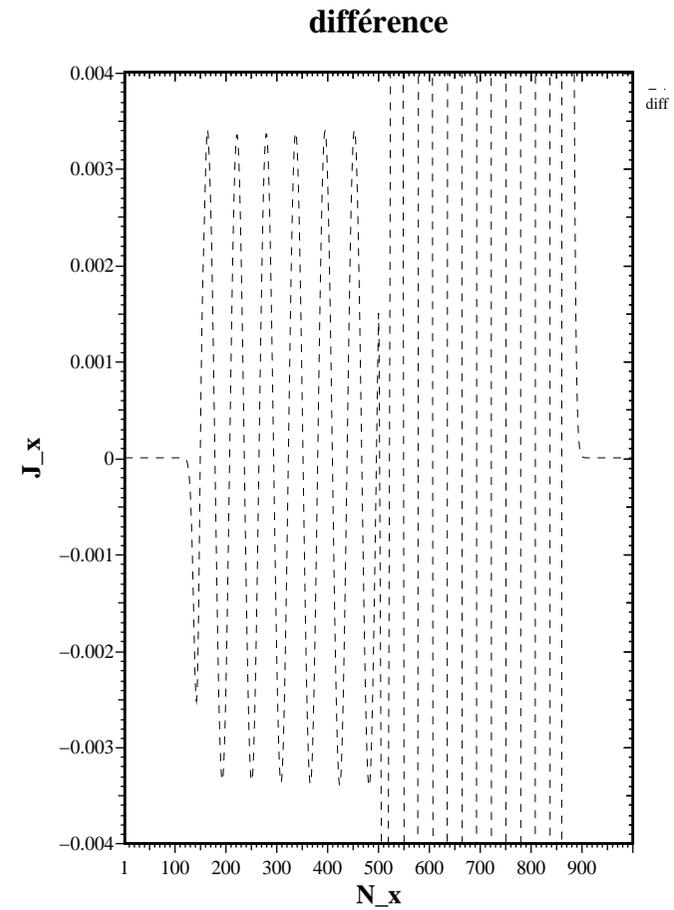
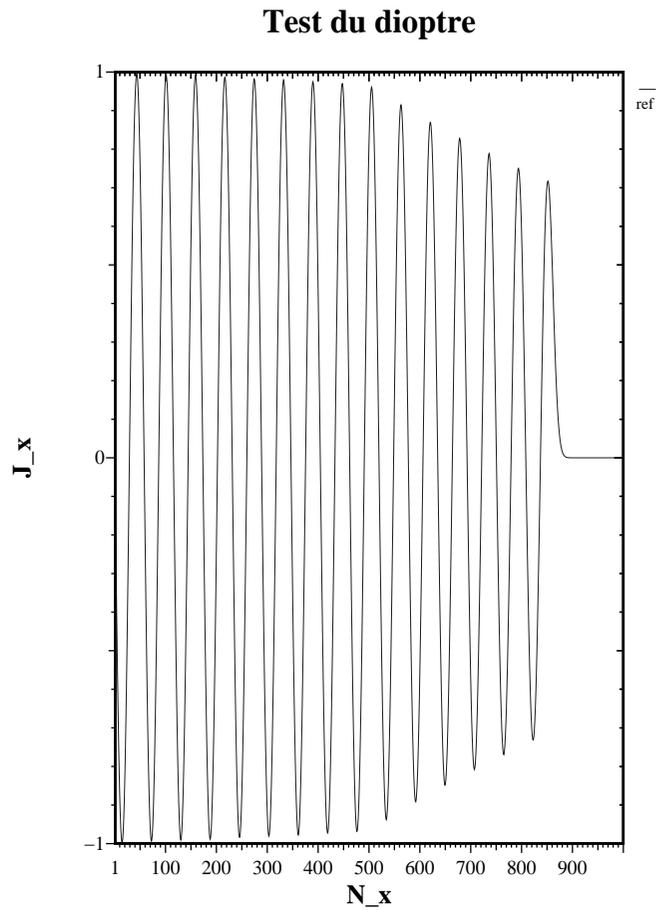


Acoustique Bérenger

Test du dioptré

- Onde réfléchié : les premiers tests numériques du schéma de Boltzmann pour le milieu Bérenger montrent l'existence d'une onde réfléchié dans le domaine d'étude (“acoustique”).

- Le cas d'une incidence normale : onde réfléchie $\simeq 3,4 \text{ } ^0/_{00}$



Analyse du dioptré pour un modèle monodimensionnel :

Problème : deux milieux fluides de paramètres différents (viscosité, vitesse du son) de dimension 1. Quel est le coefficient de réflexion?

- Analyse en continu :

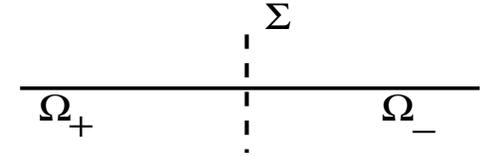
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega^- \equiv \{x, x < 0\}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial t} - \tilde{\nu} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \tilde{c}_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega^+ \equiv \{x, x > 0\}.$$

Formules de Fresnel : coefficient de réflexion r (rapport d'amplitude entre l'onde réfléchie et l'onde incidente) en fonction de k et \tilde{k} vecteurs d'onde dans les milieux Ω^- et Ω^+ :

$$r_{th} \equiv \frac{J_r}{J_i} = \frac{\tilde{k} - k}{k + \tilde{k}} = \frac{c_s - \tilde{c}_s}{c_s + \tilde{c}_s} + i \frac{\tilde{c}_s^2 \nu - c_s^2 \tilde{\nu}}{(c_s + \tilde{c}_s)^2 c_s \tilde{c}_s} \omega + O(\omega^2),$$

Proposition 3 : analyse discrète du coefficient de réflexion :

Soit Ω_+ et Ω_- deux milieux acoustiques en régime harmonique de vecteur d'onde k et \tilde{k} .



A l'aide d'une analyse du schéma de Boltzmann en 1D et à 3 vitesses discrètes, on a la formule de Fresnel suivante :

$$\text{coefficient de réflexion} : r_d \equiv \frac{J_r}{J_i} = \frac{p - \tilde{p}}{1 - p\tilde{p}},$$

avec $p = e^{(ik\delta_x)}$ et $\tilde{p} = e^{(i\tilde{k}\delta_x)}$.

- Le développement limité de r_d en ω à l'ordre 2 est égal à celui de r_{th} :

$$r_d = \frac{c_s - \tilde{c}_s}{c_s + \tilde{c}_s} + i \frac{\tilde{c}_s^2 \nu - c_s^2 \tilde{\nu}}{(c_s + \tilde{c}_s)^2 c_s \tilde{c}_s} \omega + O(\omega^2).$$

- Preuve : le modèle de Boltzmann 1 D à 3 vitesses discrètes
 $v_i \in \{0, \lambda, -\lambda\}$: trois moments pour décrire l'étape de collision :

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2,$$

$$J = \lambda f_1 - \lambda f_2,$$

$$e = \frac{\lambda^2}{2} f_1 + \frac{\lambda^2}{2} f_2, \quad e^* = e + s(e^{eq} - e), \quad \text{avec} \quad e^{eq} = \frac{\alpha \lambda^2}{2} \rho = \frac{c_s^2}{2} \rho.$$

On considère les solutions de type onde plane : $f_i(x, t) = \phi_i e^{i(\omega t - kx)}$.

L'algorithme s'écrit alors :

$$f(x, t + \delta_t) = e^{i\omega \delta_t} f(x, t) = A(I + M^{-1}CM)f(x, t)$$

$$\text{avec } A = \text{diag} \left(1, p, \frac{1}{p} \right), \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha \lambda^2}{2} s & 0 & -s \end{pmatrix} \quad \text{où } p = e^{ik\delta_x}.$$

On pose $z = e^{(i\omega \delta_t)}$; on a l'équation de dispersion :

$$zf(x, t) = G(p)f(x, t).$$

Dans le problème où ω est fixé, on cherche p tel que

$$\det(G(p) - zId) \equiv \left\{ \text{polynôme de degré 1 en } \left(p + \frac{1}{p}\right) \right\} = 0.$$

On trouve alors deux solutions $p_+ = e^{(ik_+\delta_x)}$ et $p_- = e^{(ik_-\delta_x)}$.

On a deux modes propres $\begin{cases} \phi_+ & = \left(\phi_0^+, \phi_1^+, \phi_2^+ \equiv \frac{1-\frac{z}{p}}{1-pz} \phi_1^+ \right), \\ \phi_- & = \left(\phi_0^-, \phi_1^-, \phi_2^- \equiv \frac{1-pz}{1-\frac{z}{p}} \phi_1^- \right). \end{cases}$

- En $x_g = -\frac{\delta_x}{2}$: une onde incidente et une réfléchie :

$$f_g = e^{(i(\omega t - k_+ x))} \phi_+ + \beta e^{(i(\omega t - k_- x))} \phi_-$$

- En $x_d = \frac{\delta_x}{2}$: une onde transmise :

$$f_d = \gamma e^{(i(\omega t - \tilde{k}_+ x))} \tilde{\phi}_+$$

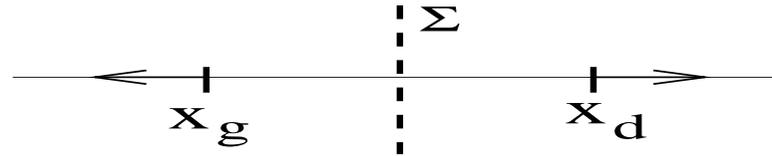
On a deux inconnues scalaires β et γ qui déterminent

$$r_d = \frac{J_r}{J_i} = \beta \frac{\phi_1^- - \phi_2^-}{\phi_1^+ - \phi_2^+} \text{ et } t_d = \frac{J_t}{J_i} = \gamma \frac{\tilde{\phi}_1^+ - \tilde{\phi}_2^+}{\phi_1^+ - \phi_2^+}$$

Interface : on écrit un pas de l'algorithme

$$f_i(x_j, t + \delta_t) = f_i^*(x_j - v_i \delta_t, t)$$

en x_g pour la vitesse allant de droite à gauche ($i = 2$) et en x_d pour celle allant de gauche à droite ($i = 1$).



En utilisant le fait que $z\phi = A\phi^*$, on trouve le système suivant :

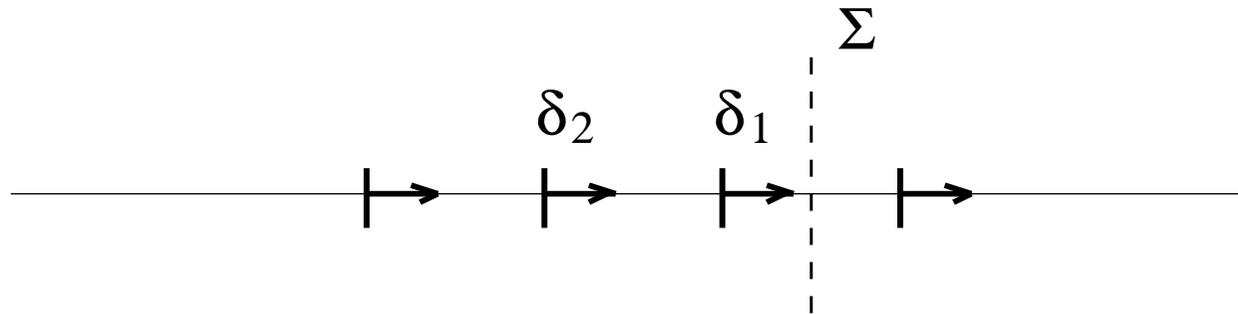
$$\begin{aligned} p\phi_2^+ + \beta\phi_2^- &= \gamma\sqrt{p\tilde{p}}\tilde{\phi}_2^+, \\ \frac{1}{p}\phi_1^+ + \beta\phi_1^- &= \frac{\gamma}{\sqrt{p\tilde{p}}}\tilde{\phi}_1^+. \end{aligned}$$

On résout le système en utilisant les expressions des modes :

$$r_{th} = -\beta = \frac{p - \tilde{p}}{1 - p\tilde{p}}.$$

Elimination de l'onde réfléchie :

- idée : changer l'étape d'advection à l'interface.



$$f_1(t + \delta_t, x) = \delta_1 f_1^*(t, x - \delta_x) + \delta_2 f_1^*(t, x - 2\delta_x), \quad \text{en } x = \frac{\delta_x}{2},$$
$$f_2(t + \delta_t, x) = f_2^*(t, x + \delta_x), \quad \text{en } x = -\frac{\delta_x}{2}.$$

Choisir δ_1, δ_2 pour annuler le coefficient de réflexion.

Proposition 4 :

Pour le modèle monodimensionnel à 3 vitesses en acoustique, on peut trouver des coefficients δ_1 et δ_2 pour annuler les termes en ω d'ordre 0 et 1.

Preuve : on utilise la technique d'analyse dans un cas harmonique :

$$r_d = -\frac{p^2(z - \tilde{p})(zp - 1)\delta_2 + p(z - \tilde{p})(zp - 1)\delta_1 + p(z\tilde{p} - 1)(p - z)}{(z - \tilde{p})(p - z)\delta_2 + p(z - \tilde{p})(p - z)\delta_1 + p(z\tilde{p} - 1)(zp - 1)}.$$

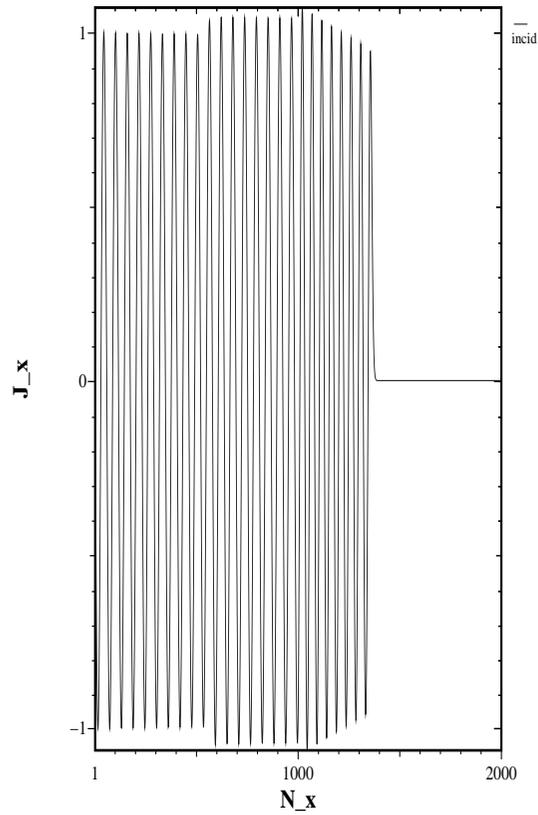
On cherche alors δ_1 et δ_2 tel que $r_d = O(\omega^2)$. On trouve :

$$\delta_1 = \frac{\lambda\tilde{c}(\lambda - \tilde{c})(\lambda + \tilde{c})\nu - \lambda c(\lambda - c)(\lambda + c)\tilde{\nu} + \lambda\delta_t\tilde{c}(\lambda - \tilde{c})(\lambda + \tilde{c})(\lambda - c)(\lambda + c)}{\delta_t\lambda\tilde{c}(\lambda - \tilde{c})^2(\lambda + c)^2},$$

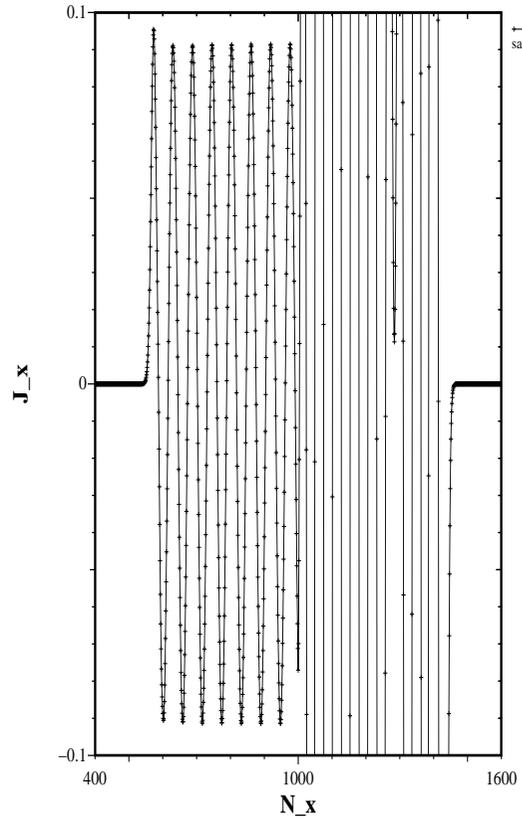
$$\delta_2 = \frac{-\lambda\tilde{c}(\lambda - \tilde{c})(\lambda + \tilde{c})\nu + \lambda c(\lambda - c)(\lambda + c)\tilde{\nu}}{\delta_t\lambda\tilde{c}(\lambda - \tilde{c})^2(\lambda + c)^2}.$$

- Test numérique :

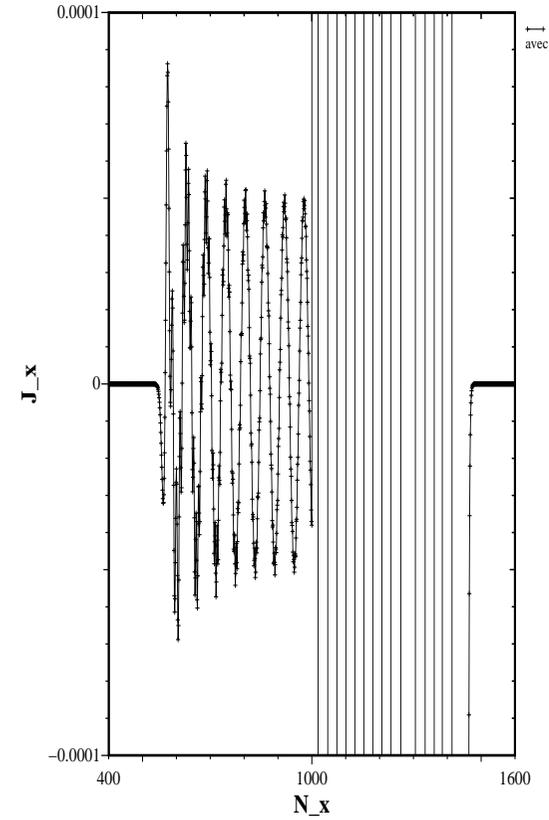
Test du dioptre



Onde réfléchie



Onde réfléchie avec nouvelle méthode



Soit $\Omega_+ = \{x_i, 0 < i < 1000\}$ et $\Omega_- = \{x_i, 1000 < i < 2000\}$ deux milieux acoustiques de paramètres (c_s, ν) et $(\tilde{c}_s, \tilde{\nu})$.

Deux ondes réfléchies avec et sans le changement de l'advection à l'interface.

Etude numérique d'un dioptre en 2D en incidence normale :

On fait l'analyse modale du schéma D2Q9 (la même qu'en 1D). On considère les solutions de type onde plane : $f_i(x, t) = \phi_i e^{i(\omega t - kx)}$.

L'algorithme s'écrit alors :

$$f(x, t + \delta_t) = e^{i\omega\delta_t} f(x, t) = A(I + M^{-1}CM)f(x, t)$$

avec $A = \text{diag}(1, p, 1, \frac{1}{p}, 1, p, \frac{1}{p}, \frac{1}{p}, p)$, ou $p = e^{ik\delta_x}$.

On pose $z = e^{i\omega\delta_t}$, l'équation de dispersion s'écrit alors :

$$zf(x, t) = G(p)f(x, t).$$

Dans notre problème ω est fixé, on cherche alors p tel que

$$\det(G(p) - zId) \equiv \left\{ \text{polynôme de degré 3 en } \left(p + \frac{1}{p}\right) \right\} = 0.$$

On trouve ainsi les solutions :

$p_+ = 1 + i\frac{\omega}{c_s} + O(\omega^2)$, vecteur associé ϕ_+ onde progressive,

$p_- = 1 - i\frac{\omega}{c_s} + O(\omega^2)$, vecteur associé ϕ_- onde régressive,

$p_{K,1} = \alpha_1 + \beta_1\omega + O(\omega^2)$, avec $\alpha_1 < -1$,

vecteur associé $\phi_{K,1}$ onde de Knudsen,

$p_{K,2} = \alpha_2 + \beta_2\omega + O(\omega^2)$, avec $-1 < \alpha_2 < 0$,

vecteur associé $\phi_{K,2}$ onde de Knudsen,

$p_{t,1} = 1 + (\alpha_{t,1} + i\beta_{t,1})\sqrt{\omega} + i\gamma_{t,1}\omega + O(\omega\sqrt{\omega})$,

vecteur associé $\phi_{t,1}$ onde transverse,

$p_{t,2} = 1 + (\alpha_{t,2} + i\beta_{t,2})\sqrt{\omega} + i\gamma_{t,2}\omega + O(\omega\sqrt{\omega})$,

vecteur associé $\phi_{t,2}$ onde transverse.

Deux milieux fluides Ω_- et Ω_+ de paramètres différents c_s, ν et $\tilde{c}_s, \tilde{\nu}$.

- en $x_g = -\frac{\delta_x}{2}$:

$$f_g = e^{i(\omega t - k_+ x)} \phi_+ + \beta e^{i(\omega t - k_- x)} \phi_- + \eta_1 e^{i(\omega t - k_{n,1} x)} \phi_{K,1} + \eta_2 e^{i(\omega t - k_{n,2} x)} \phi_{K,2}$$

- en $x_d = \frac{\delta_x}{2}$:

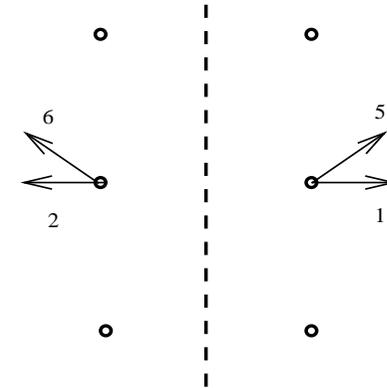
$$f_d = \gamma e^{i(\omega t - \tilde{k}_+ x)} \tilde{\phi}_+ + \tilde{\eta}_1 e^{i(\omega t - \tilde{k}_{n,1} x)} \tilde{\phi}_{K_1} + \tilde{\eta}_2 e^{i(\omega t - \tilde{k}_{n,2} x)} \tilde{\phi}_{K_2}$$

Les ondes transverses n'interviennent pas car le vecteur d'onde est normal : $k = (k_x, 0)$. De plus $\eta_2 = \tilde{\eta}_1 = 0$, car les ondes de Knudsen sont à exponentielle décroissante.

il y a alors 4 inconnues : α et γ qui déterminent l'amplitude des ondes réfléchie et transmise et η_1 et $\tilde{\eta}_2$ qui déterminent l'amplitude des ondes de Knudsen.

4 équations découlent alors d'un pas de l'algorithme à l'interface :

$$f_i(x_j, t + \delta_t) = f_i^*(x_j - v_i \delta_t, t)$$



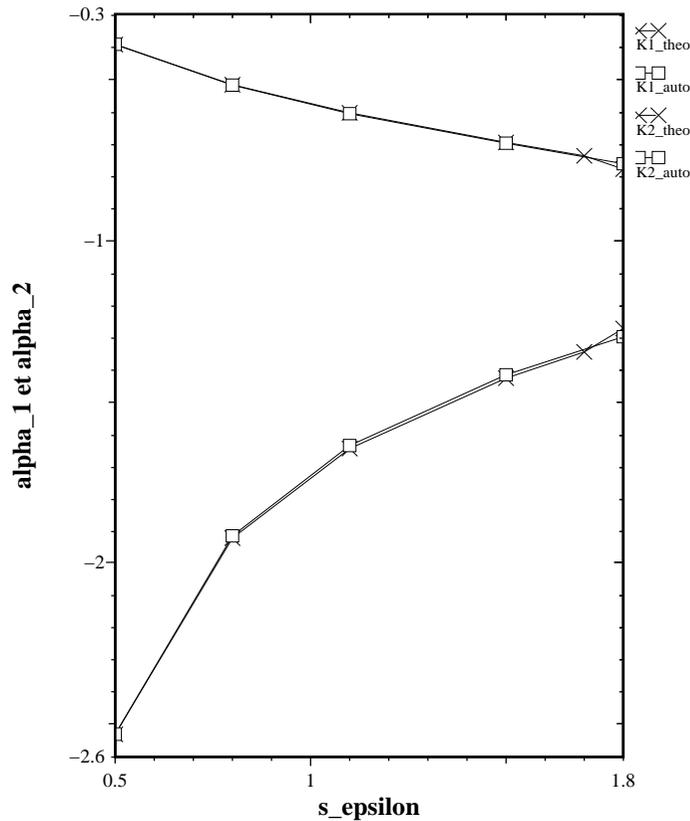
en x_g pour $i = 2, i = 6$ et en x_d pour $i = 1, i = 5$.

- Difficulté de résolution:
 - les matrices sont dans $M_9(\mathbb{C})$.
 - Plusieurs variables pilotent les équations hydrodynamiques : valeurs d'équilibres, temps de relaxation ...
 - Les ondes de Knudsen ajoutent des paramètres supplémentaires.

On peut calculer numériquement les coefficients des différentes ondes.

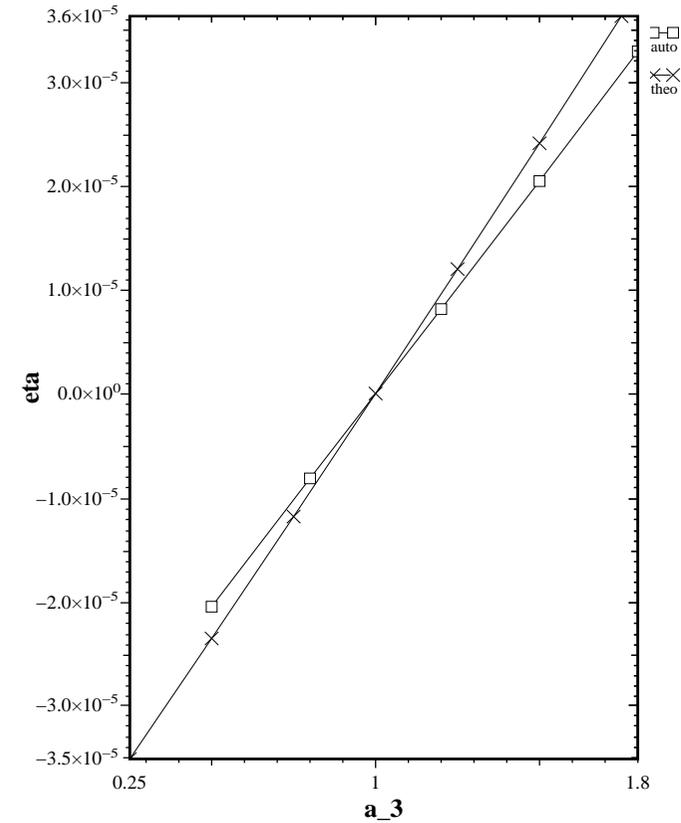
- Deux milieux acoustiques : Analogues du point de vue hydrodynamique et différents de point de vue cinétique. Ω_- où $\epsilon^{eq} = \rho$ et Ω_+ où $\epsilon^{eq} = \tilde{a}_3 \rho$.

Vecteurs d'onde de Knudsen



$a_3 = \frac{1}{2}$, α_1 et α_2 les deux paramètres des vecteurs d'onde de Knudsen calculés par la méthode d'analyse modale et mesurés à partir de l'automate pour différentes valeurs de s_ϵ .

Amplitude d'onde de Knudsen

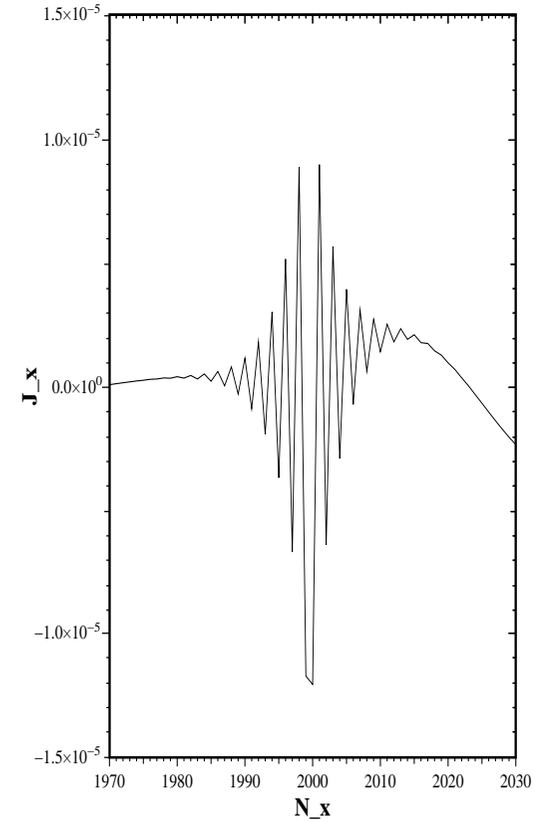
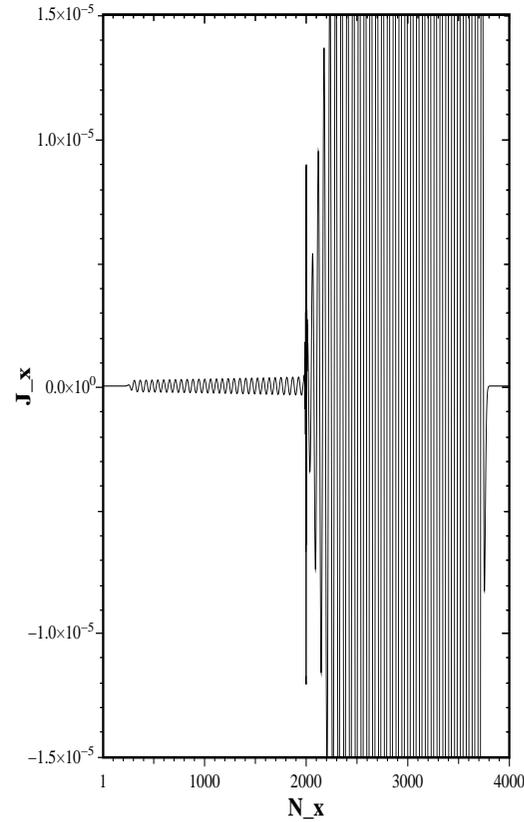
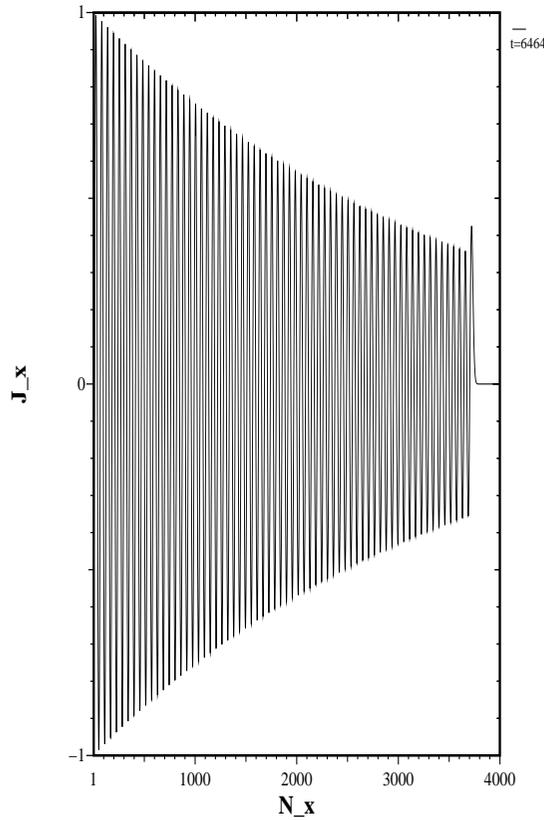


η (amplitude des ondes de Knudsen) calculés par la méthode d'analyse modale et mesurés à partir de l'automate pour différentes valeurs de \tilde{a}_3 avec $s_\epsilon = 1.75$

- Test numérique : Cornubert, d’Humières, Levermore (1991)

différence

Zoom: modes de Knudsen



Soit $\Omega_+ = \{x_i, 0 < i < 2000\}$ et $\Omega_- = \{x_i, 2000 < i < 4000\}$ deux milieux acoustiques de paramètres $a_3 = 1$ et $(\tilde{a}_3 = \frac{1}{2})$.

Onde hydrodynamique réfléchiée ($\simeq 10^{-6}$) et onde de Knudsen à l’interface $x_i = 2000$.

Conclusion et perspectives :

- Automate de Boltzmann pour les couches absorbantes de Bérenger.
- Analyse des ondes réfléchies pour un schéma simplifié de Boltzmann sur réseau et proposition de modification du schéma à l'interface pour éliminer les ondes réfléchies.
- Méthode d'analyse des ondes réfléchies pour une incidence normale pour Boltzmann en 2 dimensions.
- Problème "réel" plus complexe à cause des modes de Knudsen et des ondes transverses.
- Le milieu de Bérenger reste approché pour les interfaces numériques avec Boltzmann sur réseau.
- Comment généraliser la méthode de l'élimination de l'onde réfléchie pour des modèles 2D voire 3D?